ROSARIO FEDERICO

CORSO ELEMENTARE DI FISICA

PER I LICEI SCIENTIFICI
ED ALTRI ISTITUTI MEDI SUPERIORI

VOLUME PRIMO

MECCANICA DEI SOLIDI E DEI FLUIDI - COSMOGRAFIA

CON 382 FIGURE E NUMEROSI ESERCIZI E PROBLEMI

RISTAMPA DELLA TERZA EDIZIONE

1943-XXI

EDITRICE LIBRARIA ITALIANA - TORINO

CORSO ELEMENTARE DI FISICA

PROF. ROSARIO FEDERICO

GIÀ ORDINARIO DI FISICA E MATEMATICA NEL R. LICEO «ALFIERI» DI TORINO

CORSO ELEMENTARE DI
FISICA

PER I LICEI SCIENTIFICI
ED ALTRI ISTITUTI MEDI SUPERIORI

VOLUME PRIMO

MECCANICA DEI SOLIDI E DEI FLUIDI - COSMOGRAFIA

Ristampa della terza edizione.

Con 382 figure e numerosi esercizi e problemi

EDITRICE LIBRARIA ITALIANA — TORINO

1943 - XXI

PREFAZIONE

Conformemente al programma prefissatomi, di compilare libri di Fisica adatti specificatamente per ciascun ordine di Scuole medie, questo Corso elementare **di Fisica** *è destinato ai Licei scientifici.*

Perciò, pur conservando l'esposizione piana e scorrevole della materia, come negli Elementi di Fisica *per i Licei classici, e mantenendo quella forma particolare di esposizione che hanno reso i miei libri i più adottati nelle Scuole Medie, in questo* Corso Elementare di Fisica *sono state fatte quelle aggiunte e quegli ampliamenti di ciascun argomento, che il maggior numero di ore di insegnamento e la maggiore familiarità col calcolo, richiedevano per i Licei scientifici.*

Così, tra l'altro, in **Meccanica** *è stata completata la trattazione della* Composizione delle forze parallele, *razionalizzato lo Studio del* Centro di gravità, *meglio sviluppato e integrato lo svolgimento dei varî moti in* Dinamica *ed aggiunto il* Moto parabolico dei proiettili, *e specialmente un Capitolo sulla* Gravitazione. *Nella* Meccanica dei fluidi *è meglio stato trattato l'argomento del-l'*efflusso *di essi, ed aggiunto un cenno sul* motore a razzo. *In* **Termologia** *è stato completato lo studio della* Dilatazione, *specialmente dei gas, e della* Termodinamica. *In* **Acustica** *si è aggiunto un Capitolo sulla* Composizione dei moti vibratori; *in* **Ottica** *si è completata la* teoria delle lenti *con la trattazione elementare della* Teoria del diottro*; lo studio dell'***Elettrologia** *si è meglio uniformato alle moderne teorie elettroniche, e completato con una rapida ma sufficiente sintesi sulla* Costituzione della materia *e con un chiaro cenno sulle ultime applicazioni dell'elettricità; ecc., ecc. Il capitolo della* scarica nei gas rarefatti *ed il* cenno sulla costituzione della materia *li ho premessi in* Elettrostatica, *perchè ho creduto necessario che gli alunni abbiano al più presto possibile le nozioni sulla* Teoria elettronica, *indispensabili per la moderna interpretazione dei fenomeni elettrici.*

Ove si prestava l'argomento, non mancano sufficienti cenni sulle principali applicazioni della teoria, corredati da belle, nitide e chiare illustrazioni, di cui moltissime originali. Si è estesa la parte riguardante gli esercizî, con l'aggiunta di nuovi e numerosi problemi risoluti, *a miglior guida di quelli da risolvere proposti alla fine di ciascun Capitolo. Ed anche in questo* Corso *abbondano le notizie storiche sui Fisici di cui si parla nel testo.*

Naturalmente questo Corso di Fisica *è conforme agli ultimi programmi del 7 maggio 1936-XIV; perciò è stata fatta qualche semplificazione, in confronto*

all'edizione precedente; sono stati riportati anche in questo volume i cenni di Cosmografia, *che prima erano nel secondo.*

Desidero fare un'altra considerazione, rivolta specialmente agli egregi Colleghi, che avendo fatto delle matematiche pure il loro studio principale, vorrebbero ritrovare nella Fisica i concetti, il rigore, le definizioni ed il linguaggio della Matematica. Ora, ciò non è possibile nè conveniente; la Fisica ha concetti e definizioni proprie, adottate da secoli, spesso in contrasto con quelle della Matematica (ricordiamo, ad es., che il senso positivo delle rotazioni è in Fisica opposto a quello della Geometria, e che tutte le grandezze geometriche sono continue, mentre nessuna di quelle fisiche lo è); la Matematica ragiona su concetti astratti, la Fisica sù fatti concreti; alle figure geometriche la Fisica sostituisce modelli materiali, alle grandezze i numeri che le misurano. Il pretendere perciò che il linguaggio puro della Matematica si adatti alla Fisica è un assurdo. In Fisica il punto, *la* retta, *il* piano *ecc., della Geometria, non hanno significato; un filo sottile teso è una retta (e neanche un segmento), la faccia superiore di un tavolo è un piano. Le leggi della Fisica sono tutte approssimate; le misure delle grandezze fisiche sono tutte approssimate; i numeri che via via riportiamo sono tutti approssimati. In Fisica un numero irrazionale non ha significato;* $\sqrt{2}$ *è al massimo* 1,414214 *e non altrimenti, perchè l'approssimazione della misura di una grandezza fisica non sorpassa la sesta cifra decimale. Infine, la Fisica (elementare) è una scienza quasi esclusivamente intuitiva; i* principî *(postulati) sono ad ogni passo; perciò in questo studio bisogna lasciare un gran campo all'intuito e contentarsi spesso di* capire *che una proprietà sia vera, anche se non se ne dà una dimostrazione nè matematica nè sperimentale.*

Di tutto ciò desidero che i Colleghi tengan conto nel giudicare questo libro; e desidero che tengano conto del fatto, che lo studio della Fisica nelle Scuole Medie, quale carattere formativo della mente dei giovani allievi, non avrebbe scopo, se dovesse essere un duplicato della Matematica. Con tali criteri ci si convincerà facilmente, che alcune espressioni considerate in Matematica come errori, *in Fisica non lo sono, e* volutamente *sono state lasciate in questo libro. Gli egregi Colleghi allora apprezzeranno meglio la forma e la chiarezza di esposizione che sono le doti principali che hanno fatto la fortuna dei miei libri di Fisica, ed a cui ho sopratutto dedicato le mie cure. Osservo però che in questa nuova edizione ho cambiato parecchie espressioni vecchie della Fisica, per avvicinarmi a quelle matematiche, con la speranza che i Colleghi di* Fisica pura *non me ne serbino rancore.*

La veste tipografica è al solito, per volere dell'Editore, inappuntabile. La materia è stata suddivisa in tre volumi, uno per ciascuno degli anni in cui si svolge lo studio della Fisica.

Spero pertanto di non ingannarmi, auspicando al nuovo libro l'accoglienza fortunata delle altre mie pubblicazioni.

R. FEDERICO.

PROGRAMMA DI FISICA PER I LICEI SCIENTIFICI

(R. D. 7 MAGGIO 1936-XIV, N. 762)

II Classe. - Ore 2 settimanali.

Meccanica. — Moto di un punto; velocità e accelerazione come scalari e come vettori. Moto rettilineo uniforme e vario; moto circolare uniforme e moto oscillatorio.

Forza e sua misura statica. Equilibrio di due o più forze applicate ad un solido; centro di forze parallele. Equilibrio nei solidi con un punto o con un asse fisso. Macchine semplici; bilancia.

Principio d'inerzia. Proporzionalità tra forza ed accelerazione. Massa e peso. Misura dinamica delle forze; dine. Eguaglianza tra azione e reazione. Forza centrifuga.

Caduta dei gravi liberi e su di un piano inclinato. Moto dei proiettili. Pendolo.

Lavoro ed energia; energia di moto e di posizione. Potenza; unità relativa.

Attrito e resistenza del mezzo. Conservazione dell'energia.

Elasticità nei solidi.

Gravitazione universale: legge di Newton. Sistema solare. Leggi di Keplero.

Pressione nei fluidi. Principî di Pascal e d'Archimede. Vasi comunicanti. Pressione atmosferica. Pompe. Compressione degli aeriformi a temperatura costante.

Cenni sul moto di un solido immerso in un fluido; navi, dirigibili, velivoli.

Avvertenza. — Nell'impartire l'insegnamento si abbia cura di far conoscere gli argomenti sopra indicati, sia in loro stessi, sia nell'eventuale loro rapporto; ma sopratutto si chiariscano i concetti fondamentali che dominano la Fisica, come quelli di forza e massa, di lavoro ed energia, ecc.

Nello svolgimento del corso si cerchi, ogni volta che sia possibile, di mettere in evidenza le connessioni delle leggi fisiche coi fenomeni che più facilmente cadono sotto i sensi, e coi problemi che maggiormente interessano la scienza, la vita della Nazione e la sua efficienza bellica. Il docente metta anche nel dovuto rilievo le figure di quei sommi, particolarmente italiani, che hanno dato grande impulso al progresso della Fisica.

Gli alunni del Liceo scientifico, servendosi delle loro maggiori cognizioni matematiche, debbono acquistare una conoscenza più approfondita delle varie teorie e mettersi in grado di saper risolvere, con sufficiente prontezza, esercizi di semplice applicazione delle cose studiate, con particolare riguardo a quanto si riferisce alle unità di misura.

PARTE I.

MECCANICA

RICHIAMI E DEFINIZIONI

1. **Corpo - Natura - Materia.** — I nostri sensi ci dànno la percezione degli innumerevoli oggetti che ci circondano: sia direttamente, che indirettamente aiutandoli con strumenti opportuni. Così, per mezzo del microscopio apprendiamo l'esistenza dei microrganismi, e con l'aiuto del telescopio percepiamo gli astri lontanissimi, invisibili ad occhio nudo. Tutti questi oggetti chiamiamo *corpi*. Tali sono: un tavolo, una pianta, una pietra, il Sole, ecc. L'insieme di tutti i corpi costituisce la **Natura**.

Non possiamo pensare ad un corpo qualsiasi, senza immaginarlo costituito di qualche cosa atta ad agire sui nostri sensi; chiamiamo *materia* ciò che costituisce i corpi. Si chiama *sostanza* la qualità speciale di materia di cui è formato il corpo; così il ferro, il legno, l'acqua, ecc., sono sostanze diverse.

2. **Fenomeni - Fisica e chimica.** — Esaminando ciò che avviene attorno a noi, osserviamo numerosi fatti, nei quali si produce un cambiamento o nella posizione o nella forma o nella costituzione di un corpo. Chiamasi **fenomeno** *qualsiasi mutamento che avviene in un corpo*.

A questa parola non dobbiamo attribuire quel significato di straordinario che ha nel linguaggio comune; noi chiamiamo fenomeni, tanto il ronzio di una mosca come il rombo di un tuono, sia il cadere di un chicco di grano come la rovina di un terremoto.

Una pietra che cade, l'acqua che bolle, un pezzo di legno che brucia, sono altri esempi di fenomeni. Nei primi due casi, con la caduta della pietra o con l'ebollizione dell'acqua, *non vi è cambiamento della sostanza* di cui sono formati i due corpi; infatti il vapore che si solleva dall'acqua bollente raffreddandosi si condensa e riproduce nuovamente l'acqua; questi si chiamano *fenomeni fisici*.

Nell'ultimo esempio invece, il legno bruciando si carbonizza, s'incenerisce, si trasforma cioè in modo permanente e *varia sostanzialmente la materia* che costituisce il corpo: con la cenere ed il fumo ottenuto dalla combustione, non si rigenera più il pezzo di legno. Questo è un *fenomeno chimico*.

La Fisica studia i fenomeni fisici, la **Chimica** i fenomeni chimici. La Fisica e la Chimica si occupano adunque dei fenomeni naturali, ed è nel gran libro della Natura, che trovano gli argomenti per il loro studio.

Non vi è una distinzione netta fra le d[illegible] di un corpo, la ricerca della densità dei vapori, [illegible] però interessano assai la Chimica, e si studiano [illegible] in questa scienza. Viceversa, la scomposizione delle [illegible] elettricità, pur essendo un argomento chimico, si studia meglio nella Fisica; questo fenomeno veramente è oggetto di una nuova branca della scienza, che ha oggi acquistato una grande importanza, e si chiama *Elettro-chimica*.

Divideremo lo studio della Fisica in cinque parti: *Meccanica*, *Termologia*, *Acustica*, *Ottica*, *Elettrologia e magnetismo*:

3. Leggi del fenomeno - Formule. — Lo studio della Fisica ha per scopo la *conoscenza dei fenomeni*; cioè sapere come, quando, dove e perchè essi avvengono. Esso ha per fine di trovare quali sono le *leggi del fenomeno*; cioè **le relazioni costanti tra le quantità variabili del fenomeno.**

Ad es. si consideri il fenomeno della compressione di un gas; in esso varia il *volume* occupato dal gas, col variare della *pressione* (1) a cui esso è assoggettato. Volume e pressione sono adunque le quantità variabili di questo fenomeno, (supposto che non varî la temperatura).

Orbene, studiando come si comprimono i gas, si è trovato che in ogni caso, dovunque e comunque il gas si comprima: *a temperatura costante, i volumi di una data massa gassosa sono inversamente proporzionali alle pressioni a cui essa è assoggettata.* Questa relazione costante tra le quantità variabili volume e pressione, è appunto la *legge di Boyle*, (§ 229).

Le quantità si rappresentano solitamente con le lettere dell'alfabeto; una relazione tra tali quantità quindi è generalmente rappresentata da una *formula*. Così, chiamando V il volume di un gas, H la sua pressione, K un numero costante, la suddetta legge di Boyle si potrà esprimere con la formula:

$$V \cdot H = K.$$

Affinchè si comprenda meglio il nesso fra l'enunciato della legge e la formula corrispondente, ricordiamo sommariamente questi concetti della matematica:

Costante è una grandezza che mantiene sempre lo stesso valore.

Variabile è una grandezza che assume valori diversi.

Se i valori che assume una variabile x dipendono da quelli di altre variabili $y, z, ..$ si dice che *x è funzione di $y, z, ..$* e si scrive:

$$x = f(y, z, ..)$$

Es. Il *costo* L di una merce è funzione del suo *peso* P:

$$L = f(P)$$

Due quantità variabili x ed y si dicono *direttamente proporzionali*, se comunque essi varino, il loro rapporto si mantiene costante; cioè indicando con k una costante:

$$\frac{x}{y} = k \qquad \text{o anche:} \qquad x = k y$$

Es. Il *costo* L di una merce si ottiene moltiplicando il suo *peso* P per un numero costante k, che è il costo dell'unità di peso; costo e peso sono quindi direttamente proporzionali, e si scriverà:

$$L = k P.$$

(1) Osserviamo ora, e vale sempre in seguito, che in Fisica, praticamente, non facciamo distinzione tra *grandezza* e sua *misura*; cioè, ora, con la parola *pressione* intendiamo tanto la grandezza (che definiremo meglio nel § 198), quanto il numero che la misura.

Due quantità x ed y si dicono *inversamente proporzio*[illegible]
stante; cioè, indicando con k una costante

$$xy = k \qquad \text{o anche:} \qquad x \ [illegible]$$

Es. Se 12 operai compiono un dato lavoro in [illegible]
16 giorni, 3 operai in 32 giorni, ecc. In modo che:

$$12 \times 8 = 6 \times 16 = 3 \times 32 = \text{un numero costante.}$$

Il numero dei giorni t è allora inversamente proporzionale al numero degli operai n, e sarà:

$$n \cdot t = k \text{ (costante).}$$

Se una grandezza A è direttamente proporzionale alle grandezze x, y, z . . ed inversamente proporzionale alle grandezze u, v, w . ., indicando con k una costante, si scriverà:

$$A = k \frac{x\,y\,z\,..}{u\,v\,w\,..}$$

Finalmente se è ad es.:

$$A = k \frac{x^2}{u^3} \sqrt{\frac{y}{z}}$$

si dirà che la grandezza A è direttamente proporzionale *al quadrato* della grandezza x ed *alla radice quadrata di* y; ed è inversamente proporzionale *al cubo di* u *ed alla radice quadrata di* z.

È sopratutto l'enunciato delle leggi e l'espressione della formula relativa, che lo studioso deve ritenere a mente.

Questo stùdio non ha solo lo scopo di appagare il desiderio della nostra mente della conoscenza dei fenomeni naturali; ma permette di trarne molte applicazioni, utilissime per la vita pratica, per accrescere il nostro benessere e rendere più agevole e più comoda la nostra esistenza.

4. Tabelle numeriche. — Talvolta la relazione tra le diverse quantità del fenomeno è così complicata, da riuscire malagevole racchiuderla in una formula semplice. In questo caso è preferibile di esprimere le relazioni tra le variabili, per mezzo di *Tabelle*. Per ciò basta scrivere in colonna, da una parte i valori di una delle variabili, e notare accanto i valori corrispondenti dell'altra variabile.

Così ad es., la variazione del volume di un gas con la pressione (1), si può indicare con la seguente TABELLA:

Pressione in atmosfere	Volume in cm³	Pressione in atmosfere	Volume in cm³
0,5	800	3	133
1	400	4	100
1,5	267	5	80
2	200	6	67
2,5	160	8	50

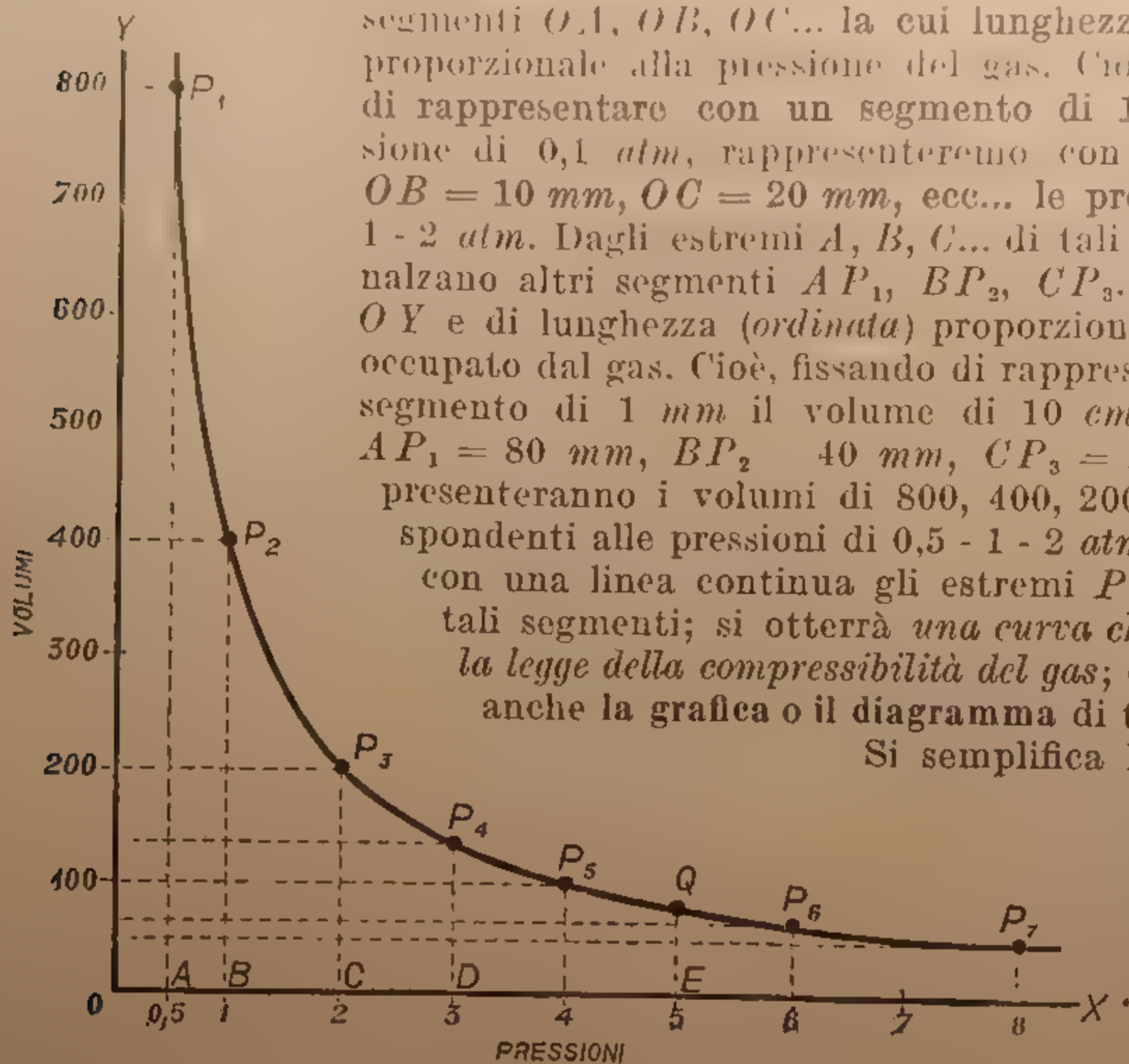
(1) Vedasi al § 198 *cos'è la pressione* e la sua unità: *atmosfera*.

5. Rappresentazione grafica. — È ancora più comoda la rappresentazione grafica della legge. I valori della Tabella prec[illegible]ono meglio rappresentare nel seguente modo:

Si prendono due semirette OY ed OX fra loro perpendicolari (*assi cartesiani*) chiamate *asse delle x* la prima, ed *asse delle y* la seconda (Fig. 1).

Sull'asse delle x, con origine in O, si prendono dei segmenti OA, OB, OC... la cui lunghezza (*ascissa*) sia proporzionale alla pressione del gas. Cioè, convenendo di rappresentare con un segmento di 1 *mm* la pressione di 0,1 *atm*, rappresenteremo con $OA = 5$ *mm*, $OB = 10$ *mm*, $OC = 20$ *mm*, ecc... le pressioni di 0,5 - 1 - 2 *atm*. Dagli estremi A, B, C... di tali segmenti, s'innalzano altri segmenti AP_1, BP_2, CP_3... paralleli ad OY e di lunghezza (*ordinata*) proporzionale al volume occupato dal gas. Cioè, fissando di rappresentare con un segmento di 1 *mm* il volume di 10 cm^3, i segmenti $AP_1 = 80$ *mm*, $BP_2 = 40$ *mm*, $CP_3 = 20$ *mm*... rappresenteranno i volumi di 800, 400, 200 cm^3..., corrispondenti alle pressioni di 0,5 - 1 - 2 *atm*. Si uniscano con una linea continua gli estremi P_1, P_2, P_3... di tali segmenti; si otterrà *una curva che rappresenta la legge della compressibilità del gas*; essa si chiama anche **la grafica o il diagramma** di tale fenomeno.

Fig. 1.

Si semplifica la costruzione della curva, facendo uso della *carta millimetrata*, che si trova in commercio. La medesima curva della Fig. 1, si vede così riportata in Fig. 2, senza bisogno d'altre spiegazioni.

L'utilità di tali curve si comprende nella così detta *interpolazione*. Si vuol sapere che volume occupa il gas alla pressione qualsiasi di 5 *atm*? Dal punto E tale che $OE = 50$ *mm*, s'innalza EQ parallela ad OY, sino ad incontrare in Q la curva descritta. La lunghezza $EQ = 8$ *mm* ci dà il valore del volume cercato, che è di 80 cm^3.

6. Osservazione - Esperienza. — Lo studio della Fisica è basato principalmente sull'*osservazione* e sull'*esperienza*.

Osservazione, *è l'esame accurato, attento del fenomeno*, per scoprire le condizioni in cui esso avviene, e le leggi che lo governano.

Ma l'osservazione dei fenomeni naturali spesso non è facile; sia perchè essi si producono raramente, sia perchè si presentano complessi o mascherati da altri fenomeni. È necessario in tal caso ricorrere all'esperienza, *che è la ripetizione dei fenomeni, nelle condizioni di tempo e di luogo da noi volute*, per rendere più agevole e più frequente l'osservazione di essi.

Ad es., per studiare come un corpo cade, no [illegible]
vare come cade una pietra da una roccia o una [illegible]
noi cadere, quante volte vorremo, un corpo oppo[illegible]
prefissato, e disporremo mezz[illegible]

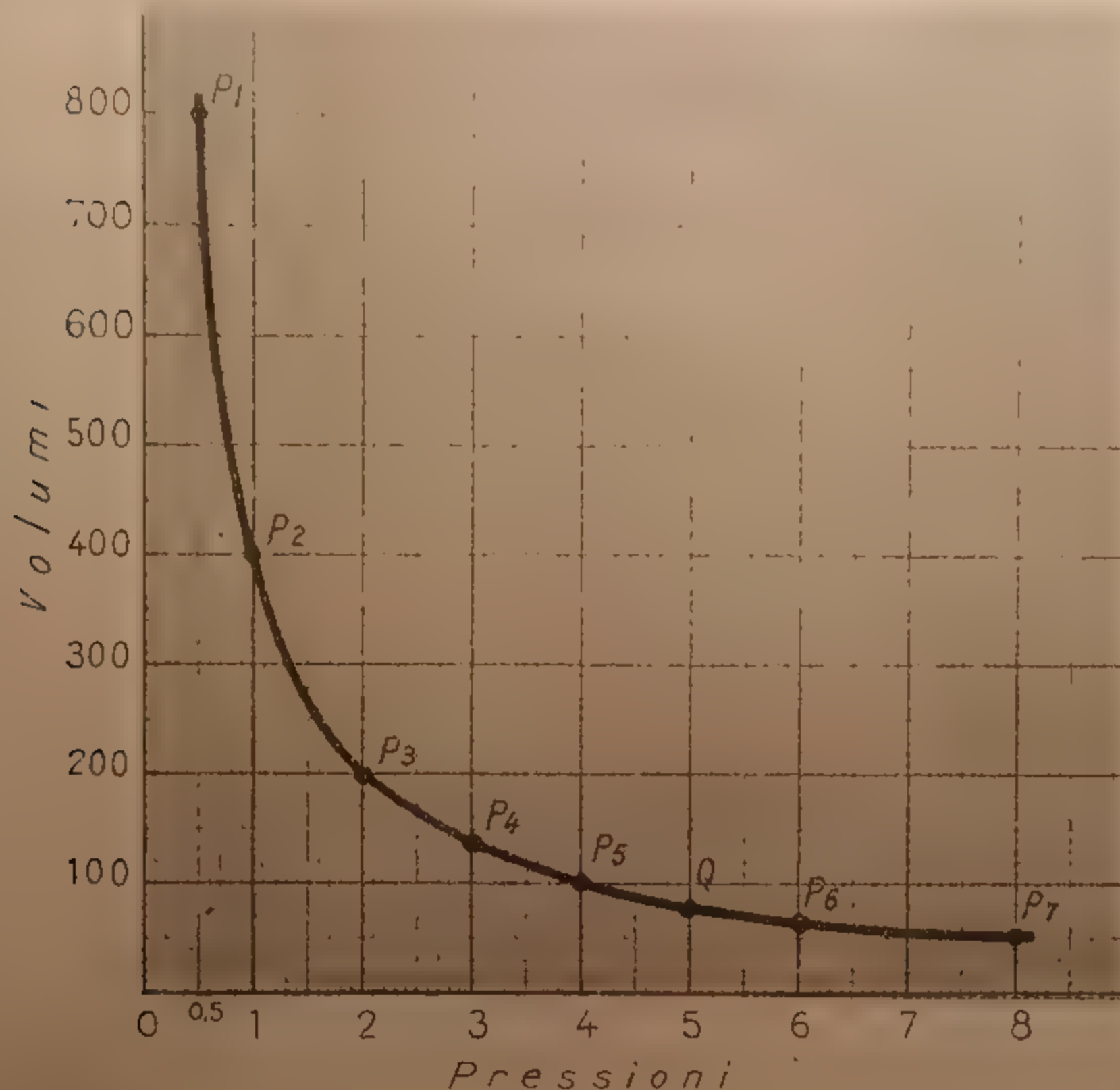



Fig. 2.

corpo nei varî tempi, contati con un orologio opportuno, dal momento in cui il corpo comincia a cadere. È ciò che costituisce l'*esperienza*; essa è il miglior mezzo di indagine nello studio della Fisica, la quale è diventata una scienza positiva solo da quando il Galilei introdusse il metodo sperimentale nello studio di essa.

7. Ipotesi - Teoria. — Non sempre è possibile scoprire la causa dei fenomeni. E poichè la nostra mente non si appaga di lasciare senza spiegazione i fatti che osserviamo, quando ci sfugge la vera causa di un fenomeno, facciamo una supposizione di ciò che essa può essere. Diciamo che:

Ipotesi *è una congettura per spiegare la causa dei fenomeni.*

Ad es., noi non sappiamo perchè un corpo cade. Il Newton suppose, e tutti oggi riteniamo, che tale caduta sia dovuta ad una forza d'attrazione che la Terra esercita sui corpi; i quali tutti quindi sono spinti verso il centro di essa. Questa è appunto un'ipotesi.

Perchè un'ipotesi sia accettabile, occorre che [illegible] solo spieghi tutti i fatti noti da essa dipendenti, ma [illegible] altri, che poi l'esperienza confermerà essere veri. Se ciò avviene, l'ipotesi acquista maggiore grado di probabilità, e forma una teoria.

Così, l'ipotesi dell'attrazione terrestre fa parte della *teoria della gravitazione*, la quale suppone che tutti i corpi nello spazio si attirino scambievolmente. Su questa teoria è basato tutto il moto dei corpi celesti. Essa non è stata trovata mai in difetto; e non solo permette di prevedere con esattezza i fenomeni naturali derivanti dal moto degli astri (posizione di questi, eclissi, ritorno delle comete, ecc....), ma ha permesso di scoprire, solo in virtù di calcolo, il pianeta Nettuno e recentemente il pianeta Vulcano. Onde essa è oggi una delle teorie fondamentali della scienza.

Ma non è detto che fondata una teoria, non possano sorgere in seguito fatti nuovi, compresi nel campo di essa, e che dovrebbero con questa spiegarsi; mentre essi risultano in contrasto con la teoria medesima. In tal caso occorre modificare la teoria, perchè comprenda i nuovi fenomeni scoperti, o abbatterla e sostituirla con altra che spieghi i vecchi ed i nuovi fatti.

Di esempi di teorie modificate o trasformate, ve ne sono parecchi, e vi sarà campo di parlarne in seguito. Accenniamo ora alla *teoria della luce*, così detta *dell'emissione*, sostenuta da Newton, che dovette cedere il campo alla *teoria delle ondulazioni*, fondata al principio del secolo scorso; la quale spiega bene i fenomeni dell'ottica fisica, che la prima non riusciva a spiegare. Così pure, in questi ultimi anni, per spiegare i fenomeni radioattivi (Vol. 3º - § 78), si è dovuto modificare la *teoria atomica* sulla costituzione della materia, che per tutto un secolo è sembrata una delle concezioni più sicure e più convincenti della Chimica.

8. Stati di aggregazione. — La materia, nei diversi corpi, ci si presenta sotto tre stati diversi: **solido, liquido, gassoso.**

Solidi sono quei corpi che hanno forma propria, che non cambia se non sotto sforzi considerevoli. Es. una pietra, un pezzo di ferro. Si chiama *rigidità* l'invariabilità della forma del corpo; caratteristica quindi dello stato solido è la rigidità.

Fig. 3.

Liquidi sono quei corpi che scorrono facilmente, come l'acqua. Essi richiedono un recipiente per contenerli, e non hanno forma propria; ma prendono la forma del recipiente in cui sono posti (Fig. 3); (a meno che non si riducano ad una goccia). *I liquidi hanno però un volume proprio*, che non cambia travasandoli da un recipiente ad un altro.

Gas o aeriformi sono quei corpi, come il vapore dell'acqua, l'aria, ecc., che non solo sono scorrevoli, ma *si espandono*. Quindi non solo richiedono un recipiente per contenerli, ma questo recipiente deve essere chiuso, ed il gas messovi anche in piccola quantità espandendosi lo riempie completamente.

Un gas cioè non ha volume proprio; ma acquista sempre *tutto* il volume del recipiente che lo contiene.

L'espansibilità dei gas si prova ponendo [illegible] *china pneumatica* [1] una vescica chiusa conte[illegible] (Fig. 4). Facendo il vuoto nella campana, la [illegible] l'aria che contiene si espande, quando non è più premuta dall'aria che la circonda.

Fig. 4. Fig. 5.

I liquidi ed i gas, con una parola sola, si chiamano fluidi, che vuol dire appunto scorrevoli.

Nessun liquido è perfettamente scorrevole. Vi sono cioè liquidi più o meno scorrevoli; ma tutti presentano una certa viscosità, che è molto grande nel miele, che è semifluido. Vi sono corpi che non sappiamo bene se chiamare solidi o liquidi. Vi è ad es. la pece, che può perfino ridursi in pezzi, proprietà evidentemente dello stato solido. Ma più pezzi di pece posti in un vaso, dopo qualche tempo si saldano insieme e formano una superficie unica, come quella di un liquido; e se il vaso ha una fenditura, compare all'esterno qualche *goccia* di pece.

Parimenti, nessun solido è perfettamente rigido. Tutti i corpi solidi possono ammaccarsi o schiacciarsi, cioè deformarsi. Una bacchetta di ceralacca sostenuta orizzontalmente solo alle estremità, col tempo si piega spontaneamente; un'asta diritta di vetro appoggiata obliquamente all'angolo di una stanza, dopo qualche anno si trova incurvata. Queste deformazioni indicano una certa scorrevolezza fra le particelle del solido, che è proprietà dello stato liquido.

La stessa sostanza può assumere, secondo le circostanze, uno o l'altro dei tre stati d'aggregazione. Così l'acqua può essere solida (ghiaccio), liquida, o gassosa (vapore d'acqua). Tutti i corpi solidi sono stati ridotti liquidi col riscaldamento, (tranne il carbone che non si è riusciti a fondere coi mezzi più potenti di riscaldamento che conosciamo); tutti i gas sono stati liquefatti ed anche solidificati. Scaldando un pezzo di legno non si riesce a renderlo liquido, perchè prima brucia e si trasforma in altre sostanze; esso cioè si disgrega prima di fondere.

Proprietà generali.

Vi sono proprietà che riscontriamo in tutti i corpi, qualunque sia il loro stato d'aggregazione; si chiamano perciò *proprietà generali.*

9. **Estensione** è la proprietà che ha ogni corpo di occupare una certa porzione dello spazio. In altre parole non esiste un corpo se non ha tre

(1) La macchina pneumatica serve per estrarre l'aria da un recipiente chiuso. Sarà descritta al § 246.

dimensioni: il punto geometrico, la retta, l'ombra di un oggetto, l'immagine nello specchio, non sono corpi e non hanno materia.

Fig. 6. Fig. 7.

Per misurare il volume di un liquido, si versa questo in un cilindro di vetro graduato (Fig. 6) e si legge sulla graduazione a qual punto arriva il livello del liquido. Nel caso della figura, il volume è di 150 cm^3.

Per misurare il volume di un solido, si mette un liquido (nel quale il solido non si sciolga) in un recipiente graduato, p. es. sino alla divisione 200 (cm^3). Indi vi si immerge il solido di cui si cerca il volume (Fig. 7); esso sposterà tanto liquido quanto è il suo volume. Se il liquido sale fino alla divisione 250, il volume cercato è la differenza: cm^3 (250 — 200) = 50 cm^3.

10. **Impenetrabilità** è la proprietà per la quale nello spazio occupato da un corpo, non può esservene contemporaneamente un altro. Così l'acqua non può entrare in una bottiglia se non scacciandone l'aria, di cui occupa il posto (Fig. 8), che esce gorgogliando da *A*.

Fig. 8.

Qualche volta può sembrare a prima vista che questa proprietà non sia soddisfatta; ma il ragionamento ci convince del contrario. Così in un secchio pieno di sabbia si può versare qualche bicchiere di acqua, e può sembrare che acqua e sabbia occupino lo stesso spazio. Ma ciò non è; l'acqua è contenuta nel secchio, perchè penetra negli interstizî vuoti fra un granello e l'altro della sabbia; quindi veramente dove c'è l'acqua non c'è la sabbia.

L'impenetrabilità pertanto deve ritenersi come proprietà delle particelle più piccole di cui sono costituiti i corpi.

11. **Inerzia** è la proprietà per la quale un corpo inanimato non può cambiare da sè il suo stato di quiete o di moto. Un corpo fermo non potrà mai mettersi in moto da sè, e ciò è evidente. Ma un corpo in moto non dovrebbe più fermarsi, se non vi fossero cause esterne (l'attrito o altre resistenze) che ne rallentano il moto. I corpi celesti, che movendosi nel vuoto non incontrano alcuna resistenza, conservano il loro moto perennemente appunto per l'inerzia.

Per inerzia un treno od un
istantaneamente; se il treno si ferma bru
in avanti, nel senso
corpo. Si pianta il
contro il suolo (Fig. 9); il martello si adatta fortemente nel manico, come se fosse battuto direttamente con un altro martello. Per inerzia si scaccia l'acqua da un cappello bagnato, scuotendolo (Fig. 10); col colpo dato al cappello, allorchè questo si arresta bruscamente, l'acqua prosegue ancora il suo moto e scappa via.

Fig. 9.

Non si può concepire un corpo senza estensione, impenetrabilità ed inerzia; onde queste sogliono meglio considerarsi come **proprietà essenziali della materia.**

Fig. 10.

12. **Divisibilità** è la proprietà dei corpi di suddividersi in parti più piccole. Un gessetto da lavagna può ridursi in polvere, cioè in gran numero di piccolissimi granelli. Esempio meraviglioso di grande divisibilità sono le sostanze coloranti e quelle odorose. Una goccia di anilina colora visibilmente parecchi litri di acqua, suddividendosi in minutissime parti, una per ogni punto dell'acqua, non visibili nè con l'occhio nè col più potente microscopio.

Un grammo di muschio spande il suo odore in un vasto ambiente per anni, senza diminuire sensibilmente di peso; cioè tanto sono piccole le innumerevoli particelle, che staccandosi dal muschio si diffondono e si rinnovano continuamente in tutta la stanza, da non formare tutte insieme un peso apprezzabile (1).

13. **Atomo - Molecola - Elettrone.** — Pensando che una particella, per quanto piccola, possa sempre dividersi in altre parti più piccole, dovremmo ammettere che la divisibilità non abbia limiti; dovremmo cioè ritenere la materia costituita da un aggregato continuo di particelle infinitesime, cioè di punti. Ma molti fatti della Fisica e della Chimica ci inducono a ritenere che la materia può suddividersi sino a particelle piccolissime ma finite, non più divisibili, che perciò si sono chiamati **atomi.**

Si ammette l'esistenza di 92 atomi uno diverso dall'altro (gli *elementi* chimici). Con la riunione di più atomi, eguali o diversi, si formano le **molecole**, che aggruppate in gran numero costituiscono gli innumerevoli corpi della Natura. I *corpi semplici* sono costituiti di molecole formate con atomi eguali; i *corpi composti* sono invece costituiti di molecole formate con atomi diversi.

Gli atomi e le molecole sono così piccole, che non si vedono e non si potranno mai vedere, coi più potenti microscopi; nulla possiamo quindi

(1) Secondo le ricerche di Berthelot un grammo di muschio perderebbe un millesimo del suo peso in 100 mila anni.

dire rispetto alla loro forma e dimensione [illegible]
via a ritenere le molecole così piccole che [illegible]
une dalle [illegible]
lioni[1] [illegible]
per vedere le molecole grosse come le ciliegie [illegible]

Accenneremo in seguito (Vol. 2° § 92) come si è potuto di fare con buona approssimazione, che il diametro di una molecola è di circa 3×10^{-8} *cm*; e che il numero di molecole contenute in una molecola grammo (§ 21) di sostanza è di circa $60{,}6 \times 10^{22}$. Quest'ultimo si chiama il **numero di Avogadro** (Vol. 2° § 91).

Lo studio di varî altri fatti, ci fa anche supporre che tutte queste ultime particelle dei corpi siano dotate di incessanti e rapidi movimenti, (§ 272).

Alcuni fenomeni scoperti negli ultimi anni, ci inducono a ritenere che anche gli atomi possano suddividersi; cioè gli atomi sono formati da aggregati di particelle, delle quali alcune di grandezza eguale a circa $^1/_{1850}$ dell'atomo dell'idrogeno, cariche di elettricità negativa, chiamate **elettroni** (Vol. 3° - § 67); ed inoltre altre piccolissime particelle (*positoni*, *protoni*, *neutroni*), come vedremo meglio in *Elettrologia*. Intenderemo perciò per *atomi* le ultime particelle, che non si dividono nei fenomeni chimici conosciuti; ossia le più piccole parti, tutte eguali, di una sostanza, che entrano **nelle combinazioni chimiche.**

Accenneremo nel 3° Volume quali sono le ipotesi odierne sulla costituzione della materia; ma riteniamo a mente fin d'ora l'ipotesi della sua **costituzione granulare**, di particelle piccolissime e distaccate (Vol. 2° - § 95).

La parte della Fisica che si occupa della costituzione dell'atomo e della sua scomposizione si chiama *Fisica nucleare*, ed ha preso un grandissimo sviluppo in questi ultimi anni.

14. Compressibilità è la proprietà dei corpi di diminuire di volume, se assoggettati a conveniente pressione.

Si comprimono i solidi, come lo dimostrano la coniazione delle monete e l'impronta che rimane nei piombini per imballaggio. Tale compressione è tuttavia piccolissima ed avviene solo per azione di forze considerevoli; una asticella di ferro di *cm* 10 di lunghezza si accorcia appena di 0,1 *mm*, se premuta alle estremità con la forza di 2000 *kg* per ogni cm^2 di sezione. Perciò si dice che i solidi sono praticamente incompressibili.

La compressibilità dei liquidi è pure piccolissima, e si dimostrerà in idrostatica, (§ 196). Anche i liquidi si ritengono praticamente incompressibili.

S

Fig. 11.

I gas invece si comprimono assai, come può dimostrarsi con **l'acciarino pneumatico**[2]. È questo formato da un robusto tubo di vetro, chiuso ad un'estremità, dentro cui scorre uno *stantuffo S* a tenuta, (Fig. 11).

(1) Si tratta di un numero enorme, che non afferriamo bene con la mente. Si pensi che dalla venuta di Cristo ad oggi sono passati solo circa 60 miliardi di minuti secondi, e che 30 quintilioni di secondi, formano più di 500 milioni di anni!...

(2) Si vedrà al § 89 del Vol. 2° la ragione di questo nome.

Tra lo stantuffo e l'estremità chiusa del tubo, è contenuta dell'aria. Premendo con la mano l'asta dello stantuffo, [illegible] chiusa nel tubo si comprime. Non [illegible] in qualche modo aria e uscita dal tubo [illegible] lo stantuffo ritorna indietro, spinto dall'aria compressa [illegible] nell'acciarino.

15. **Elasticità** è la proprietà che hanno i corpi deformati, di riprendere la forma ed il volume primitivo, allorchè cessa la causa che li deformava.

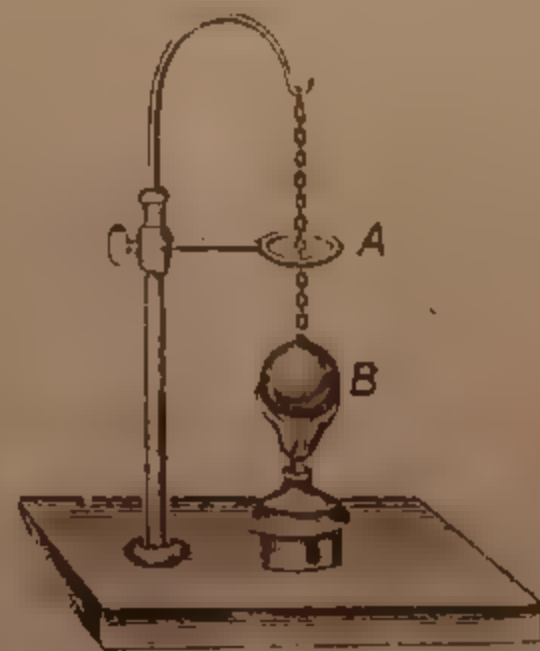
Per dimostrare l'elasticità dei solidi, basta pensare ad una molla di acciaio, che piegata poi si raddrizza da sè. Poggiando leggermente una palla d'avorio su un piano di marmo affumicato, essa si tinge appena in un punto, che è il punto di contatto tra la sfera e il piano; lasciandola invece cadere sul piano da qualche decimetro d'altezza, si trova poi la sfera tinta per un cerchietto di qualche millimetro di diametro. Ciò prova che per l'urto la sfera si è ammaccata; tuttavia noi non scorgiamo alcuna traccia dell'ammaccatura; cioè la sfera ha poi ripreso la sua forma primitiva.

L'elasticità dei liquidi si dimostrerà in idrostatica, (§ 196). L'elasticità dei gas si prova con l'acciarino pneumatico; lo stantuffo di questo ritorna indietro, allorchè cessa la pressione che lo aveva spinto innanzi.

I liquidi e i gas li riteniamo praticamente elastici in modo perfetto, non essendo possibile pensare che un fluido compresso possa rimanere tale anche cessando la compressione. I solidi invece sono più o meno elastici; ma nessuno in modo perfetto. Se la deformazione è grande può il solido rimanere deformato anche al cessare della causa deformatrice; così una molla d'acciaio troppo piegata, non si raddrizza poi del tutto. Ma non si devono ritenere più elastici i corpi che più si deformano; nella definizione dell'elasticità non abbiamo fatto alcuna ipotesi sull'entità della deformazione. Quindi dobbiamo ritenere il vetro più elastico dell'acciaio, poichè il vetro sebbene possa deformarsi assai meno dell'acciaio (senza rompersi), pure entro i limiti della deformazione non può rimanere poi deformato; come invece può avvenire per l'acciaio.

Fig. 12.

16. **Dilatabilità** è l'aumento che subisce il volume di un corpo col riscaldamento.

La dilatabilità dei solidi si prova con **l'anello di Gravesande** (1) (Fig. 12). Una sfera B di metallo passa appena attraverso un anello A, quando è fredda; non passa più se si riscalda. La dilatazione permane solo finchè il corpo è caldo; raffreddandosi esso ritorna al volume primitivo.

Per i liquidi, si prenda un palloncino P sormontato da un cannello di vetro lungo e sottile, graduato, (Fig. 13). Il palloncino e parte del cannello, sono ripieni di un liquido sino ad A. Ponendo il palloncino in un vaso con acqua calda, si vede il liquido dapprima scendere un po' da A a B,

(1) S. Gravesande; n. a Herzogenbusch nel 1688, m. a Leida nel 1742.

perchè si dilata prima il recipiente, [illegible] il liquido si dilata più del recipiente.

Per i gas si fa uso di un palloncino *A* pieno d'aria, [illegible] di vetro ricurvo, come è indicato nella Fig. 14; un liquido è contenuto nel gomito inferiore, fino in *B*. Basta scaldare il palloncino appena con le mani, per vedere il liquido nel cannello abbassarsi in *B* e salire nell'altro ramo fino in *C*; i gas quindi sono molto dilatabili.

Lo studio razionale della dilatazione dei corpi, sarà fatto in *Termologia*.

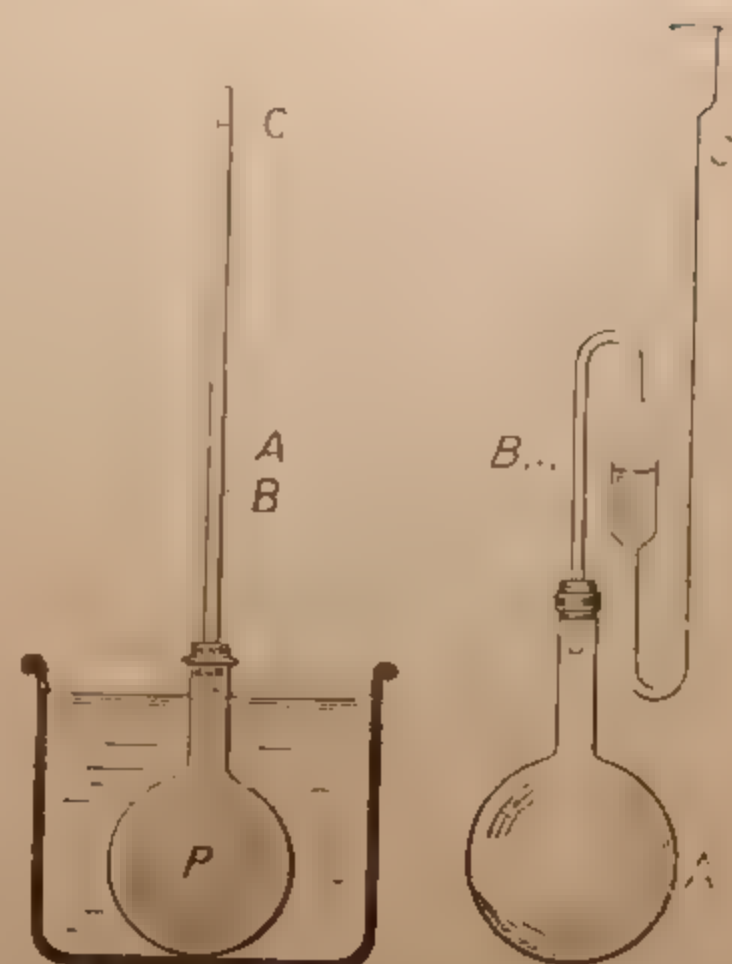
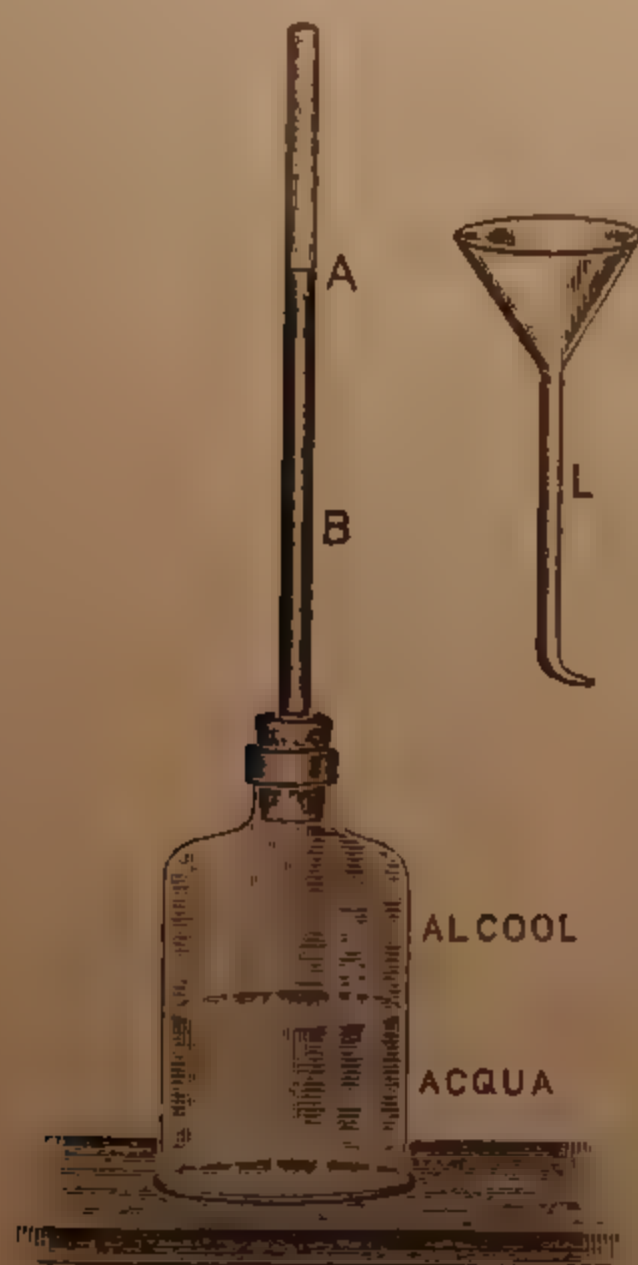
Fig. 13. Fig. 14.

17. Porosità. — Essendo le molecole indeformabili, per spiegare la variabilità di volume dei corpi, bisogna ammettere che le molecole non siano in contatto, ma ben distanti una dall'altra. Esistono dunque degli interstizî o spazi intermolecolari, chiamati anche *pori fisici*, che sono in tutti i corpi anche i più compatti, come il vetro, ed invisibili. La loro esistenza si può dimostrare con la seguente esperienza.

Una boccetta di vetro è chiusa da un tappo, attraversato a tenuta da un cannello di vetro, (Fig. 15). Si riempie la boccetta per metà di acqua; poi vi si versa sopra cautamente dell'alcool (colorato), servendosi di un imbutino *L* a lungo collo, piegato all'estremità ad angolo retto ed affilato, in modo che il liquido ne esca piano e lateralmente. Così l'alcool si adagia quietamente sull'acqua, con cui non si mescola; esso rimane in alto perchè più leggero. Si pone infine il cannello, e si fa arrivare l'alcool sino a un punto *A*.

Fig. 15.

Fig. 16.

Movendo ora alquanto la boccetta, i due liquidi si mescolano, e si vedrà il livello scendere da *A* in *B*. Il volume della mescolanza è dunque minore della somma dei volumi dei due liquidi. È avvenuta cioè una contrazione,

che è di circa il 3% del volume dei liqui[illegible]
una variazione di temperatura; infatti con la mescolanza si pr[illegible]
gero riscaldamento, e avrebbe dovuto se mai [illegible]
anzichè una contrazione.

Il fatto può spiegarsi solo ammettendo che le molecole [illegible] nate, o che alcune delle molecole siano andate ad occupare spazi intermolecolari fra le altre.

Non bisogna confondere i pori fisici coi *pori sensibili*, quali sono i pori del legno, del carbone, della carta, ecc., visibili anche ad occhio nudo. Si ricorre alla porosità della carta nella **filtrazione**, mediante la quale si chiarifica un liquido torbido. Un liquido è torbido allorchè contiene particelle solide non disciolte. Per renderlo limpido lo si versa cautamente (guidandolo con una bacchetta di vetro) in un imbuto (Fig. 16) in cui siasi posto un cartoccio di *carta da filtro* (cioè senza colla, come la carta assorbente); attraverso la carta non passano le particelle solide sospese nel liquido, che perciò restano sulla carta; mentre il liquido, limpido, scende goccia a goccia nel recipiente sottostante.

Filtrando l'acqua attraverso cilindri di porcellana porosa, si trattengono i microbi, che la inquinano; onde la filtrazione può adoperarsi per sterilizzare i liquidi.

I muri delle case sono porosi, e si lasciano attraversare dai gas; tanto che l'aria di una stanza si rinnova spontaneamente attraverso le pareti, all'incirca ad ogni ora, anche se tutte le finestre e le porte sono chiuse.

18. Gravitazione - Gravità. — Newton suppose che tutti i corpi nello spazio si attirino scambievolmente, con una forza che cresce con le dimensioni dei corpi, e diminuisce con la loro distanza [1]. Tale forza si chiama **gravitazione o attrazione universale**; essa governa il moto degli astri.

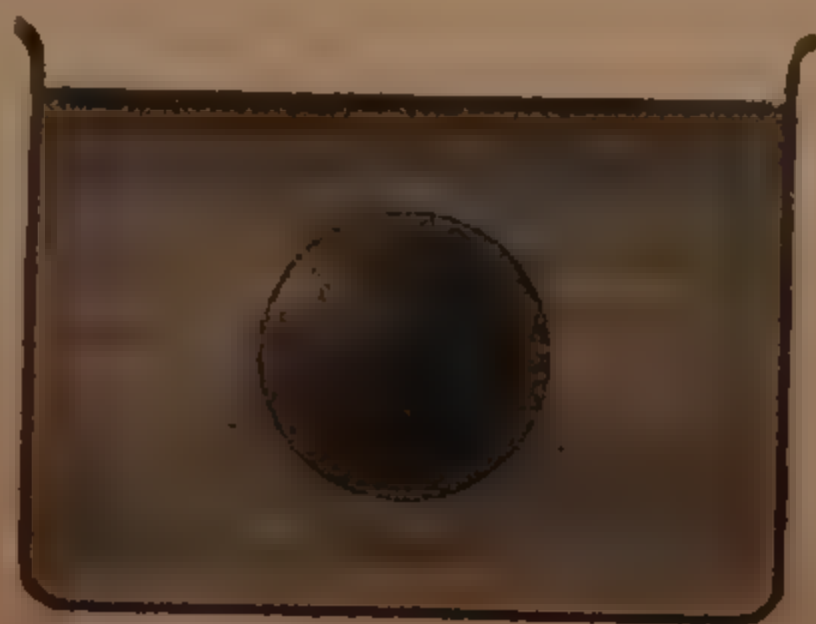
Il caso particolare della gravitazione, che si riferisce alla attrazione della Terra verso i corpi che le stanno vicini, si chiama la **gravità**; la forza con cui la Terra attira un corpo, è misurata dal peso di questo corpo.

Fig. 17.

19. Coesione - Adesione - Affinità. — L'attrazione si esercita anche tra i corpi piccolissimi, quali le molecole. Si chiama **coesione** l'attrazione tra le molecole di un medesimo corpo.

La coesione è grande nei corpi solidi e ciò può essere, sebbene le molecole siano piccolissime, perchè in compenso esse sono vicinissime. Per coesione un solido mantiene la sua forma, ed occorre uno sforzo rilevante per romperlo, cioè per vincere la coesione delle sue molecole.

La coesione è piccola, ma esiste, nei liquidi. Per convincersene basta pensare alla forma di goccia che essi assumono in piccole quantità; le gocce si formano appunto per l'attrazione delle molecole verso il centro.

---

1) Vedasi più esattamente al § 181.

Versando uno o due cm³ di olio in [illegible] mescolanza di acqua e di alcool in [illegible] nè vada a fondo, si vedrà l'olio raggrupparsi in forma di u[illegible] sferica (Fig. 17); perchè non essendo più soggetto a cadere, [illegible] alle sole forze di coesione.

La coesione esiste anche nei gas, [illegible] è dovuta ad un moto rapidissimo (centinaia di metri al secondo) delle molecole in tutti i sensi, e non ad una repulsione tra di esse.

Dicesi **adesione** l'attrazione che si esercita tra le molecole di corpi diversi. Le saldature, le colle, sono esempi noti di adesione. Passando al laminatoio una lamina d'oro e una di altro metallo, sovrapposte, esse aderiscono così fortemente come se fossero saldate; così si fabbricano gli oggetti placcati. Per adesione si scrive col gesso sulla lavagna, con la matita e con l'inchiostro sulla carta. Le pitture, le vernici, le tinture, ecc., sono altri esempi di adesione.

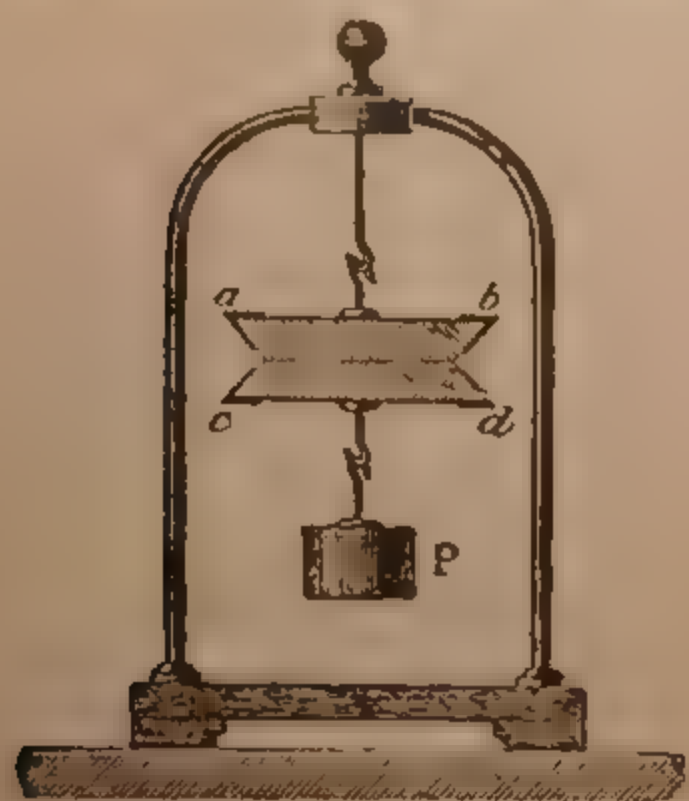



Fig. 18.

Un'esperienza da lezione è quella di prendere due dischi *ab* e *cd* di vetro, ben spianati e levigati; poniamoli uno sull'altro, bene in contatto (Fig. 18); vedremo che aderiscono così fortemente, da reggere un peso *P* senza staccarsi. L'aderenza persiste anche se mettiamo l'apparecchio sotto la campana della macchina pneumatica, cioè nel vuoto; essa quindi non è dovuta alla pressione atmosferica, (§ 220).

Per adesione una bacchetta di legno, immersa nell'acqua, si bagna; anzi in questo caso l'adesione tra acqua e legno, supera la coesione dell'acqua.

Il carbone assorbe fortemente alcuni gas, fornendo così un esempio di adesione tra un gas e un solido. Se si dirige un getto di idrogeno su un pezzetto di *spugna di platino* (che è platino estremamente suddiviso in polvere finissima), questo assorbe così intensamente l'idrogeno, da arroventarsi e comunicare l'accensione all'idrogeno. Su questo principio si costruirono: un secolo fa un *acciarino chimico*, e qualche anno addietro accenditori automatici del gas illuminante.

Per l'adesione, infine, vi è alla superficie di un solido uno straterello di aria molto più densa di quella circostante.

Affinità è l'attrazione che si esercita tra gli atomi; essa è la causa delle innumerevoli reazioni chimiche.

Senza l'affinità e la coesione, la Natura sarebbe ridotta agli elementi allo stato gassoso.

20. Proprietà particolari dei solidi. — La **durezza** è la proprietà che ha un corpo di intaccare, di scalfire, di rigarne un altro. La sostanza più dura è il diamante, che scalfisce tutti gli altri corpi, ma da nessuno è intaccato: tanto che per sfaccettare il diamante grezzo, bisogna lavorarlo con la sua stessa polvere. Col diamante si taglia il vetro, e si perforano le rocce più dure. Dopo, per durezza, viene il *corindone*, la cui polvere, detta *smeriglio*, intacca e pulisce i metalli. La *carta* e la *tela smerigliata* sono

appunto ricoperte di smeriglio più o meno [illegible] apposita colla.

La **malleabilità** è la proprietà dei metalli [illegible] corpo più malleabile è l'oro, che battuto fra due pezze di [illegible] fino allo spessore di 1/[illegible] di millimetro, un volume di 100000 pagine [illegible]rebbe grosso solo 1 *mm*!

La **duttilità** è la proprietà di ridursi in fili sottili. Il più duttile dei corpi è il platino; si sono fatti fili di platino del diametro di 1/[illegible] di *mm*, più sottili cioè di un filo di ragno!

Tenacità è la resistenza alla rottura. Il più tenace dei corpi è l'acciaio; un filo di acciaio di 1 *mm* di diametro può sorreggere fino ad 80 *kg*, prima di rompersi. Non è detto che la durezza si accompagni con la tenacità: il diamante, il corpo più duro, è fragile quanto il vetro.

Fragilità è appunto la proprietà opposta alla tenacità; di rompersi cioè facilmente, come il vetro.

Plasticità è la proprietà di alcuni corpi, come l'argilla, la cera, ecc., di lasciarsi foggiare facilmente in forme diverse.

Sono **refrattari** i corpi difficilmente fusibili al calore. Coi mattoni refrattari si rivestono le fornaci. Il più refrattario dei corpi è il carbone, che (come si è detto al § 8) non si è riusciti a fondere alle più alte temperature che possiamo produrre, (4000° C).

Col carbone (cioè con la *grafite* che è uno stato particolare del carbone), si costruiscono i *crogiuoli* che resistono alle altissime temperature.

Cenno sui sistemi di misure.

21. **Misura delle grandezze fisiche.** — Ricordiamo dalla matematica che **misurare** una grandezza vuol dire determinarne il *rapporto* con un'altra grandezza della stessa specie, che si prende come *unità di misura*; questo rapporto è **un numero** (1) che esprime la *misura* della grandezza data. Così, se un filo teso contiene 7 volte l'unità *metro*, si dirà che la lunghezza di quel filo è di *m* 7.

Tutte le unità di misura delle varie grandezze, potrebbero scegliersi ad arbitrio; ma è preferibile scegliere arbitrariamente solo il minor numero possibile di unità, che si chiamano le **fondamentali**, e derivare da queste le altre, che perciò si chiamano **derivate**.

Si possono stabilire quanti **sistemi di misure** si vuole, differenti tra loro per la scelta delle unità fondamentali e per la scelta delle formule di derivazione delle unità derivate. Ma ad evitare confusione per le differenze che si avevano anticamente fra un popolo e un altro, la Francia alla fine del secolo XVIII divulgò il *sistema metrico decimale*, generalmente oggi adottato in quasi tutto il mondo. Meglio la Scienza ha adottato un sistema detto **assoluto**, o *sistema centimetro - grammo - secondo*, che si indica con la sigla [C. G. S.] (2). Nel sistema assoluto le unità fondamentali sono:

---

(1) In Matematica è un *numero reale* (intero, frazionario, o irrazionale); ma in Fisica, poichè tutte le misure si fanno solo con approssimazione, è sempre un *numero razionale*.

(2) I nomi centimetro - grammo - secondo, sono quelli delle tre unità fondamentali del sistema; le lettere della sigla, sono le iniziali di questi tre nomi. Il sistema assoluto è stato stabilito in un Congresso tenutosi a Parigi nel 1881.

Il centimetro (*cm*) è l'unità di lu[illegible] *parte della lunghezza alla temperatura di 0° C, di un regolo campione* [illegible] *platino-iridio* (*il* metro), *che si conserva negli Archivi di Parigi.*

Il *metro* venne originariamente definito come la quarantamilionesima parte del meridiano terrestre; in base a misure eseguite da Delambre e Mechain, dal 1793 al 1799, su un arco di meridiano che passa per Dunkerque, il Borda[1] preparò nel 1799 il regolo-campione di platino (Fig. 19), che riproduce tale lunghezza fra due lineette tracciate vicino alle estremità, e che fu depositato negli Archivi di Parigi. Ma da misure più accurate eseguite successivamente, è risultato che tale campione non corrisponde esattamente alla frazione detta di meridiano. Onde bisogna definire il metro: la lunghezza a 0° C. del regolo-campione di Parigi.

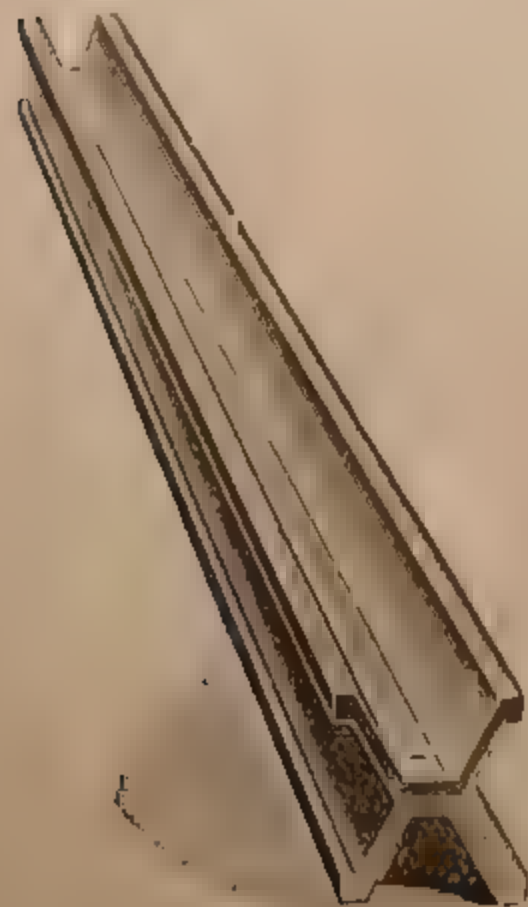



Fig. 19.

Sono noti i multipli ed i sottomultipli del metro; in Fisica si adopera tra i sottomultipli il *micron*, equivalente ad un millesimo di millimetro, che si indica con la lettera μ:

$$1\ \mu = m\ 0{,}000\,001.$$

Fig. 20.

Fig. 21.

Per le lunghezze piccolissime, quali vedremo in *Ottica*, e per le distanze intermolecolari, si usa l'*angstrom* ($\mathring{A}$) equivalente a un decimilionesimo di millimetro:

$$1\ \mathring{A} = cm\ 10^{-8}.$$

Per la misura delle frazioni di millimetro, si usa il *nonio*. Esso è un piccolo regolo CD (Fig. 20), che scorre sul regolo graduato AB col quale si fanno le misure; per misurare $1/n$ di divisione, si prende sul nonio una lunghezza CD eguale ad $n-1$ divisioni del regolo, e si divide in n parti. Così, per misurare i decimi di millimetro, si prenderà $CD = 9\ mm$ e si dividerà in 10 parti. Ciò posto, per misurare una lunghezza EC (Fig. 21) si porta l'estremo E in coincidenza con lo zero A del regolo graduato; l'altro estremo C cada ad es. fra le divisioni 13 e 14; la lunghezza EC sarà allora di mm 13 più una frazione da determinare. Si fa scorrere il nonio CD finchè l'estremo C tocca l'altro estremo della lunghezza da misurare; si osservi quale divisione del nonio coincide con una del regolo; se, come è in Fig. 21, coincide la 3ª divisione, la frazione da aggiungere è di 0,3 mm; cioè:

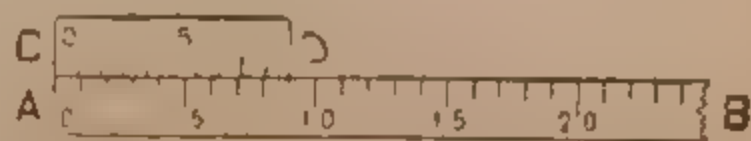
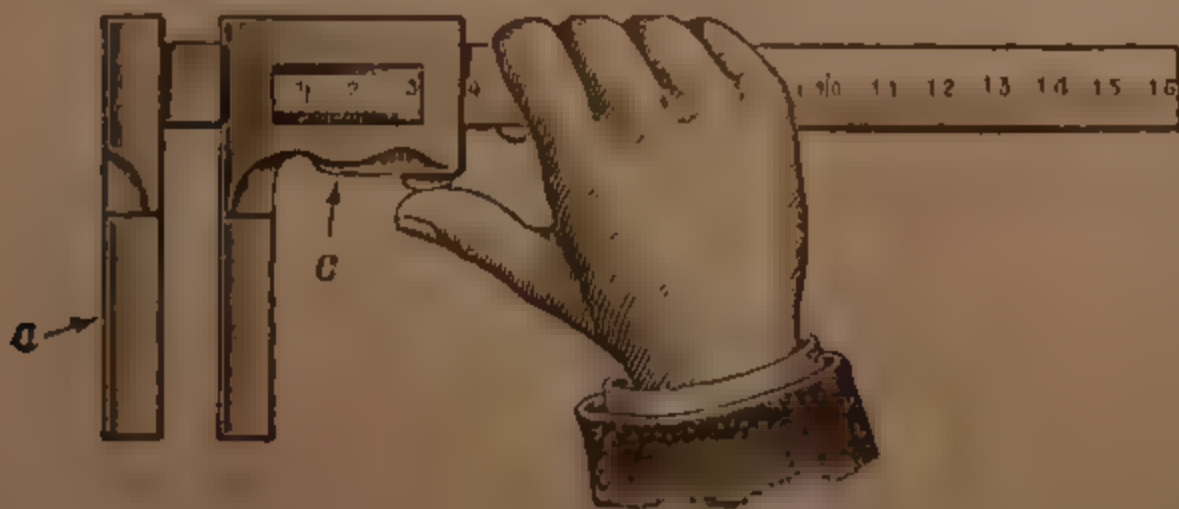



Fig. 22.

$$EC = mm\ 13{,}3.$$

(1) Giovanni Carlo Borda; n. a Dax (Guascogna) nel 1733, m. a Parigi nel 1799.

Se coincidesse la 6ª [illegible]

La Fig. 22 mostra l'applicazio[illegible]
dai meccanici.

Per le lunghezze enormemente grandi, quali le distanze tra [illegible], si adopera l'*anno-luce* o luxan, equivalente alla distanza percorsa dalla luce in un anno:

1 *anno-luce* = *km* 9460 miliardi (circa).

Il grammo (g) è l'unità di massa, § 102; esso *è la millesima parte della massa di un campione di platino (il chilogrammo) che si conserva anch'esso negli Archivi di Parigi.*

Il chilogrammo venne originariamente definito come il peso[1] (nel vuoto e a Parigi, § 240) di 1 dm^3 (1 litro) di acqua distillata, alla temperatura di 4° C. In base a misure eseguite il Borda costruì un cilindro di platino (Fig. 23) che fu depositato anch'esso negli Archivi di Parigi. Ma da misure più accurate eseguite in seguito, è risultato che tale campione non corrisponde esattamente al peso di 1 dm³ di acqua. Onde bisogna definire il chilogrammo: il peso, nel vuoto, del campione di platino degli Archivi di Parigi.

Si chiama **grammo-molecola** o *molecola-grammo* di una sostanza, il peso di tanti grammi di questa quante sono le unità del suo peso molecolare. Così, un grammo-molecola di acqua equivale a g 18.

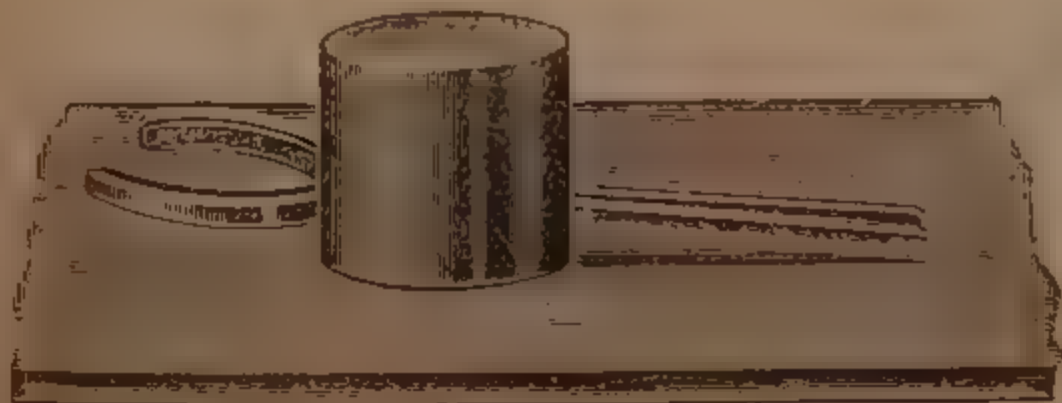



Fig. 23.

Fig. 24.

Il secondo (s) è l'unità di intervallo di tempo; esso *è la 86400ª parte del giorno solare medio*, § 172.

Per la misura della durata di un fenomeno (sino all'approssimazione di $^1/_5$ di secondo), si adoperano i *contasecondi*; sono orologi in cui il quadrante è diviso in secondi (da 0 a 60) e in quinti di secondo (Fig. 24), e su di esso gira l'indice dei secondi. Premendo una prima volta il bottone superiore dell'orologio, l'indice si mette in movimento partendo dallo zero; premendo una seconda volta, l'indice si arresta; premendo una terza volta l'indice ritorna di colpo allo zero. Il piccolo quadrante superiore segna i minuti.

---

(1) Si veda meglio al § 102 la differenza tra massa e peso di un corpo, e la loro relazione.

22. Unità pratiche. — Spesso le unità assolute sono o troppo grandi o troppo piccole, e non si prestano agli usi della pratica. Si assumono allora *unità pratiche*, che sono multipli o summultipli delle assolute. Così sono unità pratiche:

di lunghezza il metro (m), equivalente a 100 cm. Per le misure marine si adopera il *miglio* o *nodo*, che è la lunghezza dell'arco di meridiano il cui angolo al centro ha l'ampiezza di un *primo*: un nodo = m 1852;

di massa il chilogrammo (kg), equivalente a 1000 g;

*di tempo l'*ora equivalente a 3600 *secondi.*

Definiremo in seguito via via, le altre unità derivate della Fisica. Ora ci limitiamo a definire solo:

l'unità di superficie è il **centimetro quadrato** (cm^2); cioè un quadrato di 1 cm di lato.

l'unità di volume è il **centimetro cubo** (cm^3): cioè un cubo di 1 cm di lato.

Le unità derivate dal metro e dal grammo formano il *sistema metrico decimale*, adottato in tutto il mondo (tranne in Inghilterra, e nei paesi ove si parla l'inglese).

ESERCIZI

1. Rappresentare graficamente, con la carta millimetrata, le seguenti funzioni, per valori di x compresi fra 0 e 100:

$$y = x \; ; \qquad y = 15x \; ; \qquad y = \frac{x^2}{80} \; ; \qquad y = 12\sqrt{x} \; ; \qquad y = x - 3\sqrt{x} + 5 .$$

2. Con che forza la Terra attira 2,5 litri d'acqua?

3. Calcolare il peso massimo che può sorreggere, senza rompersi, una bacchetta cilindrica di acciaio, del diametro di mm 4, (§ 20).

4. Sapendo che il quarto del meridiano, secondo le misure di Clarke, è di m 10 001 869, calcolare la differenza tra il metro campione e la 40 milionesima parte del meridiano.

5. Calcolare il peso di 1 grammo-molecola di acido solforico e di cloruro di sodio; g 638 di solfato di rame, a quanti grammi-molecola corrispondono?

6. Quanti secondi sono contenuti in 15 ore; quanti minuti in una settimana; quante ore in un anno?

7. Quanti grammi pesano 5,7 litri di acqua; quanti litri sono in 4,2 quintali d'acqua?

8. Calcolare in unità assolute:

a) L'area di un trapezio le cui basi siano lunghe m 3,40 e dm 46,2 e l'altezza sia di cm 48.

b) Il peso (massa) dell'acqua contenuta in un recipiente cilindrico, il cui diametro è di dm 2,5 e l'altezza di m 0,25.

MECCANICA DEI SOLIDI

CINEMATICA

23. **Meccanica - Cinematica.** — La meccanica *è la scienza del moto.* Essendo diverse le condizioni in cui si muove un solido da quelle dei fluidi, occorre separarne lo studio. Ora ci occuperemo solo dei solidi.

La meccanica si divide in tre parti: *cinematica, statica, dinamica.*

La **cinematica** *studia il moto dei corpi, indipendentemente dalle cause che lo producono o lo modificano.*

Per semplificare il nostro studio, considereremo il moto di un corpo ridotto alle più piccole dimensioni; cioè:

Punto materiale *è una particella piccolissima, ma finita*; ad es., una molecola. Evidentemente non possiamo considerare il moto di un punto geometrico, perchè esso non esiste quale corpo.

Un punto si dice in **quiete** *se occupa costantemente la stessa posizione nello spazio.* La *quiete* è *assoluta* se la posizione del punto è riferita allo spazio assoluto; è *relativa* se la posizione del punto è riferita ad altri punti considerati come fissi, ma che in realtà si muovono. In natura non vi è alcun punto in quiete assoluta. Un oggetto fermo sul tavolo, è in quiete relativa al tavolo; mentre realmente nello spazio esso partecipa del triplo movimento della Terra, che lo trascina seco.

Un punto si dice in **moto** *se non è in quiete;* cioè se in tempi successivi occupa diverse posizioni nello spazio. Anche il moto è *assoluto* o *relativo*; noi non possiamo studiare che moti relativi, riferendo cioè la posizione del punto mobile ad altri punti considerati come fissi, ma che non lo sono. Così potremo studiare il moto di una palla sul biliardo, riferendo la posizione di essa alle sponde supposte fisse; ma in realtà, per il moto della Terra, la palla si muove nello spazio in modo assai diverso e più complicato di quello che ci appare.

Traiettoria *è la linea (continua) descritta dal punto nel suo movimento.* Essa è necessariamente continua, perchè il punto non può passare da una posizione ad un'altra, senza passare per tutti i punti intermedi. Il moto si dice *rettilineo* o *curvilineo* a secondo che la traiettoria è una retta o una linea curva. Si distinguono diversi moti curvilinei: *circolare*, *ellittico*, *parabolico*, ecc.

Direzione del moto in un punto qualunque della traiettoria, *se il moto è rettilineo, è la traiettoria medesima,* ed è costante in ogni punto della traiettoria; *se il moto è curvilineo, è la tangente alla traiettoria in quel punto,* e varia da punto a punto (Fig. 25).

Spazio descritto da un punto in un dato [illegible] *dell'arco della traiettoria* percorsa da quel punto in que[illegible] contare il tempo a partire da un punto di partenza [illegible] O, [illegible] *origine del moto*; dal medesimo punto si computa lo spazio percorso. Così, se il

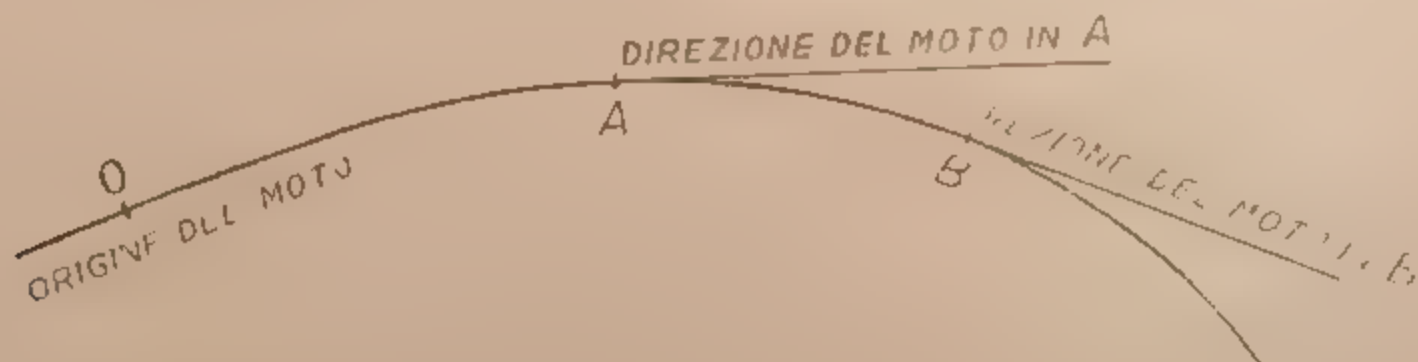



Fig. 25.

punto partendo da O arriva in A dopo 5 secondi, la lunghezza dell'arco OA sarà lo spazio descritto dal punto in 5^s.

Unità assoluta di spazio è il *centimetro* (*cm*); **unità pratica** è il *metro* (*m*) o il *chilometro* (*km*).

Legge del moto. Nel fenomeno del moto possono variare parecchi elementi; ma qualunque sia il moto, dovranno variare almeno il tempo decorrente a partire dall'origine, e lo spazio percorso in detto tempo. *La relazione costante tra lo spazio e il tempo impiegato a percorrerlo*, si chiamerà **la legge del moto.**

Lo studio di un dato moto ha per scopo di trovare la forma della traiettoria e la legge del moto. Quest'ultima adunque ci dà lo spazio in funzione del tempo:

$$s = f(t) \tag{1}$$

e si chiama anche l'**equazione del movimento.**

Moto uniforme.

24. **Moto uniforme** *è quello di un punto, che percorre spazi uguali in tempi uguali (comunque piccoli).* Perchè un moto sia uniforme, non basta che un punto percorra ad es. *cm* 50 al secondo; ma deve percorrere *cm* 5 ogni decimo di secondo, *cm* 0,5 ogni centesimo di secondo, ecc.

Un cane che corra, può benissimo percorrere ad es. *m* 200 ad ogni minuto; ma non si muove con moto uniforme, perchè procede a salti, e suddividendo l'intervallo di ciascun salto in tratti eguali, questi non sono percorsi in tempi eguali. Parimenti, il moto delle lancette dell'orologio non è uniforme, perchè dipende dal moto della ruota di scappamento, che procede a scatti.

Velocità *è lo spazio descritto nell'unità di tempo.* Per la definizione precedente essa *è costante;* **la caratteristica del moto uniforme è adunque che la velocità è costante;** due moti uniformi diversi differiscono o per la direzione o per il valore della velocità.

L'unità assoluta di velocità è quella di un corpo che percorre 1 *cm* al secondo. *Unità pratiche* sono: 1 *m* al secondo, o 1 *km* all'ora.

Riportiamo i valori delle maggiori velocità ra[illegible]
propri mezzi, sia con l'aiuto di macchine:

	km. all'ora:	m. al sec.:	prima[illegible]
Nuoto . .	6,20	[illegible]	Weissmuller (americano)
Corsa	35,3	9,8	Tolan (americano)
Pattini . .	42,05	11,68	Thumberg (finlandese)
Bicicletta . . .	58,82	16,3	Linari (italiano)
Sci	136,3	37,9	Gasperl (austriaco)
Motoscafo . . .	228,1	63,3	Campbell (inglese)
Motociclo . . .	280	77,8	Henne (tedesco)
Automobile . .	511,2	142	Eyston (inglese)
Aeroplano . .	709,2 =	197	Agello (italiano

La massima velocità esistente in natura, è quella della luce, che è di 300 000 *km* al secondo.

25. **Legge del moto uniforme.** — Lo spazio descritto in un certo numero di secondi, si ottiene evidentemente moltiplicando questo numero per lo spazio descritto in un secondo, cioè per la velocità. Se quindi si indica con s lo spazio percorso nel tempo t e con v la velocità (1), si avrà:

1) $$s = v\,t$$

Questa è la relazione costante tra le variabili spazio e tempo, ossia (§ 23) è *la legge del moto uniforme*. Essendo v costante, la 1) indica la proporzionalità tra le variabili s e t, (§ 3); quindi questa legge può enunciarsi così:

Gli spazi percorsi sono proporzionali ai tempi impiegati a percorrerli.

Dalla 1) si ricavano algebricamente le altre:

2) $$v = \frac{s}{t}$$ e 3) $$t = \frac{s}{v}.$$

(1) Ora e in seguito, in Fisica, con la stessa parola intendiamo tanto *una grandezza* quanto la *sua misura*, (Vedi nota a pag. 22).

La 2) ci dice che per trovare il valore della velocità, basta dividere lo spazio percorso in un tempo qualsiasi, per il tempo impiegato a percorrerlo.

Esempi. *Un treno (supposto si muova con moto un*[illegible] *Milano in 3 ore, con la velocità di* km *50 l'ora.* La distanza [illegible]

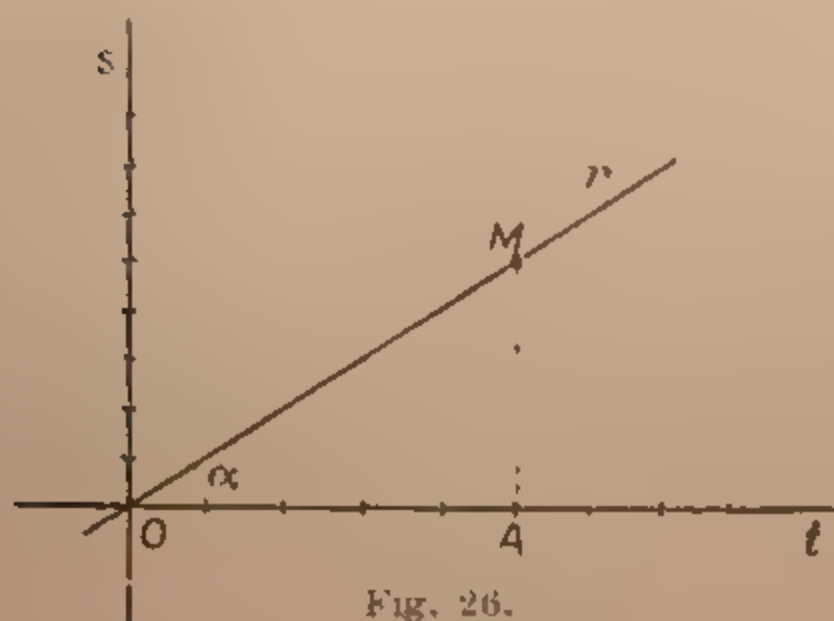
$$s = \text{km} (50 \times 3) = \text{km } 150$$

Fig. 26.

Un treno percorre i 150 km *da Torino a Milano in 3 ore;* la sua velocità per la 2) è:

$$v = \text{km} \frac{150}{3} = 50 \text{ km l'ora.}$$

Un treno percorre i 150 km *da Torino a Milano, con la velocità di 50* km *l'ora;* esso impiega per la 3):

$$t = \text{ore} \frac{150}{50} = 3 \text{ ore.}$$

Se rappresentiamo graficamente la 1), prendendo come ascisse i valori di t e come ordinate i valori corrispondenti di s, otteniamo come *diagramma degli spazi* una retta r passante per l'origine O (Fig. 26), più o meno inclinata rispetto all'asse delle ascisse, secondo il valore della velocità v. Per la 2) questa è rappresentata dal rapporto $(MA):(OA)$ [1], tra la ordinata e l'ascissa di un punto M qualunque della r. Si vedrà in Trigonometria, che tale rapporto è anche uguale alla *tangente* [2] dell'angolo α, che la retta r fa con l'asse delle x; cioè:

$$4) \qquad v = \text{tang } \alpha.$$

26. Problemi sul moto uniforme.

a) Problemi risoluti.

1. *Due punti mobili* M_1 *ed* M_2 *partono contemporaneamente da un punto* O *di una retta, e procedono nel medesimo verso:* M_1 *con velocità* v_1 *ed* M_2 *con velocità* v_2 *(sia* $v_2 > v_1$*); dopo un tempo* t, M_1 *è giunto in un punto* A *ed* M_2 *in un punto* B; *calcolare:*
a) *la distanza* (A B); b) *dopo quanto tempo* M_1 *giungerà in* B.

Risoluzione: — Dopo t secondi, gli spazi percorsi rispettivamente dai due mobili sono: $(OA) = v_1 t$; $(OB) = v_2 t$. Quindi la distanza AB sarà:

$$(AB) = (OB) - (OA) = (v_2 - v_1)\, t.$$

---

(1) Ora e in seguito, con le parentesi, intendiamo *la misura* della grandezza in esse racchiusa. Così, ad es., se AB è un segmento, (AB) è la sua lunghezza, e con *segmento a*, intendiamo il *segmento di lunghezza a*. In tal modo le relazioni espresse tra le varie grandezze, si intendono anche relative alle loro misure, e diventano *relazioni tra numeri*.

(2) Introduciamo fin d'ora queste nozioni di trigonometria, come nel § 27 le nozioni di limite e di derivata, quantunque l'allievo le studierà in seguito, perchè dovrà poi conoscerle all'esame di maturità. L'allievo sorvolerà adesso su questi concetti, che poi tornerà a rivedere e a comprendere meglio, allorchè ripasserà la materia per l'esame di maturità.

Il mobile M_1, per la 3), percorrerà lo [illegible]

$$\tau = \frac{(AB)}{v_1} \quad [illegible] \quad {}^{\tau}{}_1$$

quindi M_1 arriverà in B dopo il tempo t_1 (contato da O):

$$t_1 = t + \tau \quad \left(1 + \frac{v_2}{v_1}\right) t \quad [illegible] \quad \frac{[illegible]}{v_1}\, t$$

2. *Due corrieri furono spediti da un paese ad un altro, che dista dal primo km 84. Il primo corriere, percorrendo ogni ora un km più del secondo, giunse due ore prima. **Quali erano le velocità dei due corrieri?***

Risoluzione. — Siano v_1 e v_2 le velocità dei due corrieri, e per ipotesi: $v_1 - v_2 = 1$.

I tempi impiegati dai due corrieri per percorrere la distanza di *km* 84 tra i due paesi, sono rispettivamente per la 3), (si suppongono i due moti uniformi):

$$t_1 = \frac{84}{v_1} \qquad\qquad t_2 = \frac{84}{v_2}$$

Per ipotesi è: $t_2 - t_1 = 2$; sostituendo i valori precedenti:

$$84\left(\frac{1}{v_2} - \frac{1}{v_1}\right) = 2 \qquad \text{da cui:} \qquad \frac{1}{v_2} - \frac{1}{v_1} = \frac{1}{42}$$

Avremo allora, rispetto alle due incognite v_1 e v_2, un sistema di 2° grado, che si può trasformare successivamente nel seguente modo:

$$\begin{cases} v_1 - v_2 = 1 \\ \dfrac{1}{v_2} - \dfrac{1}{v_1} = \dfrac{1}{42} \end{cases} \qquad \begin{cases} v_1 - v_2 = 1 \\ \dfrac{v_1 - v_2}{v_1 v_2} = \dfrac{1}{42} \end{cases} \qquad \begin{cases} v_1 - v_2 = 1 \\ \dfrac{1}{v_1 v_2} = \dfrac{1}{42} \end{cases} \qquad \begin{cases} v_1 - v_2 = 1 \\ v_1 v_2 = 42 \end{cases}$$

La risolvente dell'ultimo sistema (rispetto alle incognite v_1 e $-v_2$) è:

$$z^2 - z - 42 = 0\,;$$

che ammette due radici reali e distinte, essendo il 3° coefficiente negativo. Risolvendo si ottiene:

$$z = \frac{1 \pm 13}{2}\,; \qquad \text{cioè:} \qquad z_1 = 7 \qquad \text{e} \qquad z_2 = -6\,;$$

quindi si hanno le due soluzioni (in *km* all'ora):

$$\begin{cases} x_1 = 7 \\ y_1 = 6 \end{cases} \qquad\qquad \begin{cases} x_2 = -6 \\ y_2 = -7. \end{cases}$$

Scartiamo la 2ª, perchè il problema richiede una soluzione positiva.

3. *Un automobile parte alle 5 del mattino da una certa località con la velocità di* km *40 l'ora e, dopo 20 minuti, un'altra automobile parte ad inseguirla con la velocità di* km *55 l'ora. Supposti i due moti uniformi, determinare, costruendone i diagrammi, l'ora in cui la prima automobile verrà raggiunta e a quale distanza dal punto di partenza.*

Risoluzione. — Assumiamo i tempi come ascisse (1 *mm* = 1 minuto) e gli spazi come ordinate (1 *mm* = 1 *km*). Sia O l'origine per il 1° moto; il punto A, che ha per ascisse $1^h = 60^m$ e per ordinata 40 *km*, appartiene al diagramma di esso, che sarà rappre-

sentato (§ 25) dalla retta OA (Fi[illegible]). Il 2° moto [illegible] quindi assumiamo per esso O' come origine, ed il punto B, che ha [illegible] 65^m [illegible] e per ordinata 55 *km*, appartiene al diagramma del 2° moto, che sarà rappresentato dalla retta $O'B$. Le due rette s'incontrano nel punto C, le cui

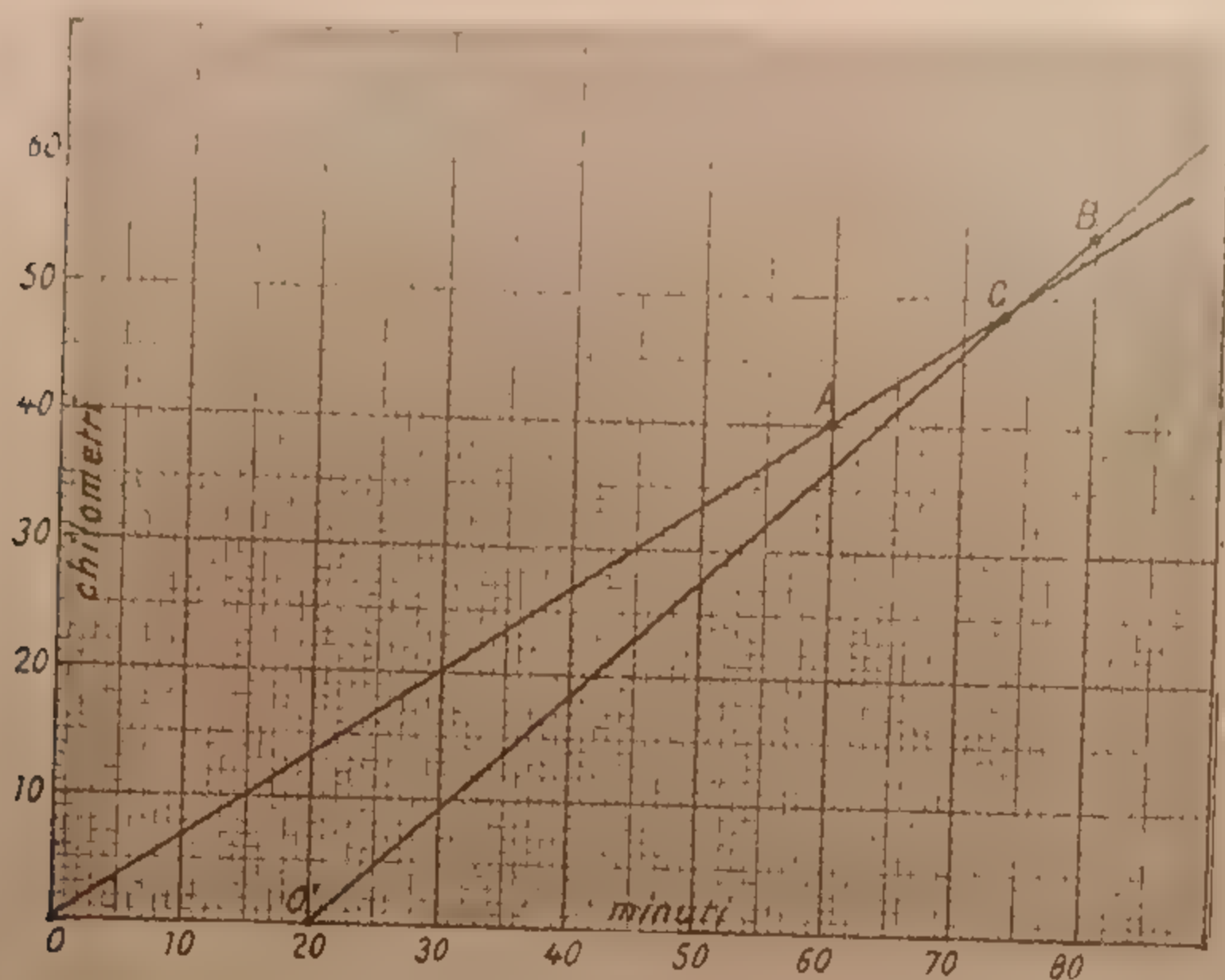



Fig. 27.

coordinate (rispetto ad O) sono (approssimativamente): 73^m e 49 *km*. Quindi:

la prima automobile sarà raggiunta dopo 73^m dalla partenza, cioè alle ore 6 e 13^m, alla distanza di km *49 dal punto di partenza.*

Diamo, per riprova, la soluzione algebrica. Supponiamo la strada rettilinea, O il punto di partenza, P il punto di incontro; il 1° automobile percorrerà l'intervallo OP in t ore, alla velocità di 40 *km* l'ora; il 2° automobile percorrerà lo stesso intervallo in $20^m = \left(\frac{1}{3}\right)^h$ di meno, cioè in $\left(t - \frac{1}{3}\right)$ ore. Quindi, per la 1) sarà nei due moti:

$$5) \qquad (OP) = 40t \qquad\qquad (OP) = 55\left(t - \frac{1}{3}\right) \qquad \text{da cui:}$$

$$40t = 55\left(t - \frac{1}{3}\right); \qquad \text{risolvendo rispetto a } t:$$

$$t = \left(\frac{11}{9}\right)^h = 1^h\,13^m = 73^m.$$

Sostituendo nella 5):

$$OP = \text{km}\left(40 \cdot \frac{11}{9}\right) = \text{km } 48{,}9.$$

b) Problemi da risolvere.

1. Due mobili si muovono sulla stessa retta e nello stesso verso, con moto uniforme. Il secondo parte dal medesimo punto, 15^s dopo il primo; e la sua velocità sta a quella del primo come 4 : 3. Dopo quanto tempo il secondo mobile raggiungerà il primo?

2. Due corpi (puntiformi) si muovono, con moto uni[illegible] due lati di un angolo retto, partendo contemporaneament[illegible] cità v_1 e v_2. A che distanza si troveranno dopo il tempo t?

3. Due [illegible] gono incontro, l'uno con la velocità di *km* [illegible] Dopo quanto tempo s'incontreranno, e a che distanza dai punti di partenza?

4. Due automobili partono, da due località distanti *km* 230, venendosi incontro. L'una parte alle 5 del mattino e l'altra alle $5^h\ 40^m$; la prima corre con la velocità (costante) di *km* 45 l'ora, la seconda con la velocità di *km* 50 l'ora. Determinare, costruendo i diagrammi dei due moti, l'ora dell'incontro e la distanza di questo punto dai luoghi di partenza.

(Scelta l'origine O degli assi, si costruisca il diagramma del 1° moto (ascisse: 1 *mm* = 1^m; ordinate: 1 *mm* = 2 *km*); per il diagramma del 2° moto, si prenderà come origine degli assi un punto O' le cui coordinate rispetto ad O sono x = 40m, y = 230 *km*, e si costruirà il 2° diagramma, considerando gli spazi percorsi *negativi*, cioè riportandoli *al di sotto* di O'. Si trovi, anche ora, la soluzione algebrica.)

Moto vario.

27. **Moto vario** *dicesi quello che non è uniforme.* Nel moto vario quindi la velocità è variabile. Se la velocità aumenta il moto dicesi **accelerato**; se la velocità diminuisce, il moto dicesi **ritardato.** Poichè la velocità ad ogni istante assume un valore diverso, non ha significato parlare di velocità in genere. Distingueremo meglio due valori della velocità.

Velocità media. Negli esempi del § 25, si è supposto il moto del treno uniforme; mentre in realtà esso è molto vario, essendo ora accelerato nel partire da una stazione, ora ritardato nell'avvicinarsi ad una fermata. Il valore di v dedotto è un *valore medio* della velocità durante il percorso Torino - Milano, e lo abbiamo dedotto dividendo l'intervallo per il tempo impiegato a percorrerlo, *supponendo cioè che il moto fosse uniforme.*

Fig. 28.

Chiamasi appunto *velocità media* in un certo intervallo AB (Fig. 28), della traiettoria, *la velocità* (costante) *che avrebbe il punto, se percorresse lo stesso intervallo, nello stesso tempo, ma con moto uniforme.*

Per la 2) del § 25, la velocità media si otterrà dividendo l'intervallo per il tempo impiegato a percorrerlo. Così, ponendo $(\widehat{OA}) = s_1$, $(\widehat{OB}) = s_2$, τ il tempo impiegato dal punto per portarsi da A a B, la velocità media v_m nell'intervallo AB sarà:

$$1) \qquad v_m = \frac{(\widehat{AB})}{\tau} = \frac{s_2 - s_1}{\tau}.$$

Il valore della velocità media varia quindi con la grandezza e la posizione dell'intervallo considerato.

Velocità all'istante. Sia v_1 la velocità media nell'intervallo [illegible]
lasciando fisso l'estremo A dell'intervallo, facciamo [illegible]
Siano v_2, v_3 .... le velocità medie negli intervalli AB_2, AB_3 [illegible] sempre più l'estremo B ad A, cioè prendendo l'intervallo sempre più piccolo, fino a ridurlo *tanto piccolo quanto si vuole*, il numeratore ed il denominatore della 1) si avvicinano sempre più al valore zero, ma non è detto che tutta la frazione si annulli. Cioè può darsi che il valore della velocità media si avvicini sempre più ad un *valore limite* v, determinato e finito, che si chiamerà la *velocità nel punto* A, o anche la *velocità all'istante* t nel quale il punto passa per A.

Fig. 29.

Si può cioè scrivere:

$$v = \lim_{\tau = 0} \frac{s_2 - s_1}{\tau} ; \quad 2)$$

ossia, indicando con ds un intervallo infinitesimo che segue A e con dt il tempo infinitesimo in cui esso è descritto, è:

$$v = \frac{ds}{dt} \quad 3)$$

Tale rapporto è *la derivata dello spazio rispetto al tempo* (1); e si calcolerà allorchè, naturalmente, si conoscerà l'equazione del movimento, (§ 23).

Il significato fisico di questo limite è che pur variando la velocità da punto a punto, in un tratto piccolissimo che comprende il punto A la variazione è così piccola da poterla trascurare; si può cioè considerare il moto in tale piccolo tratto come uniforme, e la velocità come costante. Si può perciò anche dire:

Velocità in un dato punto della traiettoria è quella che avrebbe il corpo se a partire da quell'istante continuasse a muoversi con moto uniforme.

28. **Moto naturalmente accelerato.** — Supponiamo che un punto parta dalla quiete e che la sua velocità vada crescendo in modo che dopo 1 secondo dalla partenza sia, ad es., di *cm* 20, dopo 2^s di *cm* 40, dopo 3^s di *cm* 60, ecc. Cioè la velocità cresce, e quindi è un moto accelerato; ma *cresce sempre della stessa quantità* (di *cm* 20) *ad ogni secondo*. Un moto di tale specie lo chiameremo **naturalmente** (2) **accelerato**; cioè:

Moto naturalmente accelerato è quello di un punto che partendo dalla quiete, aumenta la sua velocità di una quantità costante ad ogni unità di tempo. Questo aumento costante della velocità nell'unità di tempo, si chiama **accelerazione**. Caratteristica del moto naturalmente accelerato è adunque che l'accelerazione è costante; due moti naturalmente accelerati diversi differi-

---

(1) Vedasi nota al § 25.

(2) Il nome proviene dal fatto che tale è il moto che acquista in natura un corpo cadendo (vedasi § 108). Ci è sembrato più facile, e quindi più conveniente, studiare prima questo moto e poi generalizzare per il moto uniformemente vario; anzichè dedurre il moto naturalmente accelerato, come caso particolare di quello uniformemente vario (§ 34), come sarebbe stato più logico.

scono o per la direzione o per il valore della acce[illegible] precedente l'accelerazione è di *cm* 20 al secondo

L'unità assoluta di acceler[illegible] menta di 1 *cm* al secondo e s'indica con *gal* (da Galileo). *Unità* [illegible] sono di 1 *m* al *s* o di 1 *km* all'ora.

29. Leggi del moto naturalmente accelerato. — Le quantità variabili in questo moto sono: lo *spazio*, il *tempo*, la *velocità*. Legando due a due queste variabili, avremo tre relazioni, cioè tre leggi.

1ª legge. *Relazione tra velocità e tempo.* Nell'esempio precedente la velocità alla partenza è zero; dopo 1 secondo è *cm* 20, ossia *cm* 20 × 1; dopo 2 secondi è *cm* (20 + 20) = *cm* 40 = *cm* (20 × 2); dopo 3 secondi è *cm* (40 + 20) = *cm* 60 = *cm* (20 × 3), ecc.

Cioè otteniamo la velocità dopo un dato numero di secondi, moltiplicando il numero costante *cm* 20 (*accelerazione*) per il numero dei secondi. Generalizzando, se v è la velocità dopo t secondi, ed a l'accelerazione, sarà:

$$v = at; \tag{4}$$

cioè, ricordando sempre il significato di proporzionalità del § 3:

La velocità cresce proporzionalmente al tempo.

Fig. 30.

Se rappresentiamo graficamente la 4), prendendo come ascisse i valori di t e come ordinate i valori corrispondenti di v, otteniamo come *diagramma delle velocità* una retta r passante per l'origine O (Fig. 30), più o meno inclinata rispetto all'asse delle ascisse, secondo il valore dell'accelerazione a. Per la 4) questa è rappresentata dal rapporto $(MA):(OA)$, tra l'ordinata e l'ascissa di un punto M qualunque della r. Tale rapporto è anche uguale alla *tangente* dell'angolo α, che la retta r fa con l'asse delle x; cioè:

$$a = \operatorname{tang} \alpha. \tag{5}$$

Fig. 31.

2ª legge: *Relazione tra spazio e tempo.*

Per calcolare lo spazio descritto in t secondi, consideriamo ancora il diagramma delle velocità (Fig. 31); sia $(OA_n) = t$ l'ascissa relativa al tempo t; l'ordinata corrispondente $(A_nB_n) = v$ indicherà il valore della velocità al tempo t. Dividiamo l'intervallo OA_n in n parti uguali, e prendiamo n così grande che ciascun tratto, ad es. A_3A_4, risulti piccolissimo a piacere. In A_3 la velocità è $v_3 = (A_3D_3)$, ed in A_4 è $v_4 = (A_4D_4)$. Questi due valori sono disuguali; ma avendo preso A_3A_4 piccolissimo, è così piccola la differenza tra v_4 e v_3 che possiamo trascurarla; e considerare in tale intervallo la velocità costante ed uguale a (PQ), cioè considerare il moto come uniforme. Allora, lo spazio descritto nel tempo (A_3A_4) sarà per la 1) del § 25:

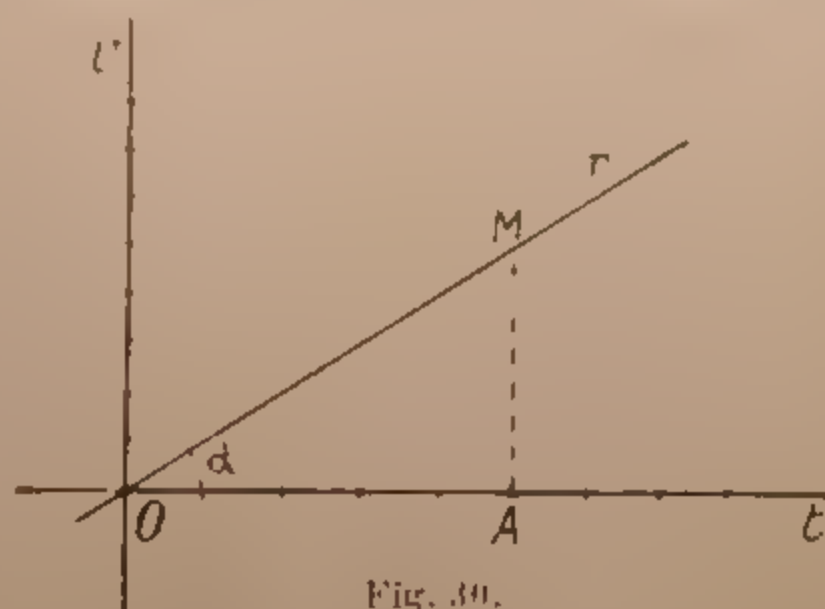
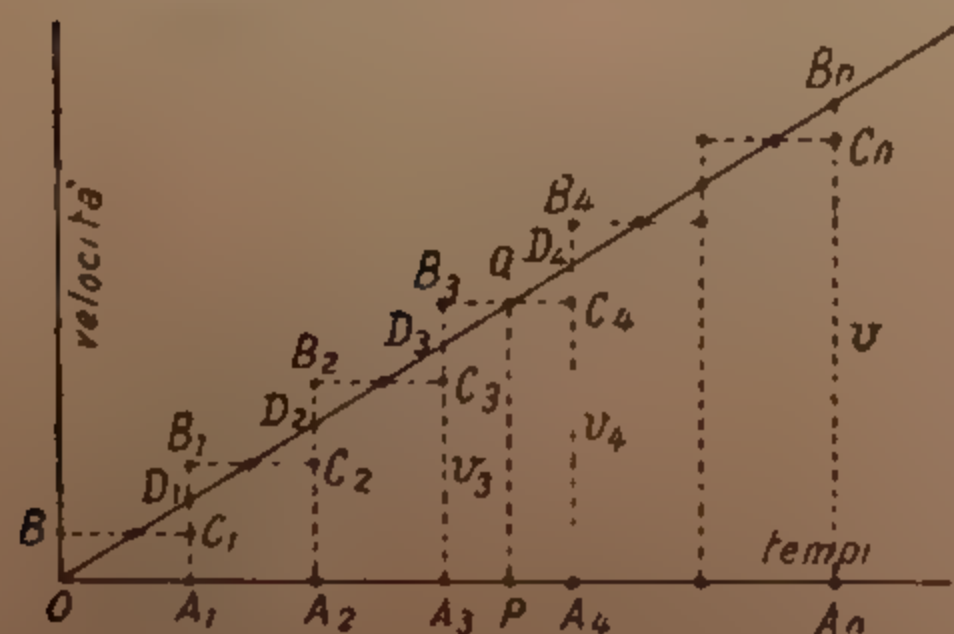
$$s_4 = (PQ) \times (A_3A_4).$$

Tale prodotto rappresenta l'area del rettangolo $A_3 B_3 C_4 A_4$, ch[illegible] trapezio $A_3 D_3 D_4 A_4$. Calcolando in egual modo gli spazi descritti n[illegible] valli $O A_1$, $A_1 A_2$ [illegible] rato dalla somma delle aree dei singoli trapezi $(O D_1 A_1) + (A_1 D_1 D_2 A_2) + (A_2 D_2 D_3 A_3) + \dots$; cioè dall'area del triangolo $O B_n A_n$. Sarà quindi

Fig. 32.

$$s = \frac{(A_n B_n) \times (O A_n)}{2} = \frac{v\,t}{2}$$

Sostituendo a v il valore della 4), si avrà:

$$s = \frac{1}{2}\,a\,t^2, \qquad 6)$$

che è la legge cercata.

Poichè a e perciò anche $\frac{1}{2}a$ è costante, essa dice: **Gli spazi percorsi sono proporzionali ai quadrati dei tempi impiegati a percorrerli.**

Se rappresentiamo graficamente la 6), prendendo come ascisse i valori di t e come ordinate i valori corrispondenti di s, otteniamo come *diagramma degli spazi* la curva rappresentata nella Fig. 32.

Come caso particolare troveremo lo spazio percorso dopo 1 secondo, facendo nella 6): $t = 1$; quindi sarà tale spazio:

$$7) \qquad s_1 = \frac{1}{2}\,a\,; \qquad \text{cioè:}$$

Lo spazio descritto nel primo minuto secondo è uguale alla metà dell'accelerazione.

Dalla 6) si ricava, facendo successivamente $t = 1$, $t = 2$, $t = 3$, $t = 4$.... che gli spazi percorsi in 1, 2, 3, 4.... secondi, sono rispettivamente:

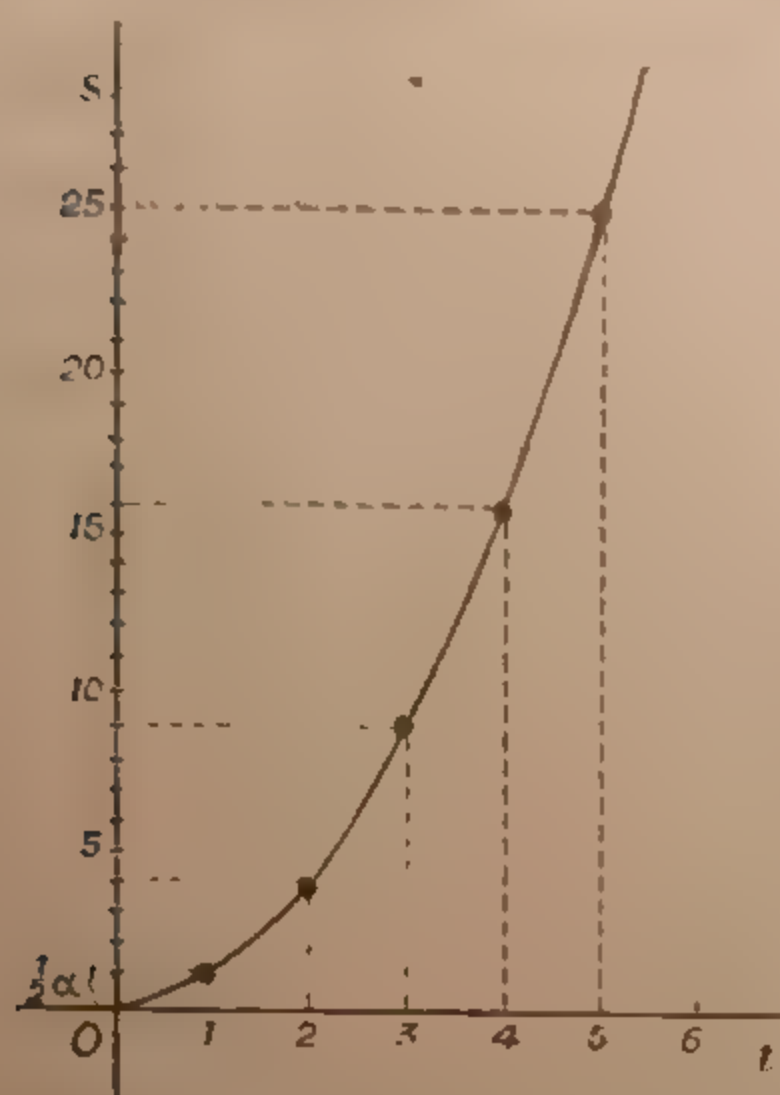
$$s_1 = \frac{a}{2} \qquad s_2 = 4\,.\,\frac{a}{2} \qquad s_3 = 9\,.\,\frac{a}{2} \qquad s_4 = 16\,.\,\frac{a}{2}\;\dots.$$

da cui, per differenza, si ricava che gli spazi descritti nel 1°, nel 2°, nel 3°, nel 4°.... minuto secondo, sono rispettivamente:

$$s_1 = 1\,.\,\frac{a}{2} \qquad s_2 - s_1 = 3\,.\,\frac{a}{2} \qquad s_3 - s_2 = 5\,.\,\frac{a}{2} \qquad s_4 - s_3 = 7\,.\,\frac{a}{2}\;\dots. \qquad \text{cioè:}$$

3ª legge: *Gli spazi percorsi nelle successive unità di tempo, crescono come la successione dei numeri dispari.* (Legge di Galileo [1]).

4ª legge: *Relazione tra velocità e spazio.* Ricaveremo questa relazione algebricamente, eliminando t tra le due equazioni 4) e 6).

(1) Galileo Galilei, sommo scienziato, matematico e filosofo; n. a Pisa il 18 febbraio 1564, m. ad Arcetri l'8 gennaio 1642.

Risolvendo la 4) rispetto a t:

$$t = \frac{v}{a}$$ e sostituendo nella 6) si ottiene

$$s = \frac{1}{2} a \frac{v^2}{a^2} = \frac{v^2}{2a}$$ da cui: $v^2 = 2as$,

8) $$v = \sqrt{2as}$$ cioè:

La velocità cresce proporzionalmente alla radice quadrata dello spazio percorso.

Riepilogando, le leggi del moto naturalmente accelerato sono:

4): $v = at$ 6): $s = \frac{1}{2} a t^2$ 8): $v = \sqrt{2as}$

Esempi. *Un corpo si muove con moto naturalmente accelerato. La sua velocità dopo 8 secondi è di* $^{m}/_{s}$ *24. Calcolare: la velocità e lo spazio dopo 12 secondi, e la velocità dopo aver percorso* m *96.*

Per la 4) è: $a = \frac{v}{t}$ e nel caso nostro: $a = {}^{m}/_{s} \frac{24}{8} = {}^{m}/_{s} 3$.

Ancora per la 4) è dopo 12 secondi:

$$v_{12} = {}^{m}/_{s} (3 \times 12) = {}^{m}/_{s} 36 ;$$

e per la 6): $$s_{12} = \text{m} \left(\frac{1}{2} \times 3 \times 12^2 \right) = \text{m}\, 216 .$$

Per la 8), si ha la velocità dopo *m* 96:

$$v_1 = {}^{m}/_{s} \sqrt{2 \times 3 \times 96} = {}^{m}/_{s} \sqrt{576} = {}^{m}/_{s} 24 .$$

30. Problemi sul moto naturalmente accelerato.

a) Problema risoluto.

1. *Due mobili partono dagli estremi di un segmento lungo* d, *e si muovono con moto naturalmente accelerato, l'uno verso l'altro, con le accelerazioni* a *ed* a'. *Dopo quanto tempo s'incontreranno, e a che distanza dal punto di partenza?*

Risoluzione. — Siano A e B gli estremi del segmento, e C il punto (interno ad AB) in cui i due mobili s'incontrano. Sia t il tempo dopo cui s'incontrano, e sia a l'accelerazione del mobile partente da A. Per la 6) si avrà:

9) $$(AC) = \frac{1}{2} a t^2 \qquad (BC) = \frac{1}{2} a' t^2 ;$$ sommando:

$$(AC) + (BC) = d = \frac{1}{2} (a + a') t^2 ;$$ da cui:

$$t^2 = \frac{2d}{a + a'}, \qquad \text{e:} \qquad t = \sqrt{\frac{2d}{a + a'}}$$

Abbiamo trascurato il valore negativo del radicale, perchè il problema esige una soluzione positiva. Sostituendo nelle 9) il valore trovato per t, si ottiene:

$$(AC) = \frac{ad}{a + a'} \qquad (BC) = \frac{a'd}{a + a'}$$

b) **Problemi da risolvere.**

1. Un corpo, partendo dalla quiete, si muove per 5 secondi con un'accelerazione incognita. Dopo il 5° secondo l'accelerazione si annulla e il corpo prosegue di moto uniforme, percorrendo successivamente 450 *m* in 18ˢ.

Si domanda l'accelerazione iniziale e lo spazio percorso nei primi 5ˢ.

2. Un corpo si muove su una retta con moto naturalmente accelerato, e percorre nel primo minuto secondo *m* 15. Calcolare

la velocità del corpo dopo 8 secondi,

la velocità dopo aver percorso *m* 7250,

lo spazio descritto dopo 12 secondi.

3. Due mobili partono contemporaneamente dall'origine comune di due semirette tra loro perpendicolari, e si muovono ciascuno su una semiretta, con moto naturalmente accelerato. L'accelerazione del primo mobile e a; essi dopo t secondi si trovano alla distanza d l'uno dall'altro. Calcolare l'accelerazione del secondo mobile.

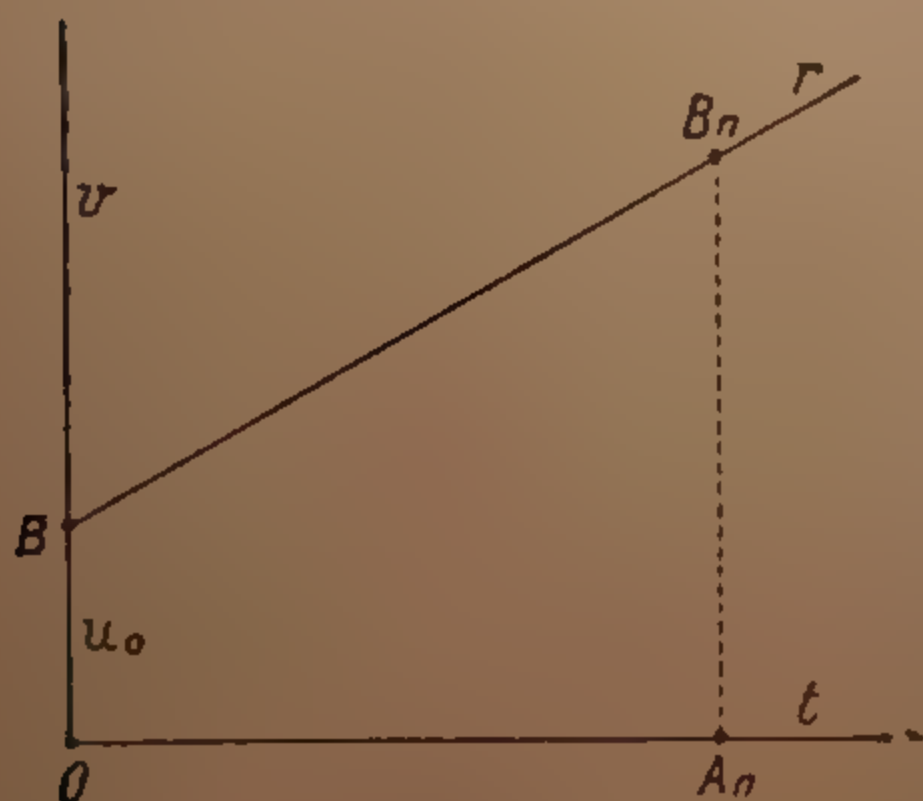
31. **Moto uniformemente accelerato.** — Il moto *uniformemente* accelerato, differisce dal moto *naturalmente* accelerato, per questo che il punto mobile anzichè partire dalla quiete, si muoveva già dapprima con moto uniforme; ma a partire da un dato istante, per cause che non dobbiamo ora considerare, aumenta la sua velocità di una quantità costante (**accelerazione**) per ogni unità di tempo. La velocità (*costante*) che aveva il punto prima di accelerare il suo moto, si chiama **velocità iniziale.**

Troveremo le leggi del moto uniformemente accelerato con procedimento analogo che per il moto naturalmente accelerato.

1ª legge: Sia u_0 la velocità iniziale o al tempo zero; sia a l'accelerazione; dopo 1ˢ la velocità sarà $u_0 + a$; dopo 2ˢ sarà $u_0 + a + a = u_0 + a \cdot 2$; dopo 3ˢ sarà $u_0 + 2a + a = u_0 + a \cdot 3$; ecc...; dopo t secondi sarà:

$$10) \qquad v = u_0 + at$$

Fig. 33.

Rappresentiamo graficamente la 10), prendendo al solito come ascisse i valori di t e come ordinate i valori corrispondenti di v; otterremo come diagramma delle velocità una retta r (Fig. 33) che non passa più per l'origine; ma che taglia l'asse delle ordinate in un punto B tale che $(OB) = u_0$.

2ª legge: Lo spazio percorso **in** t secondi, si potrà ricavare con ragionamento analogo a quello fatto per trovare la 6) del § 29. Se consideriamo in Fig. 33 l'ascisse (OA_n) relativa al tempo t, e la velocità corrispondente (A_nB_n), si troverà che lo spazio descritto in t secondi, sarà equivalente all'area del trapezio OBB_nA_n; le cui basi sono:

$(OB) = u_0$, $(A_nB_n) = v = u_0 + at$, e l'altezza $(OA_n) = t$; cioè sarà

$$11) \qquad s = \frac{(OB) + (A_nB_n)}{2} \times (OA_n) = \frac{u_0 + u_0 + at}{2} \times t = u_0 t + \frac{1}{2} a t^2 .$$

3ª legge: Ricavando t dalla 10) [illegible]
funzione di s:

12) [illegible]

32. Postulato della coesistenza di più movimenti. — La 10) e la 11) del § 31 ci dànno i primi esempi di un importante postulato della meccanica, dovuto a Galileo. Il moto uniformemente accelerato si può considerare come la combinazione, o meglio la *composizione*, di un moto uniforme con un moto naturalmente accelerato. Infatti, se il punto si muovesse sempre con moto uniforme, la sua velocità dopo t secondi sarebbe sempre quella che aveva all'inizio, cioè u_0; se si muovesse con moto naturalmente accelerato, dopo t secondi per la 1) del § 29, la velocità sarebbe at. La 10) del § 31 quindi ci dice che:

nel moto uniformemente accelerato la velocità dopo t secondi è la somma delle velocità che acquisterebbe il punto se si muovesse *separatamente* prima per t secondi con moto uniforme e poi per altri t secondi con moto naturalmente accelerato.

Il **postulato della coesistenza di più movimenti** dice appunto che: *se un corpo è soggetto contemporaneamente a più movimenti, esso si muove come se tali moti anzichè simultaneamente avvenissero successivamente, uno dopo l'altro, ciascuno per lo stesso tempo, uno indipendentemente dall'altro.*

Lo stesso postulato vale anche per lo spazio percorso in t secondi. Questo sarà la somma degli spazi che separatamente percorrerebbe il corpo se si muovesse dapprima per t secondi con moto uniforme, e poi per altri t secondi con moto naturalmente accelerato. Quindi sommando i valori dello spazio dati dalla 1) del § 25 e dalla 6) del § 29, si otterrà appunto la 11) del § 31, che dà lo spazio nel moto uniformemente accelerato.

Dopo ciò risulta più chiaro l'enunciato di Galileo del postulato precedente, che egli chiamò il **principio della indipendente coesistenza dei movimenti**: *un punto, sollecitato contemporaneamente da più movimenti, si trova ad ogni istante nella stessa posizione che avrebbe se quei movimenti fossero applicati successivamente, per la stessa durata di tempo.*

33. Moto uniformemente ritardato. — Chiameremo *moto uniformemente ritardato quello di un punto la cui velocità partendo da un certo valore* (velocità iniziale), *diminuisce di una quantità costante ad ogni unità di tempo.* Anzichè dare un nuovo nome a questa diminuzione della velocità, le conserveremo il nome di **accelerazione**; ma la distingueremo dal caso del moto accelerato, attribuendo ad essa un segno: il segno + per il moto accelerato, il segno — per il moto ritardato.

Le **leggi del moto uniformemente ritardato** allora scaturiscono semplicemente dalle formule 10), 11) e 12) del § 31, cambiando in esse $+a$ in $-a$. Saranno cioè:

13) $v = u_0 - a\,t$; $s = u_0 t - \frac{1}{2} a t^2$; $v = \sqrt{u_0^2 - 2a}$.

Anche ora è verificato il principio della coesistenza di più movimenti, risultando il moto uniformemente ritardato come differenza tra un moto uniforme e un moto naturalmente accelerato.

34. **Moto uniformemente vario.** — [illegible] notazione entrambi i casi ora studiati, scrivendo così insieme le leggi del moto uniformemente vario:

$$14) \qquad v = u_0 \pm at \; ; \qquad s = u_0 t \pm \frac{1}{2} a t^2 \; ; \qquad v = \sqrt{u_0^2 \pm 2a \text{[illegible]}}$$

Facendo in queste formule $u_0 = 0$, si ottengono [illegible]
Cioè: *il moto naturalmente accelerato è il caso particolare del moto uniformemente vario, in cui la velocità iniziale sia zero.*

Facendo invece $a = 0$ si ottengono:

$$v = u_0 \; ; \qquad s = u_0 t \; ;$$

cioè le leggi del moto uniforme. *Il moto uniforme adunque si può ritenere come caso particolare di un moto vario, in cui l'accelerazione sia zero.*

35. **Accelerazione media.** — Abbiamo visto che la caratteristica del moto uniformemente vario è che l'accelerazione è costante. Un moto in cui l'accelerazione è variabile è un **moto vario**, ma non uniformemente. Anche ora il moto sarà accelerato se l'accelerazione è positiva, ritardato se l'accelerazione è negativa.

Chiamasi *accelerazione media* in un dato intervallo $\widehat{AB}$ della traiettoria (Fig. 28) *l'accelerazione* (costante) *che avrebbe il punto se percorresse lo stesso intervallo, nello stesso tempo, ma con moto uniformemente vario.*

Siano v_1 e v_2 le velocità nei punti A e B e τ il tempo impiegato dal corpo per portarsi da A a B. La velocità in tale intervallo è variata nel tempo τ di $v_2 - v_1$; quindi la variazione nell'unità di tempo, cioè l'accelerazione media, è:

$$16) \qquad a_m = \frac{v_2 - v_1}{\tau} \, .$$

Il valore dell'accelerazione media dipenderà pertanto dalla lunghezza e dalla posizione dell'intervallo $\widehat{AB}$.

36. **Accelerazione all'istante.** — Sia a_1 l'accelerazione media nell'intervallo $\widehat{AB}_1$ (Fig. 29); lasciando fisso l'estremo A dell'intervallo, facciamo variare l'altro estremo. Siano a_2, a_3 . . . le accelerazioni medie negli intervalli $\widehat{AB}_2$, $\widehat{AB}_3$, . . . Prendendo l'intervallo sempre più piccolo, fino a ridurlo tanto piccolo quanto si vuole, il numeratore ed il denominatore di a_m nella 16), si avvicinano sempre più al valore zero; ma non è detto che tutta la frazione si annulli. Cioè può darsi che il valore della accelerazione media si avvicini sempre più ad un *valore limite* a determinato e finito, che si chiamerà l'*accelerazione nel punto* A, o meglio *accelerazione all'istante* t in cui il punto passa per A. Si può cioè scrivere:

$$17) \qquad a = \lim_{\tau = 0} \frac{v_2 - v_1}{\tau} \; ;$$

ossia, indicando con dv la variazione della velocità nell'intervallo infinitesimo che segue A, e con dt il tempo infinitesimo in cui esso è descritto, è:

$$18) \qquad a = \frac{dv}{dt} \, .$$

Tale rapporto è *la derivata della velocità rispetto al tempo*, e si calcolerà allorchè, naturalmente, è nota l'equazione che esprime v in funzione di t.

37. Problemi sul moto uniformemente vario.

a) Problemi risoluti.

1. *Un corpo si muove per 7 secondi con moto uniforme e la* [illegible] *poi acquista un'accelerazione positiva di* cm 30 *al* s, *e si muove per* [illegible] *ha percorso dopo questo tempo, e qual'è la* [illegible]?

Risoluzione. — Lo spazio percorso nei primi 7^s, con moto uniforme, [illegible]

$$s_1 = vt = \text{cm}\,(80 \times 7) = \text{cm}\,560.$$

Lo spazio percorso negli altri 15^s con moto uniformemente accelerato, sarà,

$$s_2 = u_0 t + \frac{1}{2}\,a t^2 = \text{cm}\,(80 \times 15^s) + \text{cm}\left(\frac{1}{2} \cdot 30 \cdot 15^2\right) = \text{cm}\,4575.$$

Lo spazio totale sarà perciò:

$$s = s_1 + s_2 = \text{cm}\,(560 + 4575) = \text{cm}\,5135 = \text{m}\,51{,}35.$$

La velocità alla fine dell'intervallo sarà:

$$v = u_0 + at = \text{cm}\,80 + \text{cm}\,(30 \times 15) = {}^{\text{cm}}/_{\text{s}}\,530.$$

2. *Due mobili partono contemporaneamente e rispettivamente dagli estremi* A *e* B *di un segmento di lunghezza* d, *e si vengono incontro: il 1° (partente da* A*) con moto uniformemente accelerato, velocità iniziale* u_1 *ed accelerazione* a_1*; il 2° con moto uniformemente ritardato, velocità iniziale* u_2 *ed accelerazione* $-a_2$*. Dopo quanto tempo s'incontrano?*

Risoluzione. — Sia C il punto d'incontro (interno al segmento AB), e t il tempo dopo cui s'incontrano. Sarà, per la 2ª delle 14):

$$(AC) = u_1 t + \frac{1}{2}\,a_1 t^2; \qquad\qquad (BC) = u_2 t - \frac{1}{2}\,a_2 t^2$$

Sommando membro a membro, ed essendo $(AC) + (BC) = d$, avremo:

$$d = t\,(u_1 + u_2) + \frac{1}{2}\,t^2\,(a_1 - a_2).$$

Ordinando

$$15) \qquad (a_1 - a_2)\,t^2 + 2\,(u_1 + u_2)\,t - 2d = 0.$$

Se $a_1 = a_2$, l'equazione diventa:

$$(u_1 + u_2)\,t = d \qquad \text{da cui:} \qquad t = \frac{d}{u_1 + u_2}.$$

Se $a_1 > a_2$, la 15) ammette sempre due radici reali e distinte, perchè:

$$\frac{\Delta}{4} = (u_1 + u_2)^2 + 2\,d\,(a_1 - a_2) > 0$$

Risolvendo

$$t = \frac{-\,(u_1 + u_2) + \sqrt{(u_1 + u_2)^2 + 2\,d\,(a_1 - a_2)}}{a_1 - a_2}.$$

Abbiamo trascurato la 2ª radice, perchè negativa, mentre il problema richiede un valore positivo.

Se $a_1 < a_2$, cambiamo il segno a tutta la 15), che diventerà:

$$(a_2 - a_1)\,t^2 - 2\,(u_1 + u_2)\,t + 2d = 0;$$

essa ha radici reali se:

$$\frac{\Delta}{4} = (u_1 + u_2)^2 - 2\,d\,(a_2 - a_1) \geq 0; \qquad \text{cioè se:} \qquad (u_1 + u_2)^2 \geq 2\,d\,(a_2 - a_1)$$

Risolvendo:

$$t = \frac{u_1 + u_2 \pm \sqrt{(u_1 + u_2)^2 - 2d(a_2 - a_1)}}{a_2 - a_1}$$

che soddisfano entrambe, essendo $u_1 + u_2 > \sqrt{(u_1 + u_2)^2 - 2d(a_2 - a_1)}$. Il significato fisico delle due soluzioni è il seguente. Se $a_1 < a_2$, possono darsi due casi:

1°. Il mobile partito da A raggiunge l'altro in un punto interno ad AB, prima che esso siasi fermato; corrisponde al valore di t per il quale si assume il segno negativo del radicale.

2°. Il mobile partito da A raggiunge l'altro allorchè, *poco dopo essersi fermato*, ritorna indietro per causa dell'accelerazione negativa; corrisponde al valore di t per il quale si assume il segno positivo del radicale.

Il caso $\frac{\Delta}{4} < 0$, in cui non vi sono soluzioni reali, ha questo significato fisico: Allorchè il mobile partito da B si ferma per tornare indietro, quello partito da A è ancora troppo distante da tale punto, e non riuscirà più a raggiungerlo allorchè il 1° è tornato indietro e si allontana sempre più dall'altro.

b) Problemi da risolvere.

1. Un corpo si muove su una retta con moto uniformemente ritardato; la sua velocità iniziale è di *m* 3,80 al *s*; lo spazio descritto nel primo minuto secondo è di *m* 3,60. Calcolare la velocità dopo 5^s, e a quale distanza dall'origine si trova il corpo dopo tale tempo.

2. Da un punto O di una retta partono contemporaneamente, in verso opposto, due mobili; uno con moto uniformemente accelerato, con velocità iniziale u_1 e accelerazione a_1; l'altro con moto uniformemente ritardato, con velocità iniziale u_2 e accelerazione $-a_2$. Calcolare: a che distanza da O, e dopo quanto tempo, il 2° mobile si ferma (per tornare indietro); a che distanza da O (da parte opposta), il 2° mobile incontrerà il 1°, e dopo quanto tempo.

3. Costruire il diagramma degli spazi per il moto uniformemente accelerato e per quello uniformemente ritardato.

Composizione dei movimenti.

38. **Composizione di più moti,** vuol dire determinare il moto che si ottiene, allorchè un punto è sollecitato a muoversi per l'azione di più moti agenti contemporaneamente. I singoli moti agenti sul punto, si chiamano i **moti componenti**; il moto finale che si ottiene, si chiama il **moto risultante**.

A

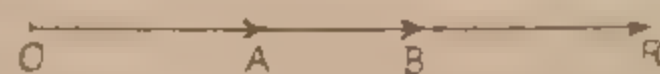
O

Fig. 31.

39. **Rappresentazione grafica del moto uniforme.** — Abbiamo visto nel § 24, che per definire un moto rettilineo ed uniforme, basta assegnare la direzione del moto e la velocità. Ora, entrambe queste quantità possono rappresentarsi graficamente con un segmento OA (Fig. 31), di cui l'estremo O indica il punto mobile, la retta a cui appartiene il segmento indica la direzione

del moto. La [illegible]
indica la velocità del punto mobile. Cioè, il moto rettilineo ed uniforme può rappresentarsi con un vettore [1].

40. Composizione dei moti rettilinei ed uniformi, aventi la stessa direzione.

1. Sia un mobile sollecitato da due moti rettilinei ed uniformi, lungo la stessa retta, e nello stesso verso. Deriva facilmente dal postulato di Galileo, che *il moto risultante è ancora un moto rettilineo ed uniforme, nella medesima direzione e nel medesimo verso dei moti componenti, la cui velocità è la somma delle velocità dei moti componenti.* Cioè se OA (Fig. 35) rappresenta il 1° moto componente, ed OB il 2° moto componente, il moto risultante sarà rappresentato da $OR = OA + OB$. Se OA ed OB sono i due vettori che rappresentano i moti componenti, sappiamo che OR è la loro somma; quindi:

OA, OB componenti
OR = OA + OB risultante.
Fig. 35.

Il moto risultante di due moti rettilinei ed uniformi, aventi la medesima direzione ed il medesimo verso, è rappresentato da un vettore, che è la somma dei vettori che rappresentano i moti componenti.

2. Sia un mobile sollecitato da due moti rettilinei ed uniformi, lungo la stessa retta, in verso contrario. Deriva facilmente anche ora dal postulato di Galileo, che *il moto risultante è ancora un moto rettilineo ed uniforme, nella medesima direzione dei due moti componenti, nel verso del moto la cui velocità è maggiore, e la sua velocità è la differenza delle velocità dei moti componenti.* Cioè se OA (Fig. 36) rappresenta il 1° moto componente, ed OB il 2° moto componente, il moto risultante sarà rappresentato da $OR = OA - OB$. Se OA ed OB sono i due vettori che rappresentano i moti componenti, sappiamo che OR è la loro differenza; quindi:

OA, OB componenti
OR = OA + OB risultante.
Fig. 36.

Il moto risultante di due moti rettilinei ed uniformi, aventi la medesima direzione, ma verso contrario, è rappresentato da un vettore, che è la differenza dei vettori che rappresentano i moti componenti.

3. Un mobile sia sollecitato da n moti rettilinei ed uniformi, nella stessa direzione, alcuni in un verso, altri in verso contrario. Ragionando come nei casi precedenti, si deduce facilmente che il moto risultante è ancora *un moto rettilineo ed uniforme, nella medesima direzione dei moti componenti, la cui velocità è la somma algebrica delle velocità dei moti componenti.* Si assumono positive le velocità dei punti che si muovono in un verso, e

(1) Com'è noto dalla matematica, si chiamano *grandezze vettoriali* o *vettori*, quelle che oltre ad un valore numerico hanno una direzione, come è appunto la velocità. Chiamiamo invece *grandezze scalari* quelle per le quali si considera solo *la specie* e *la grandezza*, e che sono definite perciò solo da un valore numerico; come, ad es., un tempo, un'area, un peso, ecc. Studieremo in seguito altre grandezze vettoriali.

negative quelle dei punti che si muovono in verso [illegible]

Component[illegible] OA [illegible], OB [illegible] 10, OC [illegible]
OD [illegible], OE [illegible]
Risultante: OR = 12 − 10 + 25 + 38 − 15 = 50.

Fig. [illegible]

se i vettori: (OA) [illegible], $(OB) = -10$, $(OC) = 25$, (OD) [illegible], [illegible] rappresentano i moti componenti [illegible] $(OR) = 12 - 10 + 25 + 38 - 15 = 50$ rappresenta il moto risultante. In questo caso: *il vettore risultante OR è la somma algebrica dei vettori componenti.*

41. Composizione di moti rettilinei ed uniformi aventi direzione diversa.

1. Supponiamo ora che un punto mobile sia sollecitato a muoversi contemporaneamente nella direzione a (Fig. 38) con moto uniforme e con velocità v_1 e nella direzione b con moto pure uniforme e con velocità v_2. Siano (OA_1) e (OB_1) gli spazi che percorrerebbe il punto in un minuto secondo per ciascuno dei due moti separatamente; se i due moti avvengono contemporaneamente, sempre per il postulato di Galileo, il punto dopo 1 secondo si troverà in un punto C_1 come se si fosse mosso prima durante 1 secondo da O ad A_1 per azione del primo moto e *successivamente* per un altro secondo da A_1 a C_1 per azione del secondo moto, (A_1C_1 è eguale e parallelo ad OB_1). Cioè, se i due moti avvengono contemporaneamente, il punto percorrerà in un secondo lo spazio (OC_1) nella direzione c.

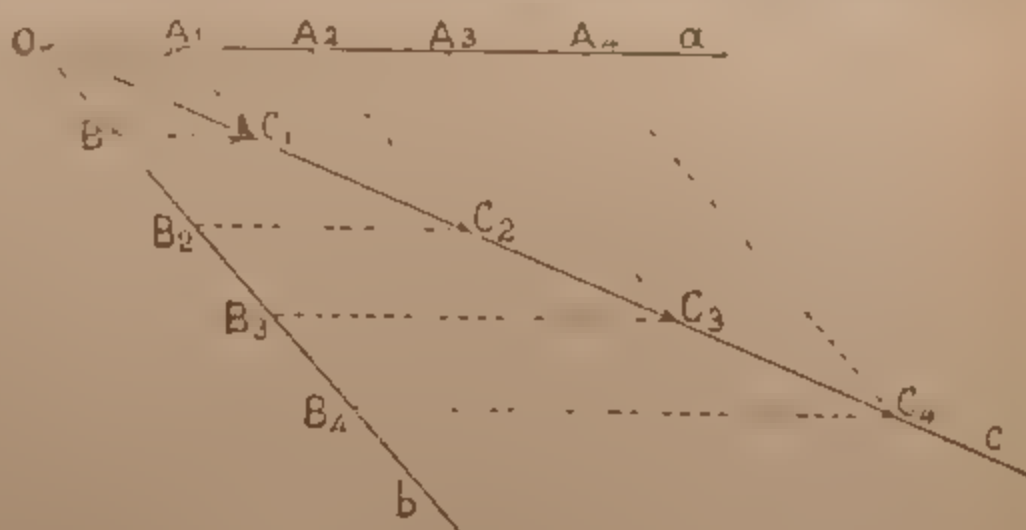



Fig. 38.

Dopo 2 secondi sarebbero (OA_2) e (OB_2) gli spazi percorsi dal punto per ciascuno dei moti componenti isolatamente e sarà (OC_2) lo spazio percorso sotto l'azione simultanea dei due moti. Parimenti dopo 3 secondi sarebbero (OA_3) e (OB_3) gli spazi dei moti componenti e (OC_3) quello del moto risultante, ecc. Se i moti componenti sono uniformi, è:

$$OA_1 = A_1A_2 = A_2A_3 = \dots \quad OB_1 = B_1B_2 = B_2B_3 = \dots$$

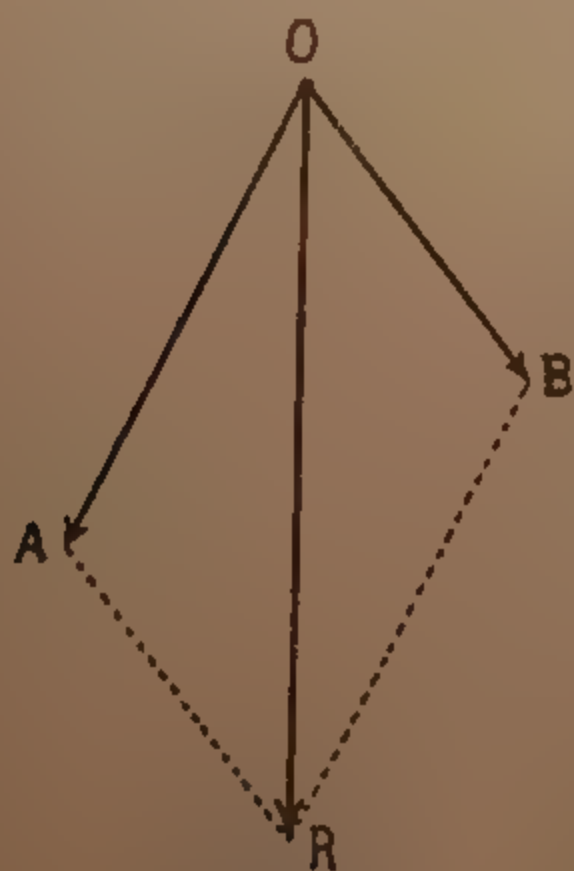
Per i teoremi sulla similitudine, i punti C_1, C_2, C_3..... giacciono sulla medesima retta c, ed è:

$$OC_1 = C_1C_2 = C_2C_3 = \dots$$

cioè anche il moto risultante è rettilineo ed uniforme.

Fig. 39.

Ora, per la definizione di velocità (§ 24), lo spazio (OA_1) descritto in un secondo rappresenta la velocità v_1, lo spazio (OB_1) rappresenta la velocità v_2 ed (OC_1) la velocità del moto risultante. Inoltre $OA_1C_1B_1$ è un parallelogrammo di cui OC_1 è diagonale, quindi:

Il moto risultante di due moti rettilinei ed uniformi, aventi direzioni diverse, è un moto rettilineo ed uniforme rappresentato in direzione e velocità dalla diagonale del parallelogrammo costruito sui segmenti che rappresentano i moti componenti.

Questa regola va sotto il nome di *p*[illegible]

Se OA ed OB sono i due vettori che rappr[illegible] (Fig. 39), il moto risultante è adunque rappresentato d[illegible] in questo caso il vettore OR si dice *la somma* dei vettori [illegible] anche ora: [illegible] *ponenti.*

2. [illegible] ed uniformi, in direzioni diverse.

[illegible] OB, [illegible] presentato dal segmento OB_1. [illegible]

Fig. 40. Fig. 41.

sarà rappresentato dal segmento OC_1. Poi si trovi il moto risultante di OC_1 e OD; sarà rappresentato dal segmento OR; e così via. L'ultimo segmento OR rappresenterà il moto risultante.

Ma per trovare OR, non è necessario costruire tutta la Fig. 40. Osservando che $AB_1 = OB$, perchè lati opposti di un parallelogrammo, e parimenti $B_1C_1 = OC$, $C_1R = OD$, si può trovare OR costruendo la spezzata OAB_1C_1R (Fig. 41), cioè:

Il moto risultante di più moti rettilinei ed uniformi, aventi direzione diversa, è rappresentato dal lato che chiude la linea poligonale, i cui lati sono eguali paralleli e concordi ai segmenti che rappresentano i moti componenti.

Questa regola va sotto il nome di *poligono delle velocità.* Anche in questo caso il vettore OR si chiama la *somma* dei vettori componenti.

Dalle considerazioni precedenti, risulta che in ogni caso:

Il moto risultante di più moti rettilinei ed uniformi, agenti contemporaneamente sullo stesso punto, è rappresentato dal vettore, somma dei vettori che rappresentano i moti componenti.

Osservazioni. La costruzione precedente è indipendente dall'ordine con cui si tracciano i segmenti paralleli a quelli che rappresentano i moti com-

ponenti. La costruzione [illegible] componenti non giacciono nello stesso piano.

Se il punto R cade in O, la velocità risultante [illegible] O rimane in quiete.

42. Rappresentazione grafica del moto naturalmente accelerato. — Abbiamo visto nel § 28 che per definire un moto naturalmente accelerato, basta assegnare la direzione del moto e l'accelerazione. Ora, entrambe queste quantità possono rappresentarsi graficamente con un segmento OA (Fig. 42), di cui l'estremo O indica il punto mobile, la retta a cui appartiene il segmento indica la direzione del moto, la freccia in A indica il verso, e la lunghezza del segmento indica l'accelerazione del punto mobile. Cioè, *il moto naturalmente accelerato può rappresentarsi anch'esso con un vettore.*

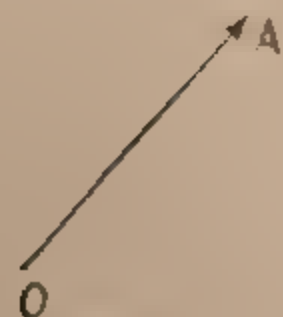



Fig. 42.

43. Composizione di moti rettilinei e naturalmente accelerati. — Poichè i moti naturalmente accelerati possono rappresentarsi con vettori, vale anche ora il risultato generale per la loro composizione:

Il moto risultante di più moti rettilinei e naturalmente accelerati, è rappresentato dal vettore, somma dei vettori che rappresentano i moti componenti.

Avremo in particolare i seguenti casi:

1. *Il moto risultante di due moti rettilinei e naturalmente accelerati, aventi la medesima direzione, è un moto rettilineo e naturalmente accelerato, che avviene nella medesima direzione dei moti componenti, e la cui accelerazione è la somma o la differenza delle accelerazioni dei moti componenti, a secondo che essi avvengono nel medesimo verso o in versi opposti.*

2. *Il moto risultante di due moti rettilinei e naturalmente accelerati, aventi direzioni diverse, è un moto rettilineo e naturalmente accelerato, rappresentato in direzione ed accelerazione dalla diagonale del parallelogrammo costruito sui segmenti che rappresentano i moti componenti.*

Questa regola va sotto il nome di *parallelogrammo delle accelerazioni.*

3. *Il moto risultante di più moti rettilinei e naturalmente accelerati, aventi direzione diversa, è rappresentato dal lato che chiude la linea poligonale, i cui lati sono eguali e paralleli ai segmenti che rappresentano i moti componenti.*

Questa regola va sotto il nome di *poligono delle accelerazioni.*

44. Composizione di due moti rettilinei, uno uniforme e l'altro naturalmente accelerato. — Nel caso in cui i due moti avvengono nella medesima direzione, abbiamo già visto (§ 32 e § 33) che il moto risultante è un moto uniformemente vario.

Supponiamo ora che un punto mobile sia sollecitato a muoversi contemporaneamente nella direzione x (Fig. 43) con moto uniforme e con velocità v, e nella direzione y con moto naturalmente accelerato e con accelerazione a. Siano:

$$(OA_1) = v \qquad (OA_2) = 2\,(OA_1) \qquad (OA_3) = 3\,(OA_1) \qquad (OA_4) = 4\,(OA_1) \ldots$$

gli spazi che descriverebbe il punto in 1, . . .
primo moto; e siano (§ ...

$$(OB_1) = \frac{1}{2}a \qquad (OB_2) = 4(OB_1) \qquad (OB_3) = 9(OB_1)$$

gli spazi che descriverebbe il punto in 1, 2, 3, 4.... secondi, sotto l'azione del solo secondo moto. Se i due moti avvengono simultaneamente, sempre per il noto postulato, il punto dopo 1, 2, 3, 4.... secondi sarà nelle posizioni C_1, C_2, C_3, C_4.... Unendo questi punti con una linea continua, si ottiene la curva della Fig. 43, che si dimostra essere una *parabola*. Cioè:

Il moto risultante di un moto rettilineo uniforme e di un moto rettilineo naturalmente accelerato, è un moto vario parabolico.

Fig. 43.

45. **Problemi sulla composizione dei moti uniformi.**

a) **Problema risoluto.**

Un punto è sollecitato contemporaneamente da due moti rettilinei ed uniformi, in direzioni tra loro perpendicolari, con origine nel vertice del loro angolo, e con velocità rispettivamente v_1 *e* v_2. *Si trovi l'angolo che la direzione del moto risultante forma con le direzioni dei moti componenti, e lo spazio descritto dal punto in* t *secondi.* (*Caso particolare*: $v_1 = m\,8$ *al* s; $v_2 = m\,12$ *al* s; $t = 15^s$).

Risoluzione. — Per il calcolo degli angoli occorre la Trigonometria; per il calcolo dello spazio, basta l'Algebra.

Siano $(OA) = v_1$ e $(OB) = v_2$ i vettori che rappresentano i due moti componenti; sarà $(OC) = V$ il vettore che rappresenta il moto risultante, (Fig. 44). Cioè il moto, risultante avverrà nella direzione OC, e con velocità V.

Fig. 44.

Dal triangolo rettangolo OAC, si ricava per il teorema di Pitagora:

$$V = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}\,.$$

Per la legge 1) del § 25, lo spazio descritto in t secondi sarà:

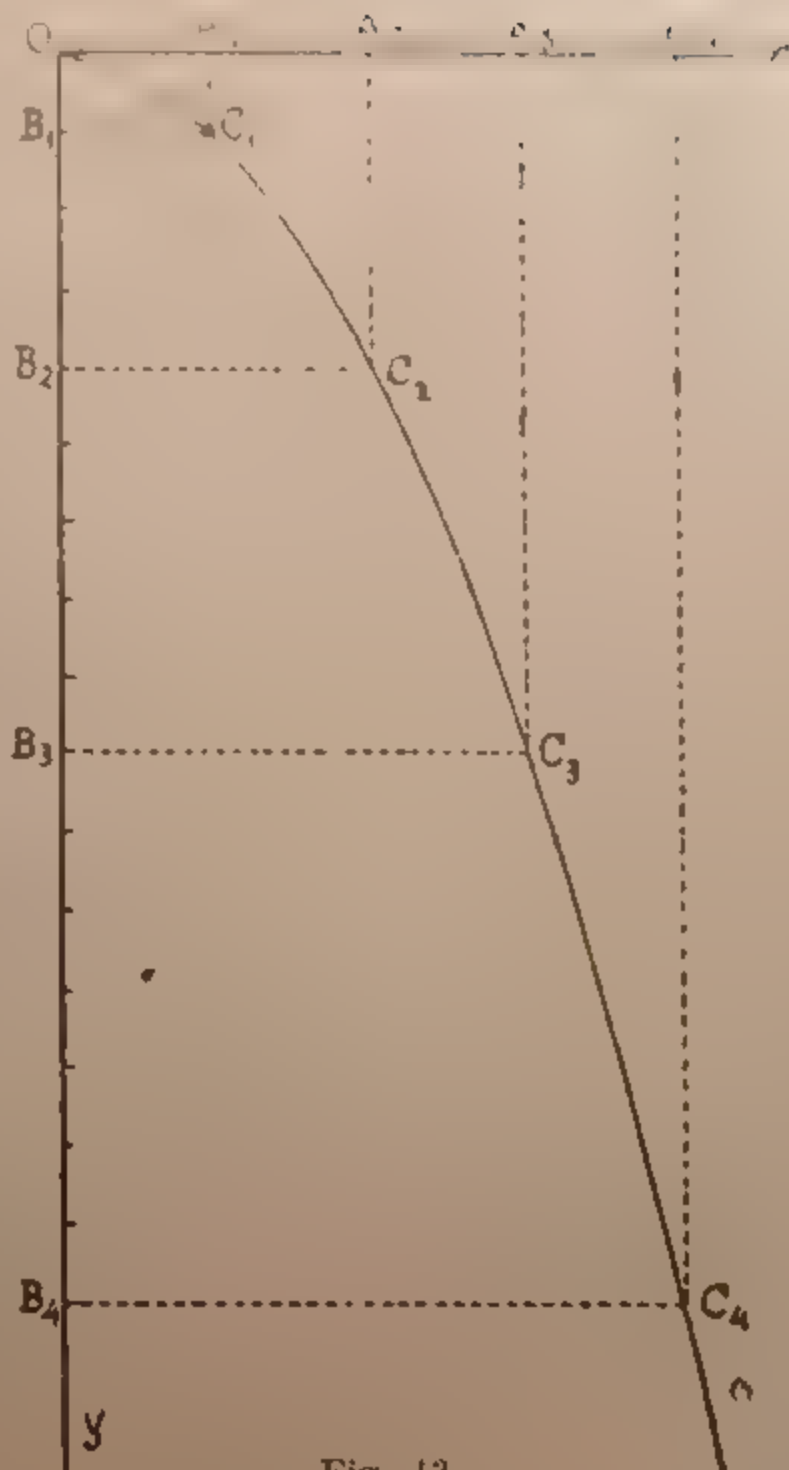
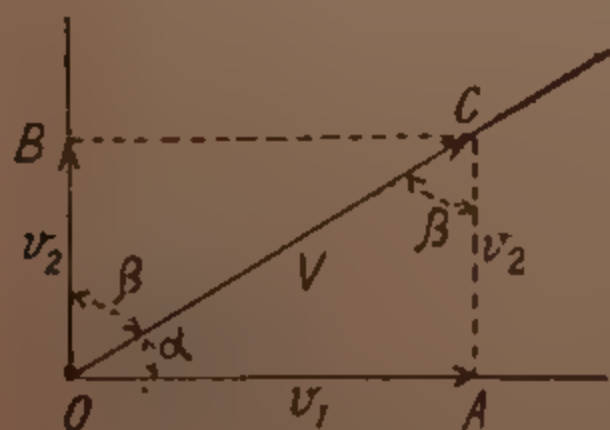
$$s = Vt = t\sqrt{v_1^2 + v_2^2}\,.$$

Dal triangolo rettangolo OAC si ricava pure:

$$(OA) = (OC)\,.\cos\alpha \qquad (AC) = (OC)\,.\cos\beta \qquad \text{cioè:}$$

$$\cos\alpha = \frac{(OA)}{(OC)} = \frac{v_1}{V} = \frac{v_1}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2}}\,; \qquad \cos\beta = \frac{(AC)}{(OC)} = \frac{v_2}{V} = \frac{v_2}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2}}\,.$$

Noti $\cos\alpha$ e $\cos\beta$, per mezzo delle tavole trigonometriche si trovano i valori di α e di β.

$\cos\alpha$ e $\cos\beta$ si chiamano i *coseni di direzione* della semiretta OC.

Per $v_1 = 8$; $v_2 = 12$; $t = 15$, è:

$$V = \sqrt{8^2 + 12^2} = \sqrt{208} = m\ 14{,}422 \text{ al s.}$$

$$\cos \alpha = \frac{8}{14{,}422} = 0{,}5549 \qquad \text{da cui:} \quad \alpha = 56^\circ 18'$$

$$\cos \beta = \frac{12}{14{,}422} = 0{,}8320 \qquad \text{da cui:} \quad \beta = 33^\circ 42'$$

Verifica: $\alpha + \beta = 90^\circ$

b) Problemi da risolvere

1. Un punto è sollecitato contemporaneamente da due moti rettilinei ed uniformi, in direzioni tra loro perpendicolari, e con velocità rispettivamente di *cm* 50 e *cm* 80 al *s*. Determinare, graficamente e col calcolo, la direzione del moto risultante, e lo spazio descritto dal punto dopo 18^s.

2. Un mobile è sollecitato contemporaneamente da due moti rettilinei ed uniformi, in direzioni formanti tra loro l'angolo φ, e con velocità rispettivamente v_1 e v_2. Calcolare: l'angolo che la direzione del moto risultante fa con quello dei moti componenti; in quanto tempo il mobile descrive lo spazio s. Caso particolare: $\varphi = 60^\circ$; $v_1 =$ m 15 al s; $v_2 =$ m 18 al s; $s =$ m 150.

46. Problemi sulla composizione dei moti naturalmente accelerati.

a) Problemi risoluti.

1. *Un punto sia sollecitato contemporaneamente da due moti rettilinei e naturalmente accelerati, in direzioni tra loro perpendicolari. Lo spazio che esso descriverebbe per il 1° moto isolato sarebbe di cm 72 in 3 secondi, e la velocità dopo lo stesso tempo per il 2° moto isolato sarebbe di cm 21 al secondo. Si chiede lo spazio descritto dal punto nel moto risultante, dopo 10 secondi.*

Risoluzione. — Siano a_1 ed a_2 le accelerazioni dei due moti componenti. Per la 6) del § 29 è:

$$a_1 = \frac{2s}{t^2} = \frac{2 \times 72}{3^2}\ cm/_s = 16\ cm/_s.$$

Per la 4) del § 29 è:

$$a_2 = \frac{v}{t} = \frac{21}{3}\ cm/_s = 7\ cm/_s.$$

L'accelerazione a del moto risultante, è uguale alla lunghezza dell'ipotenusa di un triangolo rettangolo, i cui cateti hanno le lunghezze rispettivamente a_1 e a_2; cioè:

$$a = \sqrt{a_1^2 + a_2^2} = \sqrt{16^2 + 7^2} = \sqrt{305} = 17{,}464\ cm/_s;$$

quindi per la 6) del § 29, lo spazio x cercato sarà:

$$x = cm\left(\frac{1}{2} \times 17{,}464 \times 10^2\right) = \text{cm } 873{,}2.$$

2. *Un corpo è sollecitato contemporaneamente da due moti rettilinei e naturalmente accelerati, in direzioni tra loro perpendicolari; l'accelerazione del primo moto è gli $^m/_n$ di quella dell'altro. Determinare la direzione del moto risultante ed i rapporti tra le accelerazioni dei moti componenti e quella del moto risultante.*

Risoluzione. — Siano a_1 e a_2 (Fig. 45) le accelerazioni dei moti componenti. È per ipotesi:

$$a_2 = \frac{m}{n}\, a_1.$$

Sia a l'accelerazione del moto risultant[illegible] tonusa di un triangolo rettangolo [illegible]

$$a^2 = a_1^2 + a_2^2 = a_1^2 \text{ [illegible] }$$

$$\frac{a_1}{a} = \frac{n}{\sqrt{m^2 + n^2}} \;; \quad \text{analogamente: } \text{ [illegible] }$$

È anche:

$$a_1 = a \cos\alpha \qquad a_2 = a \cos\beta \qquad \text{da cui:}$$

$$\cos\alpha = \frac{a_1}{a} = \frac{n}{\sqrt{m^2 + n^2}} \;; \qquad \cos\beta = \frac{a_2}{a} = \frac{m}{\sqrt{m^2 + n^2}}$$

Fig. 45

Del radicale abbiamo considerato solo il valore positivo, perchè le accelerazioni sono positive.

b) Problemi da risolvere.

1. Un punto sia sollecitato contemporaneamente da due moti rettilinei naturalmente accelerati, in direzioni tra loro perpendicolari; quali devono essere i valori delle accelerazioni di questi, perchè il punto si muova lungo la bisettrice dell'angolo delle direzioni dei moti componenti, e percorra m 160 in 8^s?

2. Un punto è sollecitato contemporaneamente da due moti rettilinei naturalmente accelerati, le cui direzioni sono a 120° tra di loro. Per effetto del primo moto solamente, il punto acquisterebbe la velocità v dopo t secondi dalla partenza. Calcolare lo spazio descritto dal punto nello stesso tempo t, sotto l'azione dei due moti contemporaneamente, supponendo che la direzione del moto risultante sia inclinata a 30° con quella del primo moto componente.

Moto rotatorio.

47. Moto circolare uniforme. — Supponiamo che un punto M (Fig. 46) si muova su una circonferenza di raggio r, con moto uniforme; lo chiameremo *moto circolare uniforme*, o anche *moto rotatorio*. Sia A l'origine del moto, e t il tempo impiegato a percorrere l'arco o spazio $\overset{\frown}{AM}$; sarà per la 2) del § 25:

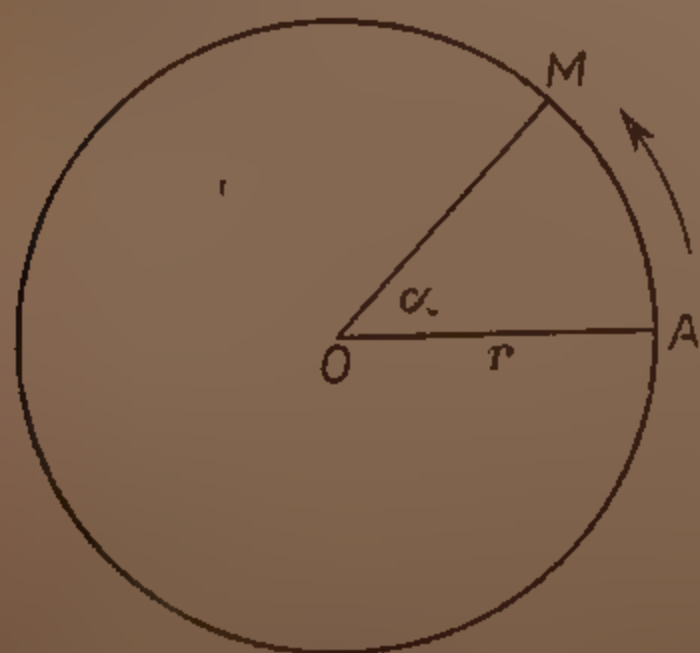



Fig. 46.

$$v = \frac{(\overset{\frown}{AM})}{t}$$

la velocità del punto sulla circonferenza; essa si chiama la **velocità tangenziale**.

Se il punto percorre l'intera circonferenza, la lunghezza dell'arco $\overset{\frown}{AM}$ diventa $2\pi r$; il tempo impiegato a descriverla si chiama il **periodo**, e s'indica con T; sarà:

$$1) \qquad v = \frac{2\pi r}{T}.$$

Consideriamo ora [illegible] nel passaggio del punto [illegible]

$$\omega = [illegible]$$

esprime *l'ampiezza dell'angolo descritto dal raggio vettore nell'unità di tempo*, e si chiama la **velocità angolare.**

Se il punto compie l'intero giro, sarà $\alpha = 2\pi$, e il tempo diventa il periodo T; quindi:

2) $$\omega = \frac{2\pi}{T}.$$

In tale formula l'angolo è misurato in **radianti**; cioè si prende come unità di misura *l'angolo che insiste su un arco di lunghezza eguale al raggio.* Come è noto:

$$\textit{1 radiante} = 180^\circ : \pi = 57^\circ 17' 44'',75 .$$

L'unità assoluta di velocità angolare sarà quella di un punto che descrive un radiante al secondo.

Praticamente si suole esprimere la velocità angolare in *gradi* per secondo; indicando con m il numero dei gradi descritto dal raggio vettore in un secondo, è:

$$m = \frac{360^\circ}{T}, \qquad \text{da cui:} \quad \frac{1}{T} = \frac{m}{360^\circ};$$

e sostituendo nella 2):

3) $$\omega = \frac{\pi}{180^\circ} m .$$

Ma più spesso, nella pratica, la velocità angolare si esprime misurando i giri compiuti dal corpo in un secondo. Se il corpo ruota con la velocità di n giri al secondo, il periodo sarà:

$$T = \frac{1}{n}, \qquad \text{e quindi dalla 1) si ricava:}$$

4) $$v = 2\pi r n, \qquad \text{e dalla 2):} \quad \omega = 2\pi n .$$

Confrontando le ultime due formule, si ha che:

5) $$v = \omega r ;$$

che è la nota relazione esistente tra la lunghezza di un arco e la misura, in radianti, dell'angolo al centro corrispondente.

48. Moto oscillatorio semplice o armonico. — Un punto M si muova su una circonferenza di centro O e di raggio r (Fig. 47) con moto uniforme e con velocità V costante. Consideriamo il piede P della perpendicolare condotta da M su un diametro fisso AA'. Nel tempo che M partendo da A compie un giro con velocità costante v, il punto P partendo da A percorre il diametro AA' nei due sensi, ritornando in A dopo il giro completo di M. Se M continua a rotare, il punto P si muove alternativamente da A in A' e viceversa. Questo moto si chiama **oscillatorio semplice o armonico.**

Si chiama oscillazione completa [illegible]
oscillazione semplice il moto da A ad A', o viceve[illegible]
completo) la durata dell'oscillazione [illegible]
distanza di P da O.

Diamo un cenno sulla qualità del moto di P, [illegible]
traiettoria AA'. *Questo moto non è uniforme*, perchè la velocità di P [illegible]
estremi A ed A' è nulla, mentre non lo è nell'intervallo intermedio. Quando P è nei dintorni di O, cioè passa da P_1 a P_2, percorre uno spazio $(P_1 P_2)$ nel tempo τ che M descrive lo spazio $(M_1 M_2)$ sulla circonferenza, (Fig. 48). Ora, se $M_1 M_2$ è piccolissimo, si può considerare come un segmento eguale (e parallelo) a $P_1 P_2$. Cioè:

Fig. 47.

$$(P_1 P_2) = (M_1 M_2);$$

e dividendo ambo i membri per τ:

$$\frac{(P_1 P_2)}{\tau} = \frac{(M_1 M_2)}{\tau}.$$

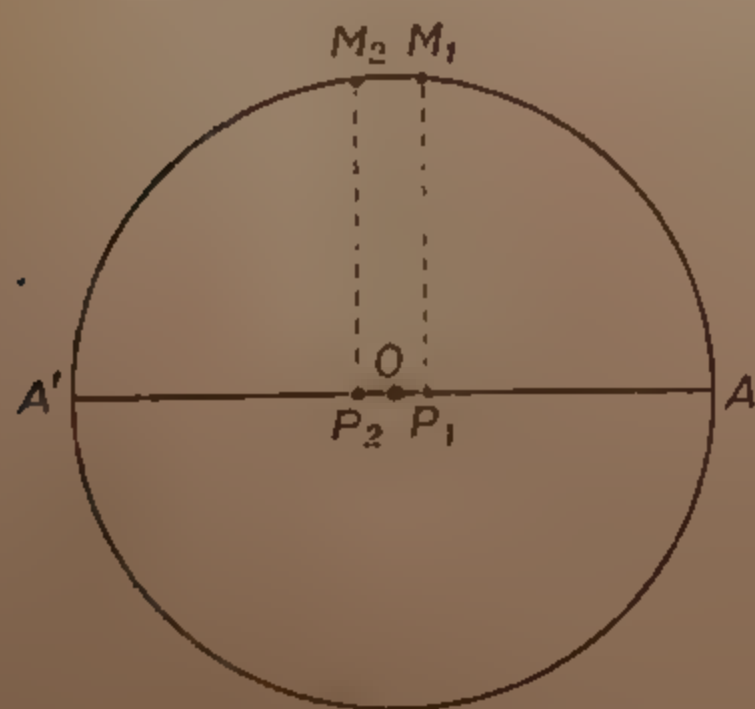
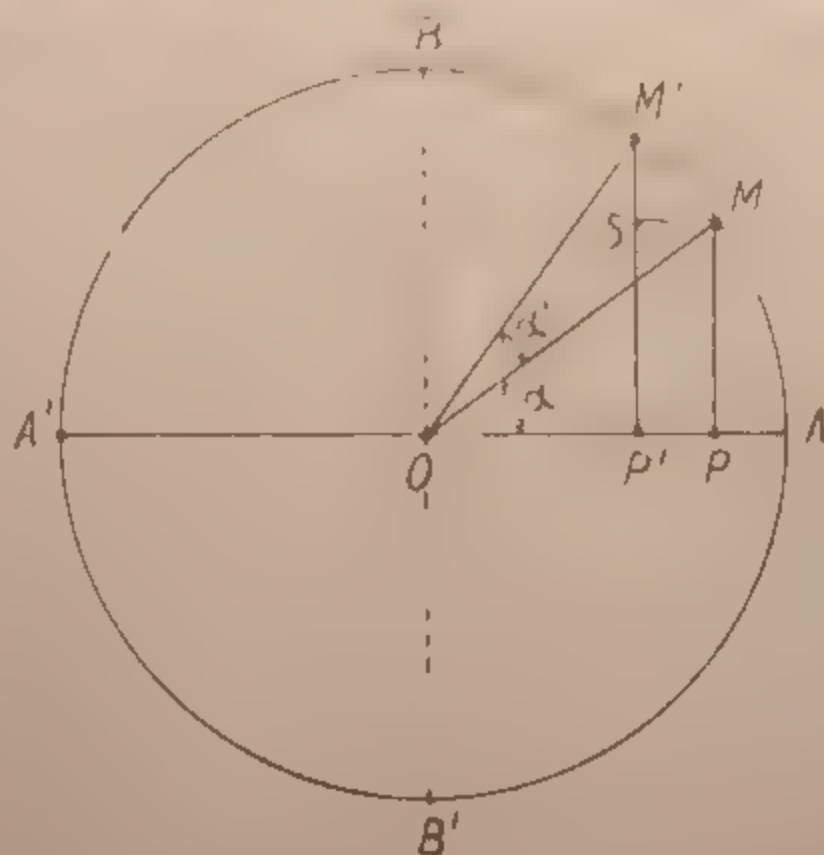
Ma per τ piccolissimo, il primo membro è uguale alla velocità v di P in O (§ 27), mentre il 2° membro è uguale alla velocità V del punto M. Quindi, in O è:

$$v = V. \tag{6}$$

Perciò, nel moto di P da A ad A', la sua velocità cresce da zero (in A) al valore (massimo) V in O; diminuisce poi da V a zero allorchè P passa da O ad A'; torna a crescere in valore assoluto, ma cambia di segno, da A' in O, per riprendere il valore zero in A. E così successivamente, e periodicamente, ad ogni giro di M.

Fig. 48.

Quindi, il moto di P è accelerato da A ad O, ritardato da O ad A', nuovamente accelerato (ma in verso opposto) da A' ad O, ed ancora ritardato da O ad A; e così via di seguito.

Per la 6), *nei dintorni di O*, in un tratto piccolissimo, *il moto è uniforme*.

49. Accelerazione nel moto armonico. — *Il moto di P dunque è vario;* è esso uniformemente vario? S'intuisce che no; perchè se attorno ad O il moto è uniforme, cioè l'accelerazione è nulla, mentre negli altri punti non lo è, vuol dire che l'accelerazione è variabile; quindi il *moto di P è vario, ma non uniformemente vario.*

Tralasciamo, per brevità, il calcolo dell'accelerazione a di P, che potremmo eseguire secondo il concetto del § 37. S'intuisce, che se l'accelerazione è

zero in O, essa aumenti (in valore assoluto) [illegible] si allontana da O, per essere massima in A [illegible].

Col calcolo si trova, che indicando con x lo *spostamen*[illegible]

7) [illegible]

Essendo V ed r costanti, la 7) ci dice che:

L'accelerazione è proporzionale allo spostamento.

Questa è la proprietà caratteristica del moto oscillatorio semplice.

Possiamo calcolare anche il periodo dell'oscillazione. Indicandolo con T, esso è anche il tempo in cui M compie un giro, cioè, per la 3) del § 25:

$$T = \frac{2\pi r}{V}, \quad \text{da cui:} \quad \frac{V}{r} = \frac{2\pi}{T}.$$

Sostituendo nella 7) si ha: $a = \frac{4\pi^2}{T^2} x$, da cui:

$$8) \qquad T = 2\pi \sqrt{\frac{x}{a}}$$

50. Accelerazione centripeta. — Ritorniamo al moto rotatorio. Sia M la posizione del punto mobile sulla circonferenza a un dato istante (Fig. 49).

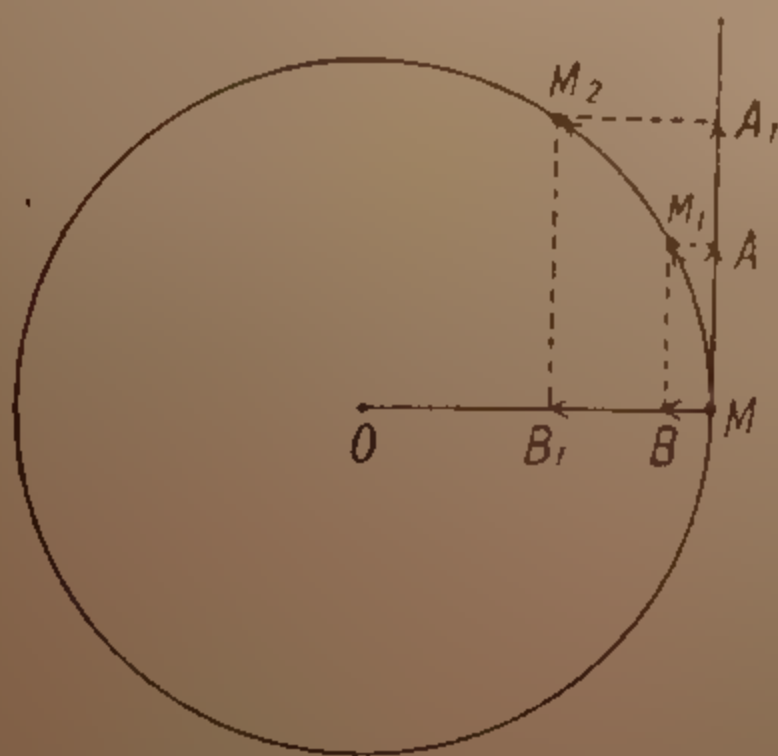



Fig. 49.

Dopo il tempo τ il punto sia in M_1; supponiamo τ così piccolo che l'arco $M M_1$ si possa considerare rettilineo e coincidente con la corda $M M_1$. Allora per il postulato di Galileo (§ 32), lo spazio $(M M_1)$ si può considerare come risultante prima da uno spostamento da M ad A lungo la tangente in M per il tempo τ, e poi da uno spostamento di A, ancora per il tempo τ, lungo $A M_1$, perpendicolare ad $A M$, cioè parallela a $M B$. Cioè $M M_1$ si può considerare che rappresenti il moto risultante di due moti componenti, rappresentati da $M A$ ed $M B$. Siano ora $M M_1$ ed $M_1 M_2$ due archi percorsi in tempi eguali, quindi eguali perchè il moto di M sulla circonferenza è uniforme; non è $MB = BB_1$; cioè il moto componente di M su MO non è uniforme, ma vario. Quindi sul moto di M sulla circonferenza agisce un'accelerazione nella direzione del raggio, da M verso il centro O, che si chiama **accelerazione centripeta.**

È facile calcolare il valore di tale accelerazione; infatti, riferendoci alla Fig. 47, l'accelerazione centripeta di M, allorchè M è in A, coincide con l'accelerazione di P, allorchè anche P è in A; cioè l'accelerazione centripeta a_0 di M, si ricava dalla 7) facendo in essa $x = OA = r$. Risulta allora:

$$9) \qquad a_0 = \frac{V^2}{r}$$

Essendo V ed r costanti, abbiamo allora
nel moto circolare uniforme, l'accelerazione centrip

51. Problemi sul moto rotatorio.

a) Problemi risoluti.

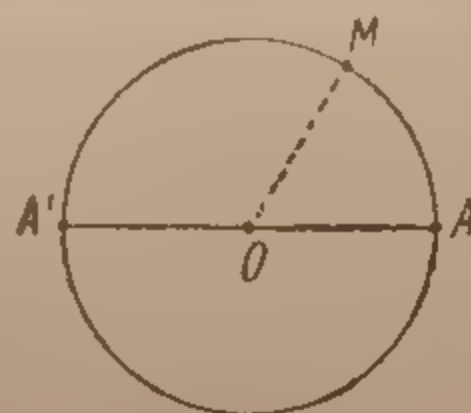
1. *Qual'è la velocità tangenziale di un punto dell'equatore terrestre?*

Risoluzione. — Ricordando la definizione di metro (§ 21), si sa che la circonferenza terrestre è di m 40000000; il periodo della rotazione terrestre è di 24 ore, cioè di 86400s. Quindi, per la 1) del § 47, la velocità richiesta è:

$$v = {}^{m}/_{s}\ \frac{40\,000\,000}{86\,400} = {}^{m}/_{s}\ 463 \text{ circa.}$$

2. *Su una circonferenza di raggio* r *si muovono di moto uniforme due punti, i quali s'incontrano ogni* t_1 *secondi se si muovono nello stesso senso e ogni* t_2 *secondi se si muovono in senso contrario. Calcolare le velocità dei due punti.*

Fig. 50.

Risoluzione. — Siano v_1 e v_2 le velocità incognite; supponiamo $v_1 > v_2$. I due punti siansi incontrati in A (Fig. 50); nel primo caso, nel tempo che il 2° punto ha percorso in t_1 secondi l'arco AM, il 1° punto ha fatto tutto un giro ed ha raggiunto il 2° nel punto M. Lo spazio descritto nel tempo t_1 da ciascuno dei punti, per la 1) del § 25 è:

Spazio descritto dal 1° punto: $2\pi r + (\widehat{AM}) = v_1 t_1$

» » » 2° » : $(\widehat{AM}) = v_2 t_1$

Sottraendo membro a membro: $2\pi r = (v_1 - v_2) t_1$; da cui:

$$10) \qquad v_1 - v_2 = \frac{2\pi r}{t_1}.$$

Nel 2° caso, nel tempo che il 2° punto percorre in t_2 secondi l'arco AM, il 1° punto percorre l'altro arco $(\widehat{AA'M}) = 2\pi r - (\widehat{AM})$.

Sempre per la 1) del § 25, sarà:

Spazio descritto dal 1° punto: $2\pi r - (\widehat{AM}) = v_1 t_2$

» » » 2° » : $(\widehat{AM}) = v_2 t_2$.

Sommando membro a membro: $2\pi r = (v_1 + v_2) t_2$; da cui:

$$11) \qquad v_1 + v_2 = \frac{2\pi r}{t_2}.$$

Le 10) e 11) formano un sistema di 1° grado rispetto alle incognite v_1 e v_2. Esso è uno dei sistemi più noti, che fornisce le soluzioni:

$$12) \qquad v_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{2\pi r}{t_2} + \frac{2\pi r}{t_1}\right) = \pi r\,\frac{t_1 + t_2}{t_1 t_2}$$

$$13) \qquad v_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{2\pi r}{t_2} - \frac{2\pi r}{t_1}\right) = \pi r\,\frac{t_1 - t_2}{t_1 t_2}.$$

Perchè la soluzione corrisponda alle ipotesi del problema [illegible]; caso contrario sarebbe $v_2 < 0$, cioè bisognerebbe invertire il senso di rotazione del 2° punto, ossia bisogna supporre che i due punti s'incontrano ogni t_1 secondi allorchè si muovono in senso contrario, ed ogni t_2 secondi allorchè si muovono nello stesso senso.

Se $t_1 = t_2$ è $v_2 = 0$; occorre cioè che il 2° punto stia fermo, e sia incontrato dal 1° punto ad ogni giro completo. In questo caso si ha, facendo nella 12) [illegible]

$$v_1 = \frac{2\pi r}{t_1};$$

che, essendo t_1 il periodo, coincide con la 1) del § 47.

b) Problemi da risolvere.

1. Le ruote maggiori di una locomotiva compiono 100 giri al minuto primo. Calcolare la velocità di un punto posto a *cm* 60 dall'asse di rotazione.

2. Le due lancette dell'orologio si coprono alle 12^h. Supposto che il loro moto sia uniforme, calcolare dopo quanto tempo: 1°, saranno nuovamente sovrapposte; 2°, saranno ad angolo retto; 3°, saranno diametralmente opposte.

3. Due mobili percorrono, con moto uniforme, due circonferenze concentriche, con periodo rispettivamente t_1 e t_2. Ogni quanto tempo essi si troveranno allineati col centro, dalla stessa parte?

4. Due punti partono contemporaneamente da una delle estremità di un diametro, di una circonferenza di raggio r. Il primo si muove sulla circonferenza con velocità angolare ω; il secondo si muove sul diametro con moto naturalmente accelerato. Quale dev'essere l'accelerazione di questo secondo punto, perchè arrivi contemporaneamente al primo all'altra estremità del diametro?

STATICA

Composizione delle forze concorrenti.

52. **Forza.** — L'osservazione giornaliera ci dice che un corpo non può passare dalla quiete al moto o viceversa, o comunque modificare il suo stato di quiete o di moto, se non interviene su di esso una spinta, una pressione, una qualche cosa, che chiamiamo **forza**, atta a produrre tale modificazione. Dunque:

Forza è tutto ciò che può modificare lo stato di quiete o di moto di un corpo.

Così, ad es., per muovere un carro occorre la forza di un cavallo; per spingere una barca occorre la forza del vento su di una vela; per far girare una ruota idraulica occorre la forza dell'acqua che cade sulle sue pale, ecc. Si noti che la modificazione del moto può consistere solo nel cambiarne la direzione, senza alterarne la natura; anche in questo caso si richiede l'azione di una forza.

Chiamiamo *costanti* le forze che mantengono invariato il loro valore, *variabili* le altre. Sono *continue* le forze che agiscono per tutta la durata del moto; *istantanee* quelle che agiscono solo per un tempo brevissimo (1). Sono *interne* le forze che agiscono fra i varî punti (molecole) del corpo; *esterne* quelle che agiscono fuori del corpo, ecc.

Si abbia una molla elicoidale di acciaio fissa in un punto A, (Fig. 51); una persona tirandola con la mano in B, l'allunga (cioè AB aumenta), ad es., di 3 *cm*. Supponiamo ora che un'altra persona, tirando la stessa molla, anche con l'asse orientato in un'altra direzione, l'allunghi ancora di 3 *cm*; diremo che le due persone hanno impiegato forze eguali. Cioè:

Fig. 51.

Due forze sono eguali, se producono allungamenti eguali di una molla, indipendentemente dalla orientazione assunta dall'asse di questa nello spazio.

Supponiamo ora che una terza persona allunghi la molla di 6 *cm*, cioè il doppio di prima; diremo che tale persona ha impiegato una forza doppia; se l'allungamento è di 9 *cm*, la forza applicata sarà tripla, ecc. Assumeremo cioè il valore di una forza proporzionale alla deformazione che essa produce sulla molla.

53. **Unità di forza - Dinamometro.** — Per esprimere allora il valore della forza con un numero, basterà fissare quale forza si assume come unità. Ora osserviamo che qualunque sia la forza ed il risultato prodotto da essa su di un corpo, si può sempre immaginare di ottenere lo stesso effetto per mezzo di un peso agente opportunamente sul corpo. Potremo quindi misurare le forze come i pesi, e assumere quale **unità pratica di forza il chilogrammo.**

(1) *Istante* in Fisica s'intende un tempo piccolissimo, ma finito, cioè misurabile: es. un millesimo di secondo.

Si potrà allora esprimere il valore [illegible] rando l'allungamento che essa produce in u[illegible] qual'è l'allungamento che produce la forza di 1 *kg*. [illegible] recchio fondato su tale principio si chiama dinamometro. Si costruiscono dinamometri di forma diversa, a seconda della forma che si dà alla molla. Uno dei più comuni è quello della Fig. 52. È costituito da una molla *M* di acciaio a forma di elica, contenuta in un astuccio di metallo; un estremo della molla è fisso ad un anello *A*, che sostiene tutto l'apparecchio. All'altro estremo è attaccata un'asticella che esce dall'astuccio e porta un gancio *G*, a cui si applica la forza da misurare. Sotto l'azione della forza la molla si allunga ed un indice *I*, fissato all'estremità inferiore di essa, si sposta su una graduazione; sulla divisione a cui si ferma l'indice, si legge il valore della forza. La graduazione si fa, segnando 0 (zero) nel punto in cui si trova l'indice, quando sul gancio non agisce alcuna forza. Poi si applica al gancio un peso noto, ad es. *kg* 6, e si segna 6 nel punto in cui l'indice si ferma sotto l'azione di tale peso; si divide l'intervallo 0 — 6 in 6 parti eguali, e se vi è posto si estende la graduazione oltre il 6. Se l'intervallo lo consente, si può suddividere ciascuna divisione in altre parti eguali, ed ottenere così le frazioni di *kg*.

I dinamometri sono apparecchi poco sensibili; inoltre non sono esatti, perchè col tempo varia l'elasticità della molla.

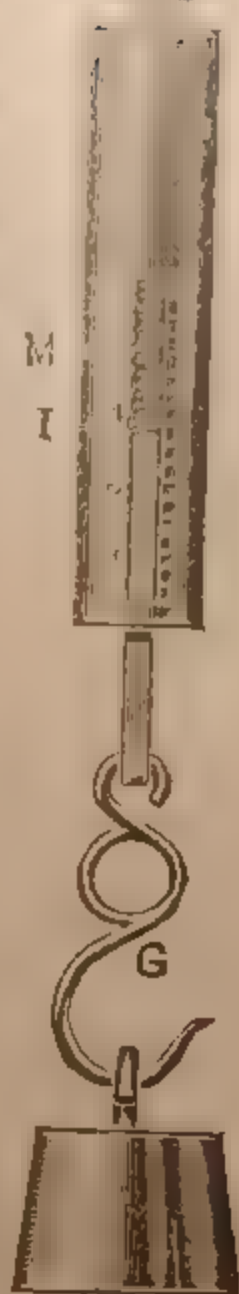



Fig. 52.

54. Caratteri distintivi delle forze. — Fissiamo in una morsa *B* (Fig. 53) un estremo di un'asticella di acciaio; applichiamo all'altro estremo *A* una funicella *AC* e tiriamola con la mano; cioè applichiamo una forza. L'asticella si piegherà; l'effetto prodotto dipenderà da quattro condizioni distinte della forza applicata:

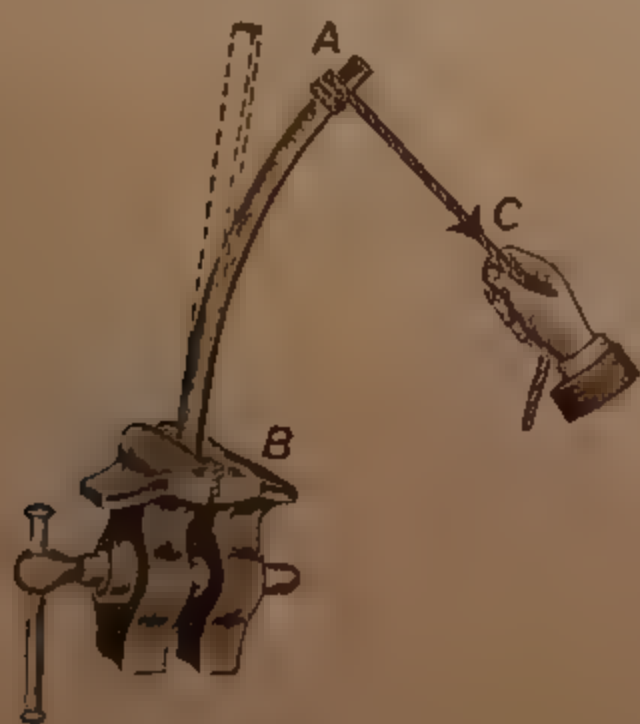



Fig. 53.

1. **Il punto di applicazione** *A*; cioè il punto del corpo in cui la forza agisce.

2. **La direzione**; cioè la retta lungo cui la forza agisce; in Fig. 53 è data dalla direzione in cui è tesa la fune.

3. **Il verso**; essendovi sulla stessa retta, a partire da *A*, due semirette in versi opposti.

4. **L'intensità**; cioè il valore della forza, come è misurata dal dinamometro.

Si vede adunque, che una forza è una *grandezza vettoriale* (§ 39).

55. Rappresentazione grafica delle forze. — I problemi sulle forze si risolveranno con figure geometriche; occorre pertanto che si possa rappresentare graficamente una forza, coi suoi caratteri distintivi. Ciò si fa semplicemente con un segmento *OA* (Fig. 54) di cui l'estremo *O* rappresenta il punto di applicazione; la retta a cui appartiene *OA* indica la direzione

della forza; la freccia in A indica il verso; la lunghezza (OA) rap[illegible] l'intensità. La lunghezza del segmento cioè si prende proporzionale alla intensità della forza; quindi stabilito, ad es., che 1 *mm* rappresenti l'intensità di 1 *kg*, un segmento lungo 18 *mm* rappresenta una forza dell'intensità di 18 *kg*.

Fig. 54.

Si vede adunque, che anche una forza è rappresentata da un *vettore* (§ 39).

In seguito, per semplicità, chiameremo *forza OA*, o anche *forza A*, una forza *rappresentata* dal vettore OA.

56. **Equilibrio - Forze componenti - Risultante.** — Può darsi che pur applicando allo stesso corpo due o più forze, non venga alterato lo stato di quiete o di moto del corpo. Così avviene, p. es., per due persone A_1 e A_2 che tirino con eguali forze F_1 ed F_2 la stessa fune, come in Fig. 55. Si dice allora che le forze *sono in* (o si fanno) *equilibrio*. È errore dire che due forze in equilibrio *si distruggono*; esse sussistono sempre, pur non movendo il corpo; infatti questo può deformarsi e anche rompersi. Per questo nelle considerazioni che faremo in seguito, supporremo sempre che il corpo sia indeformabile, cioè *rigido*.

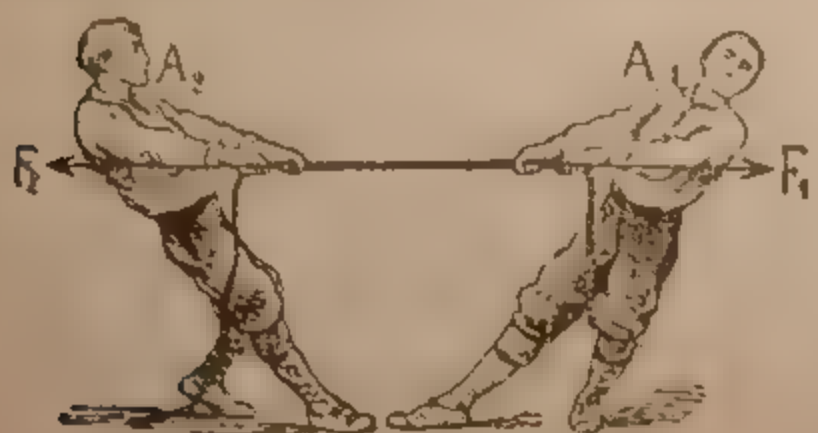



Fig. 55.

Se più forze in equilibrio non alterano lo stato di un corpo, aggiungendo o togliendo più forze in equilibrio ad un sistema dato di forze, si ottiene un altro sistema equivalente al primo.

La Statica *studia le condizioni di equilibrio delle forze nei corpi*; cioè: data una o più forze, trovare quale forza fa ad esse equilibrio. Chiamasi **equilibrante** di alcune forze assegnate, la forza che fa ad esse equilibrio.

Risultante di due o più forze date è la forza unica che è ad esse equivalente.

Il caso più semplice dell'equilibrio è quello di due *forze contrarie*; cioè due forze che hanno la stessa intensità e la stessa direzione, ma hanno verso contrario, e sono applicate o nel medesimo punto, o in punti diversi di un corpo rigido, giacenti sulla direzione comune delle due forze. Es. le forze OA ed OB della Fig. 56. A questo caso si riconducono tutti gli altri della Statica. Infatti, per trovare la equilibrante di più forze date, basta prima trovarne la risultante, e poi applicare la forza contraria ad essa. Ecco perchè nella Statica ci limitiamo a trovare nei varî casi *la risultante delle forze date*.

B O A

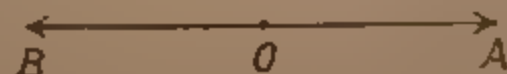



Fig. 56.

Trovare la risultante di più forze si dice *comporre* queste forze; le forze di cui si cerca la risultante si chiamano **componenti**. I problemi si risolvono tutti graficamente, operando sui segmenti che rappresentano le forze.

Osservazioni. *In un sistema di forze in equilibrio, la risultante è zero.* In un sistema in equilibrio, una qualunque delle forze si può considerare come equilibrante delle altre.

Se alcune forze F_1, F_2... fanno ciascuna separatamente equilibrio alla stessa forza F, le forze F_1, F_2,... sono equivalenti; ed in generale:

Due sistemi di forze, equilibrate da un terzo, sono equivalenti tra di loro.

57. Spostamento del punto d'applicazione. — [illegible] come in Fig. 53, una forza agente su un corpo per [illegible]

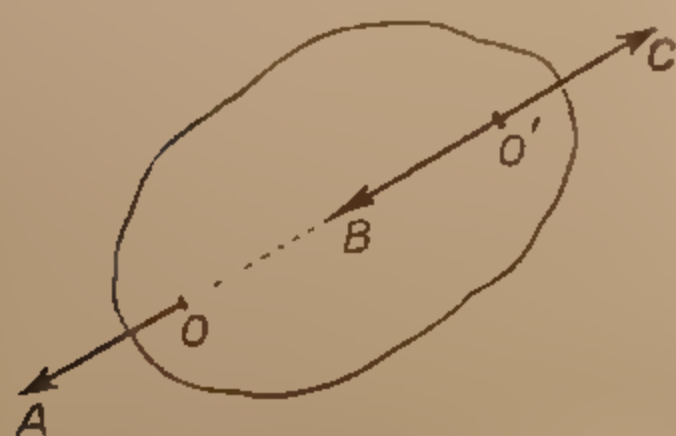



Fig. 57.

Evidentemente purchè la [illegible] della stessa intensità e la fune sia tes[illegible] nella stessa direzione, l'effetto sul corpo [illegible] lo stesso ovunque si applichi la mano per [illegible], cioè sia più corta o più lunga la fune. Quindi:

L'effetto di una forza non varia comunque se ne sposti il punto di applicazione lungo la direzione di essa.

Una dimostrazione più razionale è la seguente:

Sia OA una forza applicata in un punto O di un corpo rigido; applichiamo in un altro punto O' dello stesso corpo, sulla retta AO, due forze $O'B$ ed $O'C$, della stessa intensità e nella stessa direzione di OA, ma di verso contrario (Fig. 57); $O'B$ ed $O'C$ si fanno equilibrio, quindi la forza OA ed il sistema delle 3 forze OA, $O'B$, $O'C$ sono equivalenti (§ 56). Ma poichè tanto OA che $O'B$ fanno equilibrio ad $O'C$, è OA equivalente ad $O'B$.

58. Composizione di forze aventi la stessa direzione. — Supponiamo due forze agenti sulla stessa retta; per il principio del § 57, possiamo supporre in ogni caso che siano applicate nel medesimo punto.

1° caso. *Le forze abbiano il medesimo verso.* È chiaro, come postulato, che: *la risultante di due forze aventi eguale la direzione e il verso, è una forza avente direzione e verso eguale alle componenti, ed intensità eguale alla somma delle intensità di queste.*

O A B R

OA, OB componenti
OR = OA + OB risultante.

Fig. 58.

La Fig. 58 rappresenta questo caso.

2° caso. *Le forze abbiano verso contrario.* Anche ora ammettiamo come manifesto che: *la risultante di due forze (disuguali) aventi eguale direzione, ma verso contrario, è una forza avente direzione eguale alle componenti, verso concorde con la forza maggiore ed intensità eguale alla differenza delle intensità di queste.* La Fig. 59 rappresenta questo caso.

B O R A

OA, OB componenti
OR = OA − OB risultante.

Fig. 59.

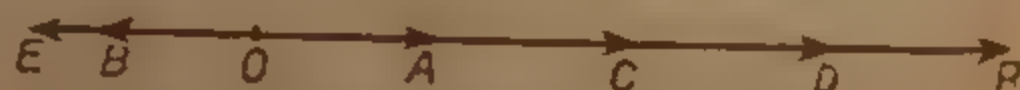
E B O A C D R

Componenti: OA = 12; OB = −10; OC = 25; OD = 38; OE = −15.
Risultante: OR = 12 − 10 + 25 + 38 − 15 = 50.

Fig. 60.

3° caso. *Le forze siano un numero qualsiasi.* Siano n forze nella stessa direzione, alcune in un verso, altre in verso contrario. Si potranno comporre le forze aventi un verso, e trovarne la risultante, che per il 1° caso ha intensità uguale alla loro somma; poi si comporranno le forze aventi verso opposto, e si troverà un'altra risultante, di intensità eguale alla somma di queste altre forze; e poi si troverà la risultante di queste due risultanti, che per il 2° caso avrà per intensità la differenza di esse. Ora, se conveniamo di prendere come positive le forze dirette in un dato verso, p. es., a destra nella Fig. 60, e negative quelle dirette in verso contrario, è evidente che:

La risultante di n *forze aventi la stessa direzione e qualsiasi verso, è eguale alla somma algebrica delle forze componenti, ed è nella direzione di esse.*

59. Forze concorrenti - Regola del parallelogrammo. [illegible] due forze OA, OB (Fig. 61), [illegible] applicate nello stesso punto O. Si chiamano *forze concorrenti*, o *ad angolo*. La loro risultante si trova con la regola del parallelogrammo:

La risultante di due forze concorrenti in un punto, è rappresentata in intensità, direzione e verso, dalla diagonale del parallelogrammo costruito sui segmenti che rappresentano le forze componenti.

Fig. 61.

Quindi se da A conduciano la parallela ad OB, e da B la parallela ad OA, queste parallele s'incontrano in un punto R (perchè parallele a due rette che s'incontrano); $OARB$ è un parallelogrammo, di cui la diagonale OR *rappresenta* la risultante cercata.

Dimostriamo questa regola con l'esperienza.

Per ciò disponiamo su una tavoletta verticale due carrucole M ed N, sulle quali scorrono i due fili OMP ed ONQ (Fig. 62). Al capo dell'uno è attaccato un peso P, p. es. di 2 *kg*; al capo dell'altro è attaccato un peso Q, p. es. di 3 *kg*. Questi due pesi sono le due forze componenti. Per azione delle carrucole (come si vedrà al § 90), la forza P è come se agisse sul punto O nella direzione del filo OM; possiamo rappresentarla con OA; parimenti la forza Q è rappresentata da OB. Componendo le due forze con la regola del parallelogrammo, se ne trova la risultante OE; orbene questa risulta di 4 *kg*, e verticale. Infatti, attaccando in O un peso T di 4 *kg*, che agisca verticalmente senza carrucola, il sistema rimane in equilibrio; cioè la equilibrante di P e Q è appunto il peso T, contraria alla risultante OE.

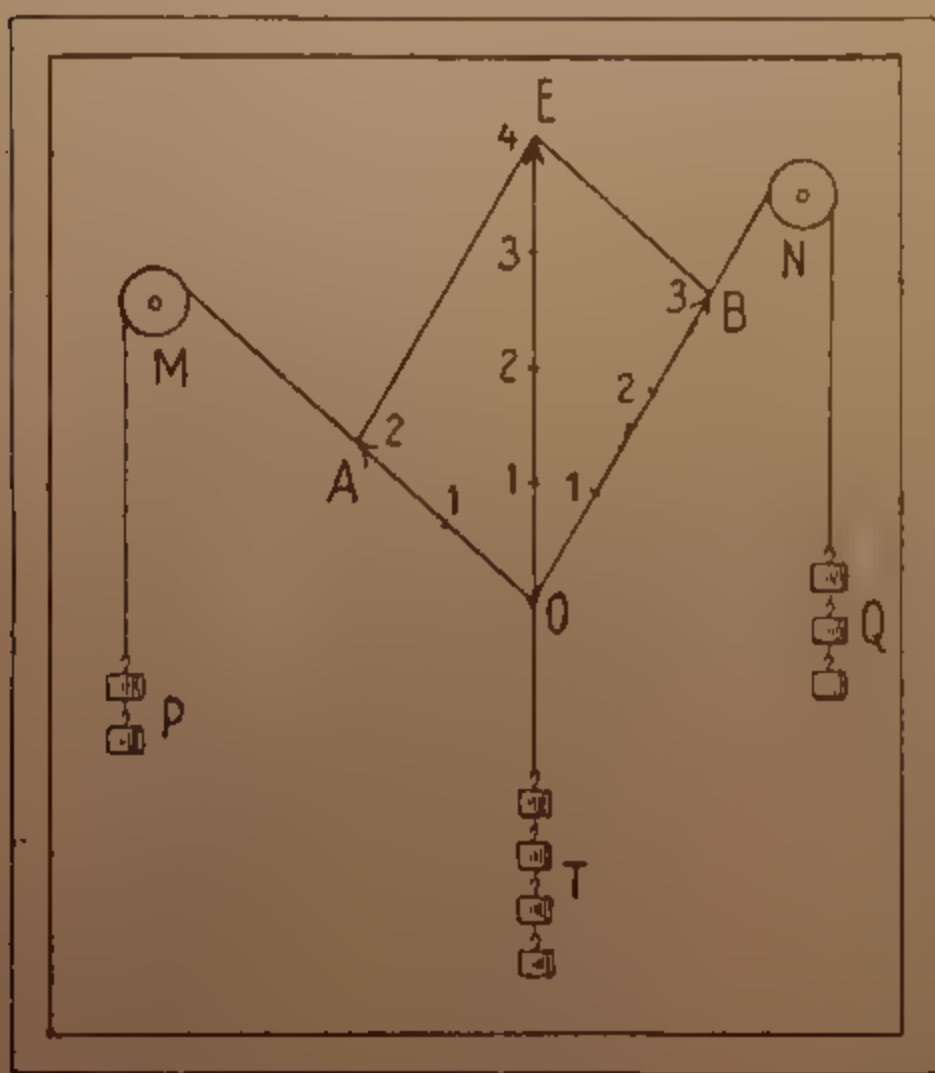
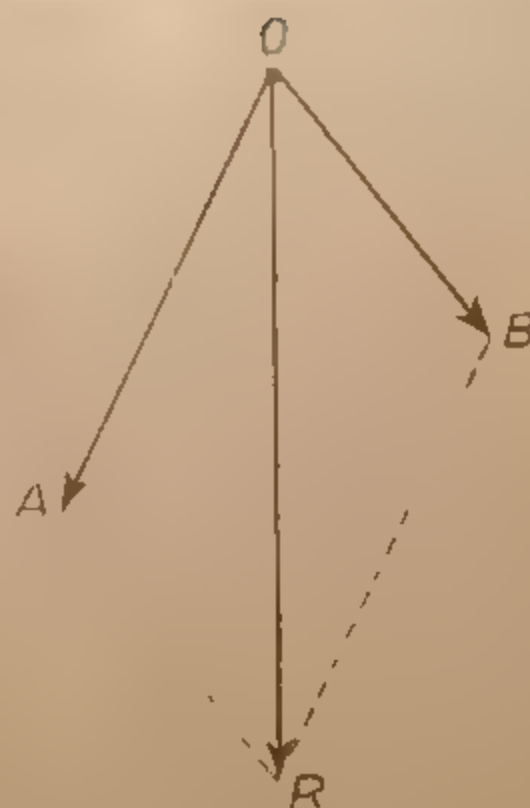



Fig. 62.

Il valore della risultante non dipende solo dalle intensità delle componenti; ma anche dall'angolo delle loro direzioni. Così, in Fig. 63 le componenti OA ed OB hanno ancora la stessa intensità che in Fig. 61; ma la risultante è diversa. Nell'esperienza precedente l'equilibrio avviene solo nelle condizioni della Figura; tirando con la mano il punto O più in basso (con che varia l'angolo delle due componenti) e poi lasciando andare, il sistema non rimane fermo; ma O risale sino alla posizione primitiva.

Fig. 63.

Si noti anche che la risultante *non è la somma* del[illegible] può perfino essere minore di ciascuna delle compon[illegible], [illegible] se le direzioni di queste fanno un angolo molto ottuso.

Il 1° e il 2° caso del § 58 si possono considerare come [illegible] del parallelogrammo delle forze; il 1° caso è quando l'angolo delle componenti è zero; il 2° caso quando tale angolo è di 180°.

60. Forze ad angolo applicate in punti diversi. — Siano ora due forze AP, BQ applicate in due punti diversi di un corpo rigido, (Fig. 64). Si prolungano i segmenti che rappresentano le forze, fino ad incontrarsi (per ipotesi) in un punto O. Si trasporta AP in OP_1 (§ 57) e BQ in OQ_1; le forze OP_1 ed OQ_1 sono equivalenti alle AP e BQ date; quindi basta trovare la risultante di OP_1 e OQ_1. Ma per queste si applica la regola del parallelogrammo; onde la risultante cercata è la OR. Se O è fuori del corpo si può spostarlo su OR in modo che la risultante venga applicata in un punto del corpo.

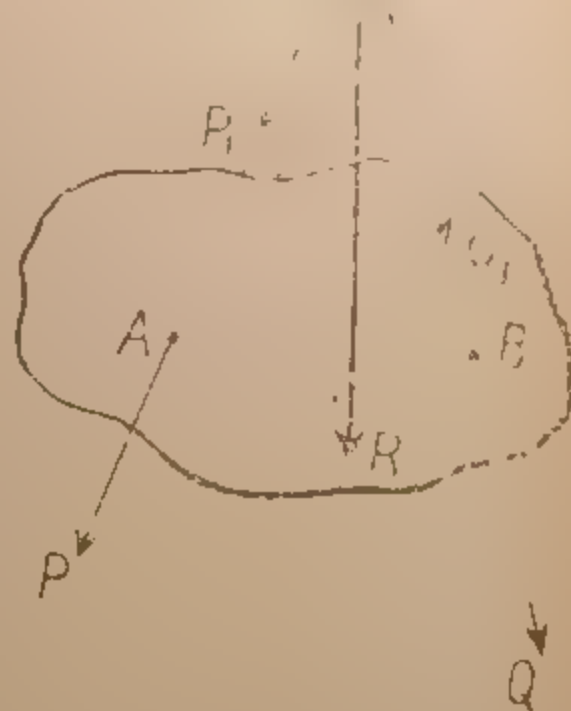



Fig. 64.

61. Poligono delle forze. — Abbiasi ora da trovare la risultante di più forze ad angolo, applicate nello stesso punto. Siano OA, OB, OC, OD ...

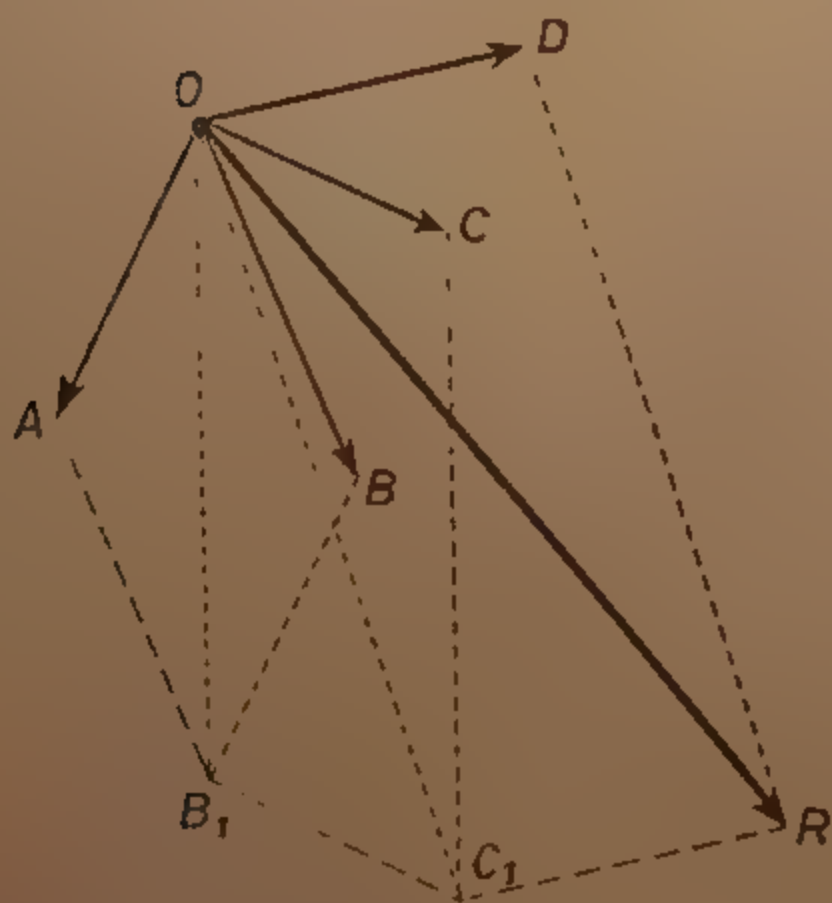
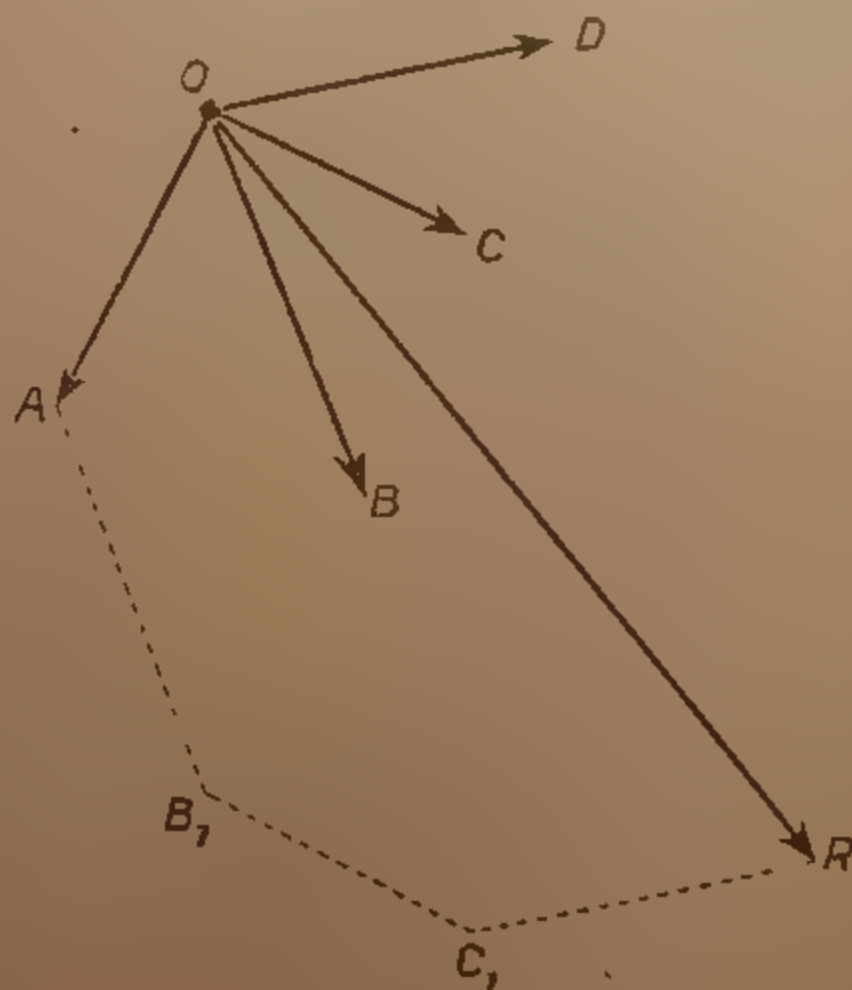



Fig. 65. Fig. 66.

(Fig. 65) le componenti; cerchiamo dapprima, con la regola del parallelogrammo, la risultante OB_1 di due componenti OA ed OB; poi la risultante OC_1 di OB_1 e di una terza componente OC; poi la risultante OR di OC_1 ed OD; quest'ultima è la risultante cercata.

Ma per trovare la OR non era necessario costruire tutta la Figura precedente. Osservando che AB_1 è uguale e concorde ad OB perchè lati

opposti di un parallelogrammo, [illegible] $B_1C_1 = OC$, $C_1R = OD$, si può trovare la OR costruendo solo la spezzata OAB_1C_1R (Fig. 66); cioè:

La risultante di più forze concorrenti in un punto è rappresentata dal lato che chiude la linea poligonale, i cui lati sono eguali, paralleli e concordi ai segmenti che rappresentano le forze componenti.

Osservazioni. La costruzione è indipendente dall'ordine con cui vengono tracciati i segmenti paralleli a quelli che rappresentano le forze componenti.

La costruzione rimane pure invariata se le forze componenti non giacciono sullo stesso piano.

Se il punto R cade in O, la risultante è zero, e le forze date sono già in equilibrio, (vedi osservazione del § 56).

In tutti i problemi precedenti, considerando i segmenti che rappresentano le forze componenti come vettori, abbiamo che in ogni caso:

La risultante di più forze componenti, è rappresentata dal vettore somma dei vettori che rappresentano le forze componenti.

62. **Scomposizione di una forza in due.** — Sia data una forza, e si vogliano trovare due forze che insieme siano equivalenti ad essa. Si tratta di co-

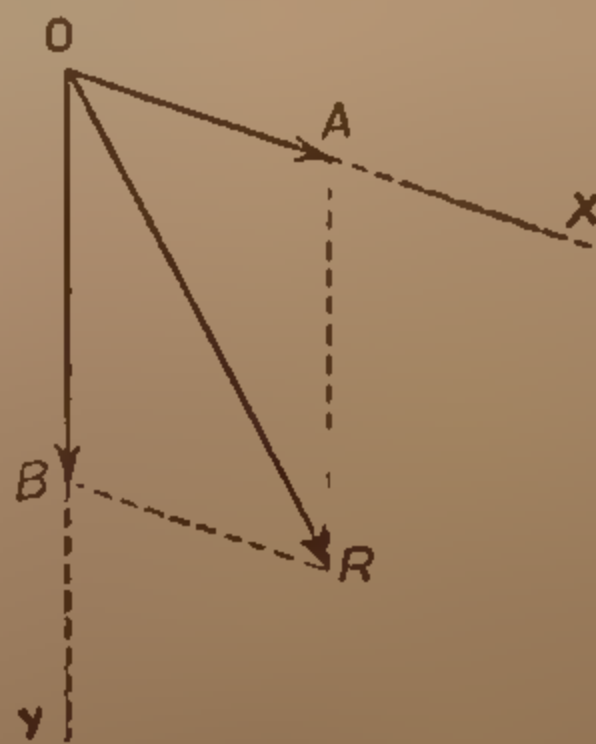



Fig. 67. Fig. 68.

struire un parallelogrammo, datane una diagonale. Ciò si può fare in infiniti modi, essendovi quanti parallelogrammi si vogliono che hanno la stessa diagonale AR, (Fig. 67).

Il problema ammette quindi infinite soluzioni, cioè è indeterminato. Per determinarlo occorre dare altre condizioni. Solitamente si assegnano le direzioni delle componenti cercate; la Fig. 68 indica la soluzione. Sia OR la forza da scomporre e x, y le direzioni assegnate per le componenti cercate; da R si conducono le parallele RA ed RB alle rette x ed y, fino ad incontrarle nei punti A e B; OA ed OB rappresentano le componenti cercate. Il caso più frequente è quello in cui le direzioni delle componenti siano tra loro perpendicolari.

Se è data la forza OR da scomporre, e una delle componenti OA, (Fig. 68), si può trovare l'altra componente. Perciò si congiunge R con A; poi da R si conduce RB parallela ad OA, e da O si conduce OB parallela ad AR; queste due semirette s'incontrano in B, ed OB rappresentata, in intensità, direzione e verso, la componente cercata.

63. Problemi sulle forze concorrenti.

a) Problemi risoluti.

1. *Due forze, la cui intensità è di kg 25 e kg 40 rispettivamente, [illegible] a un punto, nella direzione di due semirette tra loro perpendicolari, [illegible] punto. Determinare l'intensità e la direzione della risultante.*

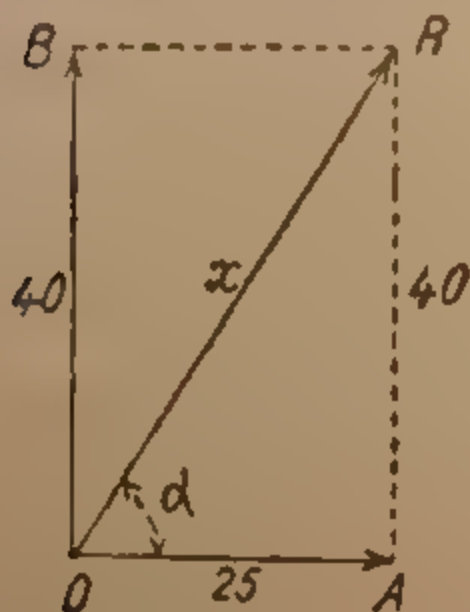



Fig. 69.

Risoluzione. — In questo caso, la [illegible]grammo delle due forze, di lunghezza x, è l'ipotenusa di un triangolo rettangolo, i cui cateti sono lunghi rispettivamente 25 e 40, (Fig. 69). Quindi, per il teorema di Pitagora,

$$x = \text{kg}\sqrt{25^2 + 40^2} = \text{kg}\sqrt{2225} = \text{kg } 47,17.$$

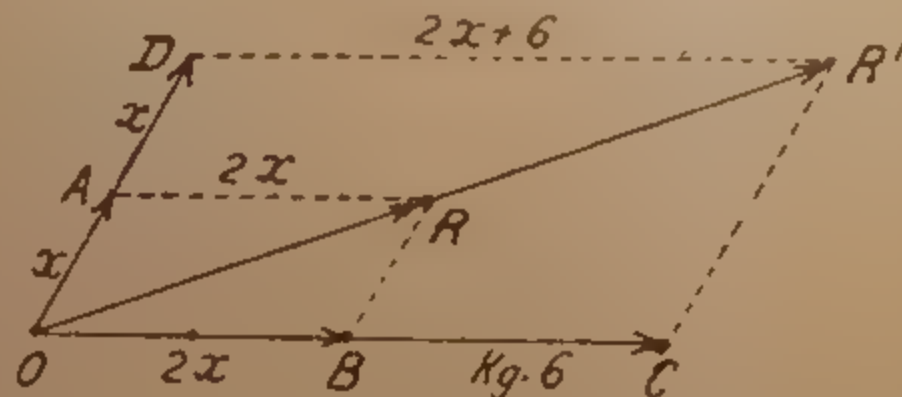
Indicando con a l'ampiezza dell'angolo che la direzione della risultante forma con quella della componente OA, è:

$$(OA) = x \cos a\,; \qquad \text{da cui:} \qquad \cos a = \frac{25}{47,17} = 0,53$$

a cui corrisponde: $\quad a = 57^\circ\, 59'\, 42''$.

2. *Due forze, una doppia dell'altra, agiscono sullo stesso punto; e sono tali che se si aggiunge* kg 6 *alla maggiore e si raddoppia la minore, la direzione della risultante non cambia. Calcolare ciascuna delle forze.*

Fig. 70.

Risoluzione. – Siano $(OA) = x$, $(OB) = 2x$, le componenti date (Fig. 70); la loro risultante sia OR. Siano ora $(OC) = 2x + 6$ e $(OD) = 2x$, le componenti nella seconda ipotesi, e sia OR' la loro risultante. I triangoli OAR e ODR' sono simili, per avere l'angolo in O in comune, e i lati opposti ad esso paralleli; quindi:

$$OA : OD = AR : DR' \qquad \text{o anche:} \qquad x : 2x = 2x : (2x + 6).$$

Risolvendo la proporzione, e ordinando, si ricava:

$$2x^2 - 6x = 0 \qquad \text{o anche:} \qquad x\,(x - 3) = 0.$$

Questa equazione è soddisfatta per: $x_1 = 0$ e $x_2 = 3$. La prima soluzione non conviene, quindi rimane: $x = 3$, che è il valore cercato. La soluzione è indipendente dall'angolo delle componenti; essa era anche subito intuibile, perchè se $OA = AD$, dev'essere anche: $OB = BC$; cioè: $2x = 6$ ed $x = 3$.

b) Problemi da risolvere.

Di tutti i problemi proposti, si farà la soluzione grafica e quella analitica.

1. Due cavalli trascinano una barca lungo un canale, tirandola dalle due rive, con funi tra loro perpendicolari, l'uno esercita sulla fune la forza di 80 *kg*, l'altro di 100 *kg*. Trovare la forza con cui la barca è spinta lungo il canale.

2. Per quale valore dell'angolo di due forze componenti, queste e la loro risultante hanno eguale intensità?

3. Quattro forze dell'intensità di *kg* 3, 4, 5, 6 rispettivamente, agiscono sul centro di figura di un quadrato, nelle direzioni delle diagonali, prese in ordine. Si trovi la loro risultante. (Comporre la 1ª con la 3ª, poi la 2ª con la 4ª, poi le due risultanti trovate).

4. [illegible] ... prima forza con la 3ª...

5. [illegible] ... intensità della risultante. Numerate in ordine consecutivo [illegible] si trovino le risultanti della 1ª e 2ª forza, poi della 3ª e 5ª, esse risultano [illegible] direzione...).

6. Decomporre una forza di *kg* 12 in altre due, in modo che una delle componenti sia di *kg* 3 e perpendicolare alla forza data.

7. Decomporre una forza di *kg* 12 in altre due di *kg* 5 e *kg* 10; calcolare l'angolo delle direzioni delle componenti.

8. Due forze, le cui intensità stanno tra loro come $m : n$, agiscono ad angolo retto su di un punto, e la loro risultante ha l'intensità r. Calcolare il valore delle forze componenti; caso particolare: $m = 3$, $n = 4$, $r = kg\ 15$.

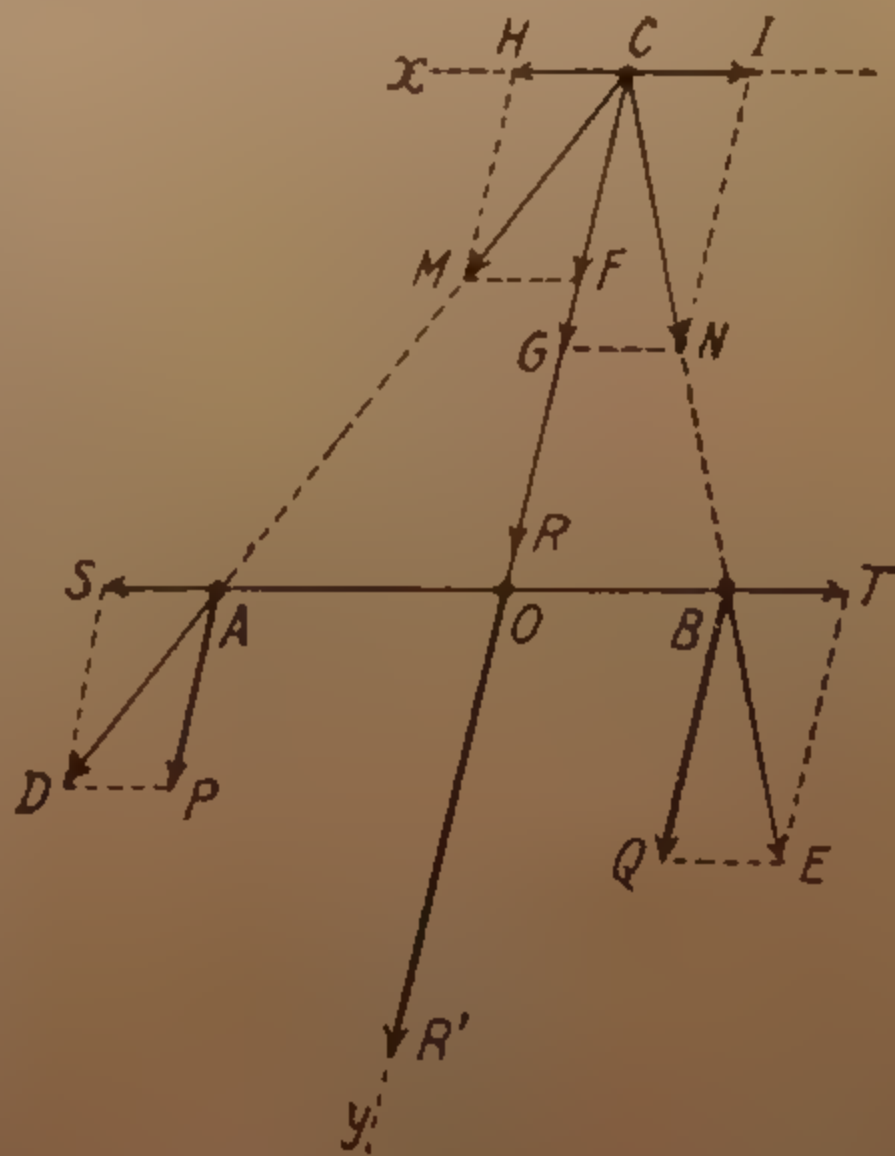
Composizione delle forze parallele.

64. Forze parallele. — Vogliamo ora studiare la composizione di forze parallele: naturalmente esse saranno applicate in punti diversi, che supporremo **rigidamente uniti.** Si chiamano in tal modo punti, la cui mutua distanza non varia, comunque si muova il corpo a cui appartengono, sotto l'azione delle forze ad esso applicate. Supporremo dapprima che le forze siano due; consideriamo tre casi:

65. 1° caso: Forze parallele e concordi. — Chiamiamo *concordi* forze parallele aventi lo stesso verso.

Fig. 71.

Siano AP e BQ le forze da comporre, (Fig. 71). Applichiamo in A e B due forze di intensità eguale AS e BT, nella direzione della congiungente AB, ma in verso contrario; esse sono in equilibrio (§ 56). Quindi il sistema delle due forze parallele date è equivalente a quello delle quattro forze P, Q, S, T; e la risultante di queste sarà anche la risultante delle P e Q.

Componiamo dapprima le P ed S, e sia D la loro risultante; componiamo poi le Q e T, e sia E la loro risultante. Il sistema dato è allora equivalente al sistema D ed E. Queste sono forze concorrenti; sia C il punto d'incontro delle loro direzioni; trasportiamo (§ 57) AD in CM e BE in CN; il sistema dato è equivalente a quello delle forze M e N. Conduciamo da C le parallele: x ad AB ed y ad AP. Scomponiamo (§ 62) CM nelle due CH e CF, e parimenti CN nelle due CI e CG; il sistema dato sarà equivalente all'insieme delle quattro forze: H, F, G, I.

Ora il triangolo HCM è uguale al triangolo SAD per avere $CM = AD$ per ipotesi, $HCM = SAD$ perchè angoli corrispondenti fra le parallele HC ed SA tagliate dalla trasversale CD, ed $HMC = SDA$ per ragione analoga; quindi sarà:

$$CH = AS \quad \text{e} \quad CF = AP.$$

Analogamente si ricava:

$$CI = BT \quad \text{e} \quad CG = BQ.$$

Ma $AS = BT$ per ipotesi, quindi anche $CH = CI$; cioè le forze H ed I sono contrarie e perciò si fanno equilibrio e si possono trascurare. Il sistema dato equivale in conclusione alle due forze CF e CG. Ma queste sono nella condizione del 1º caso, § 58; quindi la loro risultante è rappresentata da:

$$CR = CF + CG = AP + BQ.$$

Abbiamo così intanto che: *la risultante è parallela alle componenti date, e la sua intensità è uguale alla somma delle intensità di esse.*

Sia O il punto d'incontro della y con AB; (se y è parallela ad AP e questa incontra la AB, l'incontra anche la y). Per essere CH e CI opposti rispetto a C, anche CA e CB sono in semipiani opposti rispetto alla y; quindi O è interno al segmento AB. I triangoli CMF e CAO sono simili, per avere l'angolo MCF in comune ed i lati opposti ad esso paralleli; quindi si ha:

$$1) \qquad AO : CO = FM : CF.$$

Analogamente, dai triangoli simili NGC e BOC si ricava:

$$2) \qquad OB : CO = GN : CG$$

osserviamo che $FM = CH$ e $GN = CI$, perchè lati opposti di un parallelogrammo; e siccome $CH = CI$ per dimostrazione precedente, sarà anche $FM = GN$. Allora, dividendo la 1) per la 2), si ricava:

$$AO : OB = CG : CF.$$

Ma $(CG) = Q$, $(CF) = P$, quindi:

$$(AO) : (OB) = Q : P.$$

Cioè: *la direzione della risultante divide AB in parti inversamente proporzionali alle intensità delle componenti date.*

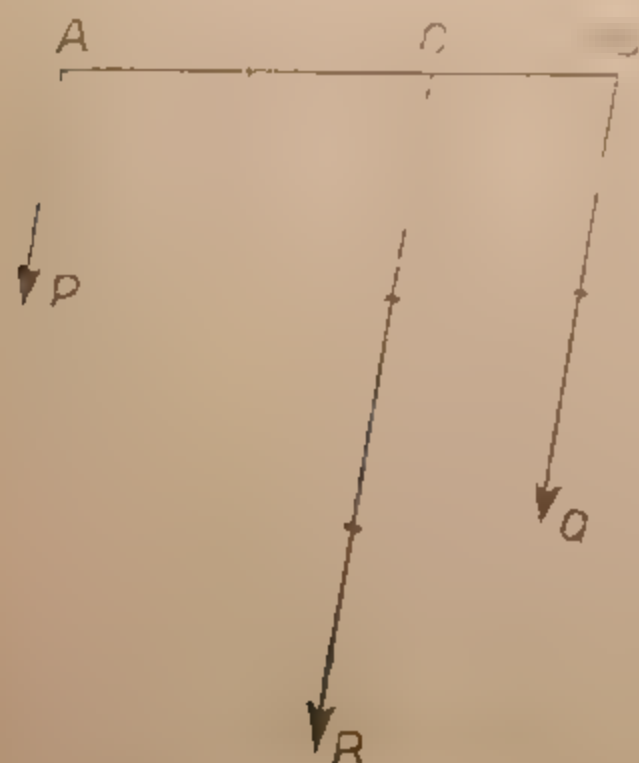
Per il principio del § 57, si può prendere O come punto d'applicazione della risultante, e questa sarà rappresentata da OR'.

Raggruppando i risultati ottenuti col ragionamento, si può enunciare la seguente regola:

La risultante di due forze parallele e concordi è parallela e concorde con esse, ha intensità uguale alla loro somma e la sua direzione divide il segmento congiungente i punti di applicazione delle forze date, in parti inversamente proporzionali alle intensità delle componenti medesime.

Questo caso è rappresentato graficamente nella Fig. 72.

Ne facciamo la verifica sperimentale nella seguente maniera. Sospendiamo alle estremità A e B di un regolo, tale che $AB = cm\ 60$ (Fig. 73), due pesi: $P = kg\ 1$ e $Q = kg\ 2$, che costituiscono le due forze componenti, verticali cioè parallele, dirette entrambe verso il basso. La loro risultante R_1 sarà anch'essa verticale, diretta in basso, e sarà applicata in punto O tale che:

cioè in un punto O a cm 40 ...
per mezzo di un peso $R = P$ ...

AP e BQ componenti
OR = AP + BQ risultante
AO : OB = BQ : AP
Fig. 72.

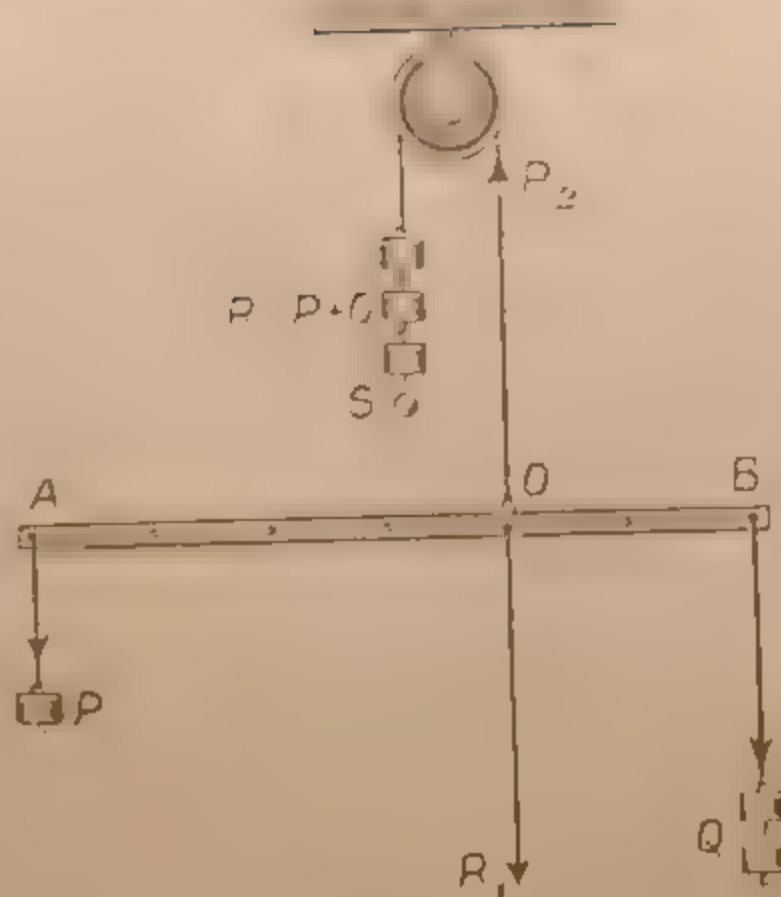



Fig. 73.

una carrucola, ed attaccato in O; il peso R è equivalente alla equilibrante R_2 della risultante R_1. Occorre ad R aggiungere un pesetto S che faccia equilibrio al peso del regolo AB.

66. 2° caso: Forze parallele, discordi, disuguali.

Siano P e Q le forze da comporre, (Fig. 74); e sia $Q > P$. Sul prolungamento di AB, dalla parte della forza maggiore, prendiamo un punto C, tale che sia:

$$3) \qquad (CA) : (CB) = Q : P.$$

Applichiamo in C due forze CM e CN, parallele alle date, in verso contrario, di intensità eguale alla differenza $Q - P$.

Esse si fanno equilibrio; quindi il sistema dato (P, Q) è equivalente a quello (P, Q, M, N). Componiamo le P ed N; esse sono concordi; quindi per il caso precedente, la loro risultante sarà applicata in un punto O tale, che:

$$(AO) : (CO) = N : P; \qquad \text{ma:}$$

$$N = Q - P, \qquad \text{quindi:}$$

$$(AO) : (CO) = (Q - P) : P;$$

componendo:

$$(AO + CO) : (CO) = Q : P;$$

ossia:

$$(CA) : (CO) = Q : P.$$

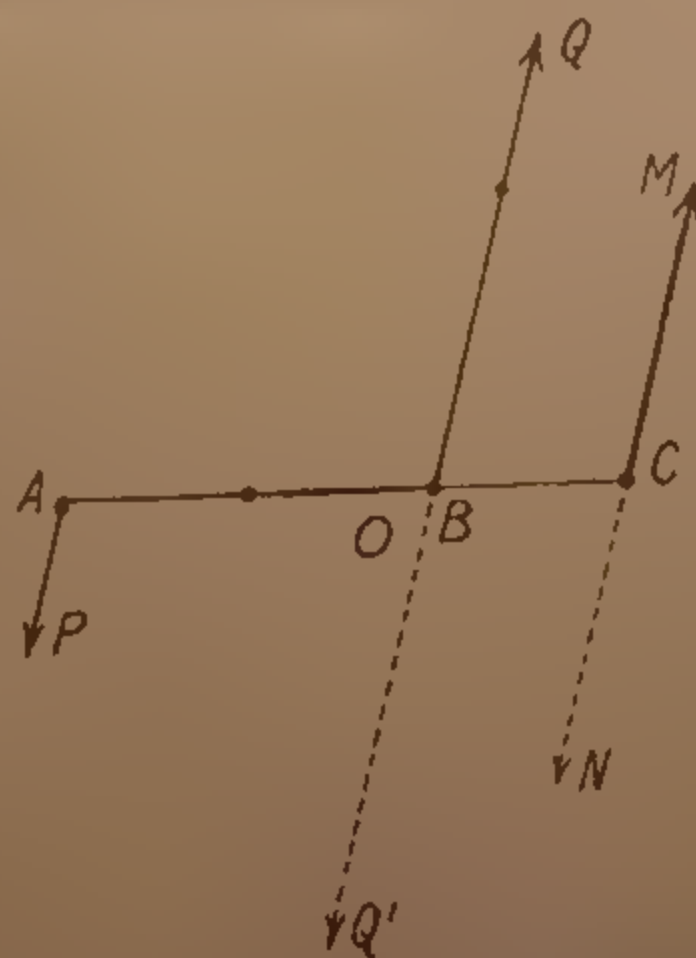



Fig. 74.

Confrontiamo questa proporzione con la 3); esse hanno tre termini rispettivamente eguali, quindi avranno eguale anche il quarto; cioè: $CO = CB$. Quindi O coincide con B.

La risultante adunque delle P ed N è applicata in B, è parallela ad esse, e la sua intensità è: $P + N = P + Q - P = Q$; cioè è una forza Q' contraria a Q, equilibrata da questa. Trascurando queste due forze in equilibrio, il sistema si riduce alla $OM = Q - P$, che è la risultante cercata.

Dal ragionamento precedente consegue la seguente regola:

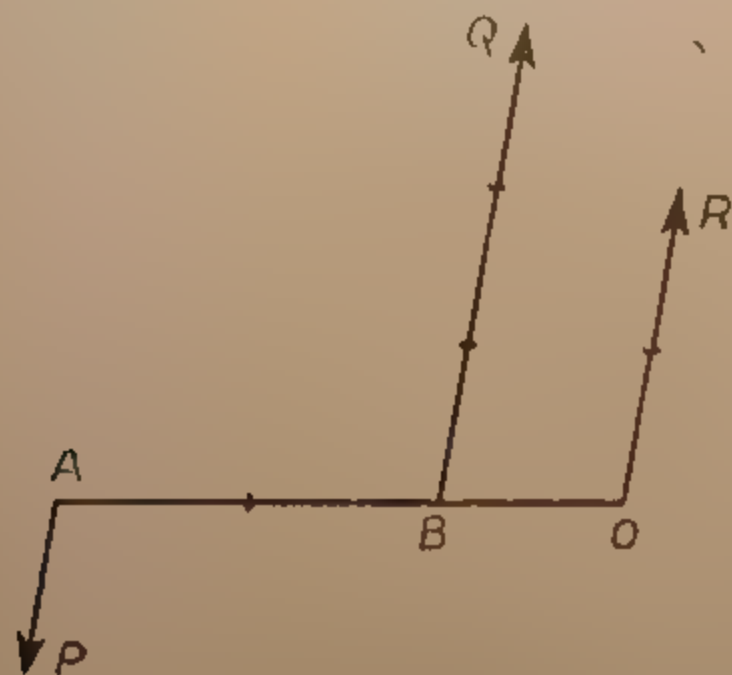
La risultante di due forze parallele, discordi, disuguali, è parallela con esse, concorde con la maggiore, d'intensità uguale alla loro differenza; la sua direzione taglia il prolungamento del segmento congiungente i punti di applicazione delle forze date, dalla parte della forza maggiore, in un punto le cui distanze dei detti punti di applicazione sono inversamente proporzionali alle intensità delle componenti medesime.

AP e BQ componenti
OR = BQ — AP risultante
OA : OB = BQ : AP

Fig. 75.

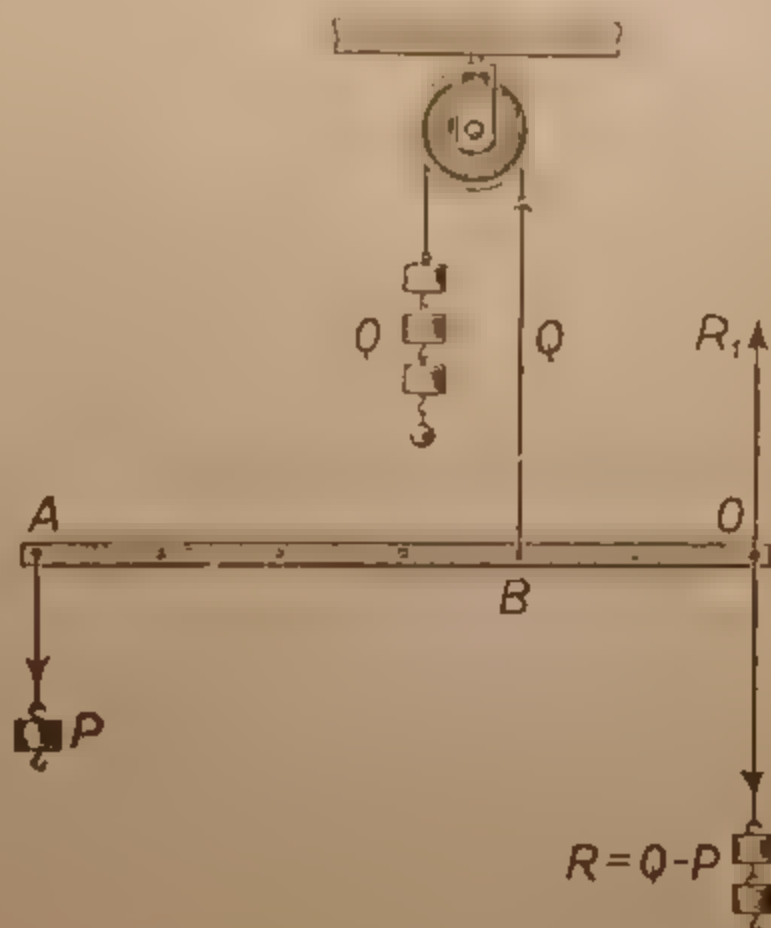



Fig. 76.

Questo caso è rappresentato graficamente nella Fig. 75. La verifica sperimentale si può fare con un apparecchio simile a quello del secondo caso. L'esperienza è rappresentata nella Fig. 76, nella quale le forze componenti sono: $P = 1\ kg$ e $Q = 3\ kg$, agenti su due punti A e B di un regolo, alla distanza di cm 40. Si osserva che per ottenere l'equilibrio, occorre una forza $R = Q - P = 2\ kg$, applicata in un punto O, sul prolungamento di AB, tale che:

$$(OB) = cm\ 20, \qquad \text{e quindi:} \qquad (OA) = cm\ 60\,.$$

Perciò, la risultante sarà la forza R_1, contraria ad R; cioè:

$$R_1 = kg\ 2 = kg\ (3 - 1)\,,$$

come vuole la regola. Inoltre è:

$$OA : OB = 60 : 20\,, \qquad \text{o anche:} \qquad OA : OB = 3 : 1\,.$$

Ma è anche: $Q : P = 3 : 1$, quindi, in conclusione:

$$(OA) : (OB) = 3 : 1.$$

Anche ora al peso Q bisogna aggiungerne un altro, che faccia equilibrio al peso del regolo AO.

67. 3° caso: Forze parallele, discordi, eguali: [illegible] AP e BQ due forze componenti parallele, discor[illegible]

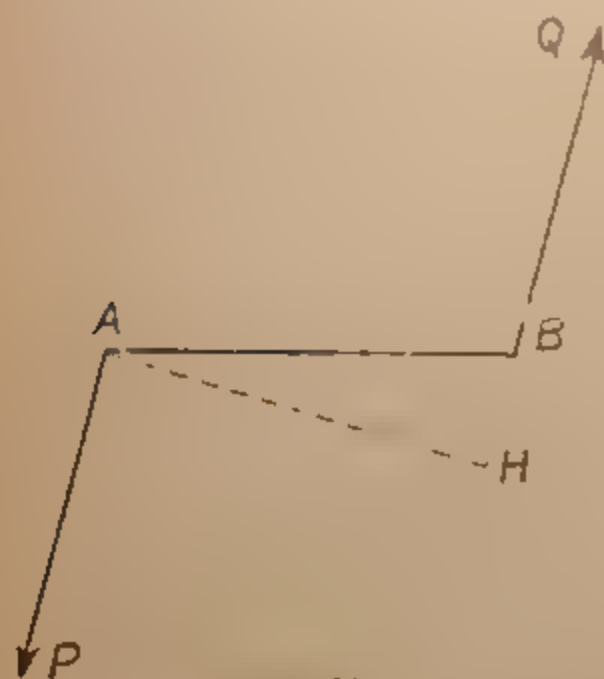



Fig. 77.

Deducendo questo come caso particol[illegible] precedente si ottiene che la risultante è zero; cioè le due forze date sono in equilibrio. Il corpo a cui sono applicate le forze non subisce per ciò traslazione; però esso *ruota, finchè le forze AP e BQ non si dispongono sulla medesima retta*. Un sistema di due forze parallele, discordi, eguali, si dice **coppia.** L'effetto della coppia è adunque di far ruotare il corpo, attorno ad un asse perpendicolare al piano di essa.

Si chiama: **braccio della coppia,** la distanza (cioè *la perpendicolare*) AH tra le direzioni delle due forze; **momento** il prodotto $(AP) \times (AH)$ della lunghezza del braccio per l'intensità di una delle forze. Al momento si attribuisce il segno + se la rotazione prodotta dalla coppia avviene nel senso delle lancette dell'orologio; il segno — nel caso contrario. Due coppie si dicono *concordi*, se producono rotazione nello stesso senso; si dicono *discordi* nel caso opposto. Una coppia la indicheremo semplicemente con la notazione $(P\,.\,Q)$, ove P e Q sono le sue forze.

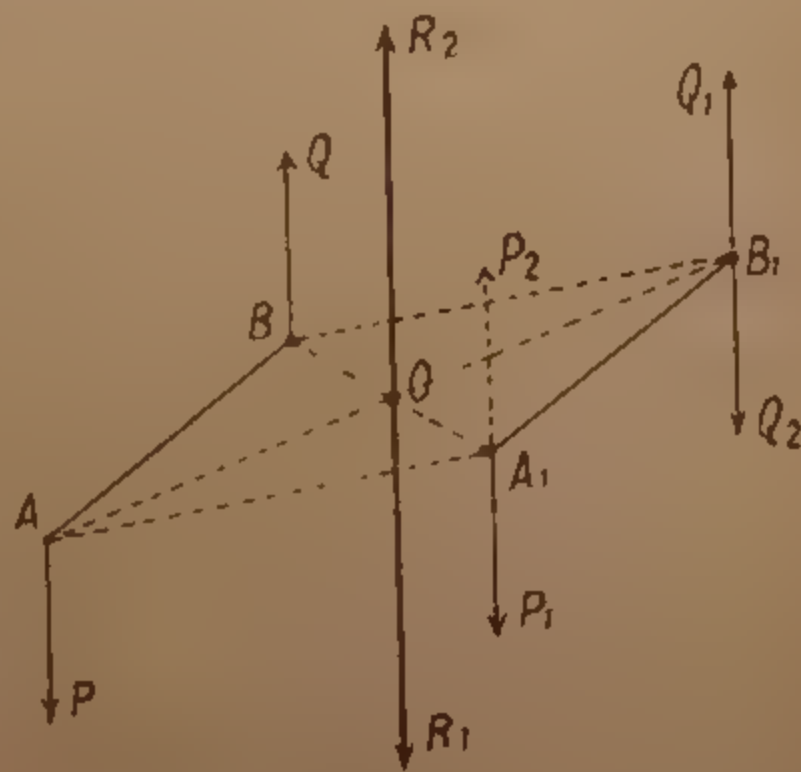
Vediamo ora alcuni teoremi, che ci permettono di trasformare una coppia in altra equivalente.

68. Traslazione di una coppia. — *Una coppia è equivalente ad un'altra, ottenuta per traslazione della prima, nel suo piano o in un piano parallelo.*

Sia $(P\,.\,Q)$ la coppia data, (Fig. 78); consideriamo la coppia $(P_1\,.\,Q_1)$, ottenuta per traslazione della coppia data, (A_1B_1, A_1P_1, B_1Q_1 sono rispettivamente eguali e paralleli ad AB, AP, BQ). Dobbiamo dimostrare che le coppie $(P\,.\,Q)$ e $(P_1\,.\,Q_1)$ sono equivalenti.

Fig. 78.

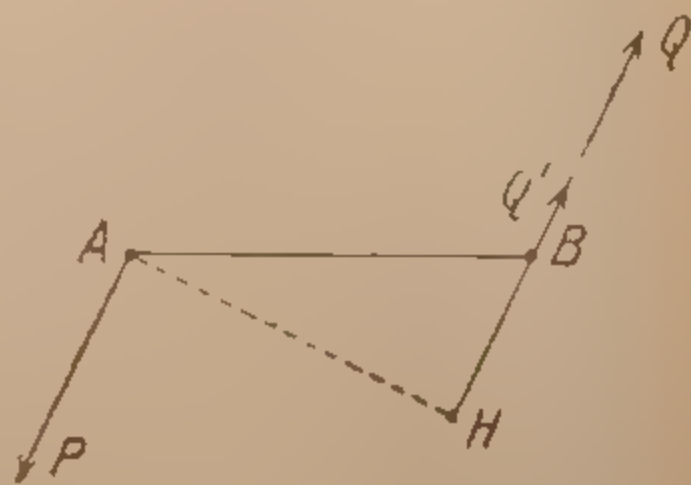
Infatti, applichiamo in A_1 una forza P_2 contraria a P_1, ed in B_1 una forza Q_2 contraria a Q_1. Il sistema $(P_2\,.\,Q_2)$ fa equilibrio alla coppia $(P_1\,.\,Q_1)$; se dimostreremo che fa anche equilibrio alla coppia $(P\,.\,Q)$, questa e la $(P_1\,.\,Q_1)$ saranno equivalenti, (§ 56, **Osservazioni**).

Componiamo le forze P e Q_2; esse sono parallele, concordi, di eguale intensità; quindi (§ 65) la loro risultante è la forza $R_1 = 2P$, parallela e concorde con esse, applicata in O, punto medio di AB_1. Componiamo ora le forze P_2 e Q; anch'esse sono parallele, concordi, di eguale intensità; quindi la loro risultante è $R_2 = 2Q = 2P = R_1$ parallela e concorde con esse, applicata nel punto medio di A_1B. Ma ABB_1A_1 è un parallelogrammo (per avere due lati opposti AB, A_1B_1 eguali e paralleli), di cui AB_1 e A_1B sono le diagonali, e queste si dimezzano scambievolmente; quindi O punto medio di AB_1, lo è anche di A_1B; cioè la R_2 è pure applicata in O. Le due forze R_1

[illegible] è in equilibrio, quindi anche il sistema $(P.Q)$ e $(P_2.Q_2)$ è in equilibrio; *c. d. d.*

Notiamo che il ragionamento vale anche se le due coppie $(P.Q)$ e $(P_1.Q_1)$ giacciono in piani paralleli.

69. Coppia le cui forze sono perpendicolari al braccio. — *Una coppia è equivalente ad un'altra, con le forze di eguale intensità, il cui braccio è il segmento che ne congiunge i punti di applicazione.*

Fig. 79.

Sia $(P.Q)$ la coppia data, (Fig. 79); conduciamo AH perpendicolare a BQ, ed applichiamo in H la forza HQ' nella direzione e nel verso di BQ, e di eguale intensità. Sappiamo (§ 57) che HQ' e BQ sono equivalenti; quindi anche la coppia $(P.Q')$ è equivalente alla coppia data $(P.Q)$; c. *d. d.*

70. Rotazione della coppia. — *Una coppia è equivalente ad un'altra, ottenuta per rotazione della prima nel suo piano, intorno al punto medio del segmento che congiunge i punti di applicazione delle sue forze.*

Per il teorema precedente, possiamo supporre che il braccio della coppia data, coincida col segmento che congiunge i punti di applicazione delle sue forze. Sia allora $(P.Q)$ la coppia data ed AB il suo braccio, (Fig. 80); facendola rotare dell'angolo α attorno ad O (punto medio di AB), assume la posizione $(P_1.Q_1)$ con braccio A_1B_1. Dimostreremo che le coppie $(P.Q)$ e $(P_1.Q_1)$ sono equivalenti. Infatti, applichiamo in A_1 e B_1 due forze A_1P_2 e B_1Q_2, contrarie rispettivamente a P_1 e Q_1. Il sistema $(P_2.Q_2)$ fa equilibrio alla coppia $(P_1.Q_1)$; se dimostriamo che fa equilibrio anche alla coppia $(P.Q)$, questa e la $(P_1.Q_1)$ saranno equivalenti.

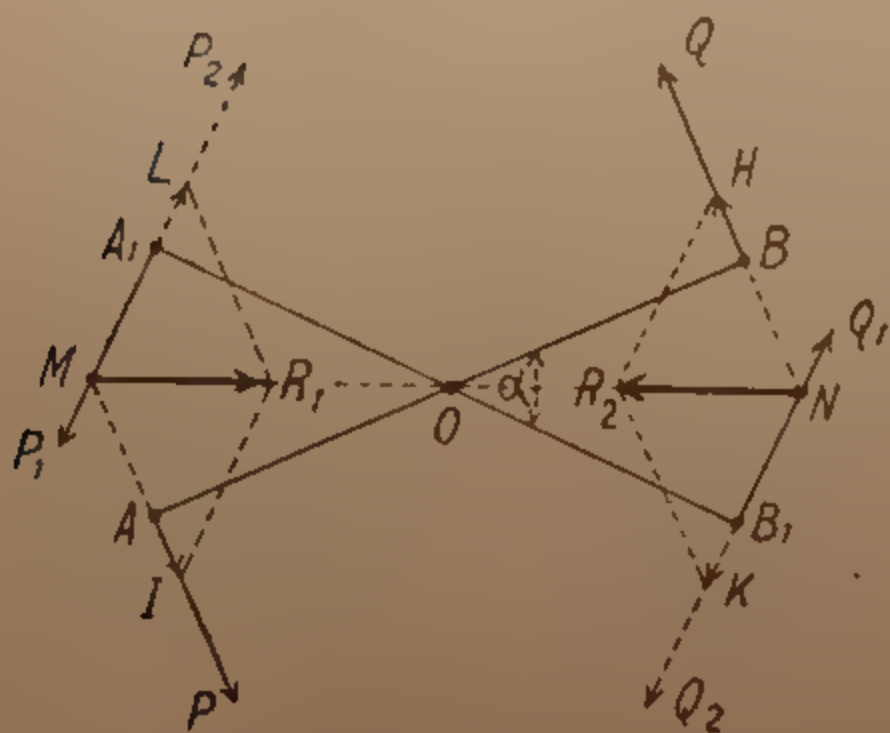



Fig. 80.

Componiamo dapprima le due forze AP ed A_1P_2; esse si trovano nel caso del § 60; quindi, trasportando AP ed A_1P_2 rispettivamente in MI ed ML, la loro risultante è rappresentata da MR_1. Essendo per ipotesi $MI = ML$, il parallelogrammo MLR_1I è un rombo; quindi la diagonale MR_1 è sulla bisettrice dell'angolo in M. Congiunto M con O, i triangoli MA_1O ed MAO sono eguali, perchè entrambi rettangoli per ipotesi, hanno l'ipotenusa MO in comune, e i cateti $OA = OA_1$ per ipotesi; quindi avranno anche $\widehat{A_1MO} = \widehat{AMO}$, ed $\widehat{A_1OM} = \widehat{AOM}$; cioè MO è bisettrice anch'essa dell'angolo in M e perciò coincide con la MR_1, ed è pure la bisettrice dell'angolo $\widehat{AOA_1}$.

Parimenti, la risultante NR_2 delle BQ e B_1Q_2 è nella direzione NO della bisettrice dell'angolo $\widehat{BOB_1}$. Per essere gli angoli $\widehat{AOA_1}$ e $\widehat{BOB_1}$ opposti al vertice, le due risultanti R_1 ed R_2, risultano pertanto allineate e di verso contrario. I triangoli MLR_1 ed NHR_2 sono eguali, per avere i lati $ML = R_1L = NH = R_2H$ per ipotesi, e

l'angolo $M\hat{L}R_1 = R_2HN$ per avere i lati paralleli e concordi; quindi sarà anche $ME_1 = NE_2$. Cioè [illegible] quattro forze [illegible] risultanti R_1 ed R_2 contrarie, è in equilibrio; *c. d. d.*

71. Coppie di egual momento. — Con i teoremi precedenti troviamo intanto che una coppia è equivalente ad un'altra, ottenuta da quella data o per traslazione, o per rotazione, o per entrambi questi movimenti insieme. Finalmente dimostreremo che:

Coppie concordi di egual momento, nello stesso piano o in piani paralleli, sono equivalenti.

Siano infatti $(P . Q)$ e $(P' . Q')$ le due coppie date, (Fig. 81); ed abbiano, per ipotesi, eguale momento: $(AP) \times (AH) = (A'P') \times (A'H')$. Applicando i tre teoremi dei §§ 68-69-70, alla coppia $(P . Q)$ possiamo sostituire l'altra equivalente $(P_1 . Q_1)$, di

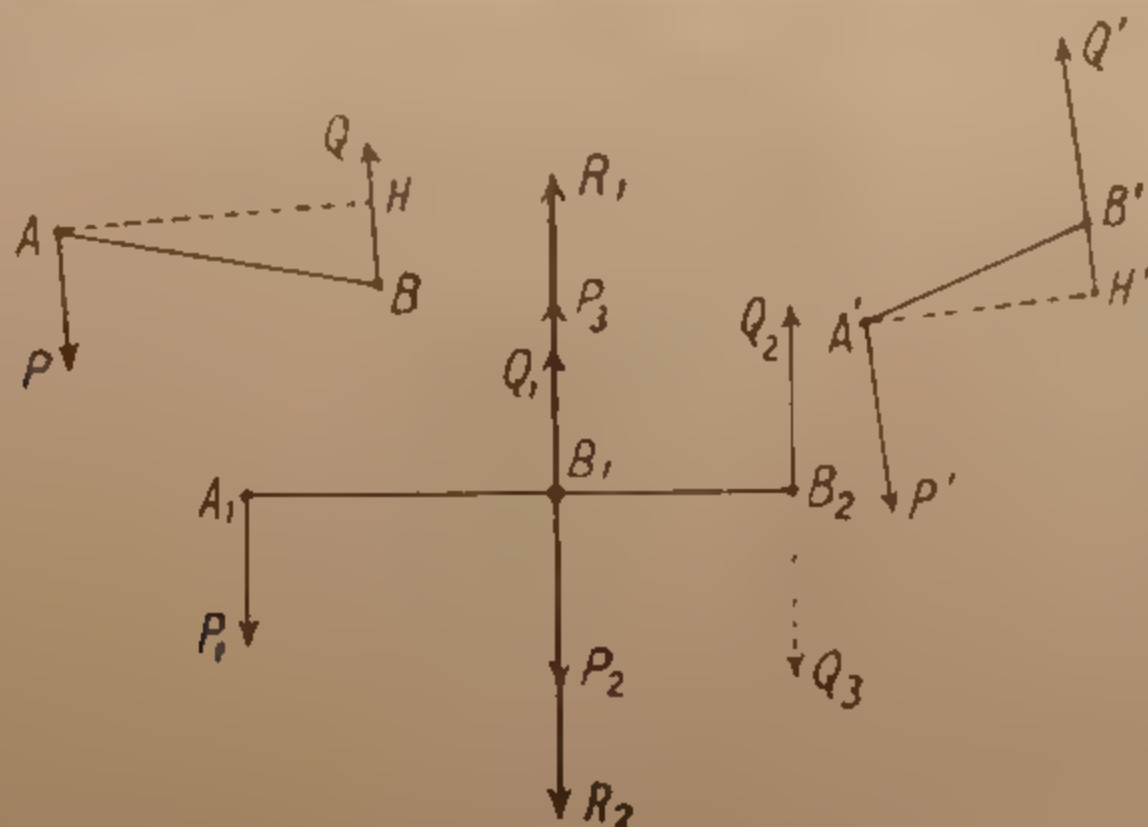



Fig. 81.

cui sia A_1B_1 il braccio, essendo $A_1P_1 = AP$ ed $A_1B_1 = AH$. Parimenti alla coppia $(P' . Q')$ possiamo sostituire l'altra equivalente $(P_2 . Q_2)$, di cui sia B_1B_2 (adiacente ad A_1B_1) il braccio, essendo:

$$B_1P_2 = A'P' \text{ e } B_1B_2 = A'H'.$$

Se dimostreremo che $(P_2 . Q_2)$ è equivalente a $(P_1 . Q_1)$, sarà anche $(P . Q)$ equivalente a $(P' . Q')$.

Applichiamo in B_1 e B_2 due forze B_1P_3 e B_2Q_3, rispettivamente contrarie a B_1P_2 e B_2Q_2. Il sistema $(P_3 . Q_3)$ fa equilibrio alla coppia $(P_2 . Q_2)$; se dimostriamo che fa anche equilibrio alla coppia $(P_1 . Q_1)$; questa e la $(P_2 . Q_2)$ saranno equivalenti ed avremo dimostrato il teorema.

Componiamo dapprima le due forze P_3 e Q_1; esse sono nelle condizioni del N. 1 del § 58; quindi la loro risultante è la forza $(B_1R_1) = (B_1Q_1) + (B_1P_3) = P + P'$. Componiamo ora le due forze P_1 e Q_3; esse sono nelle condizioni del § 65; quindi la loro risultante sarà applicata in un punto O del segmento A_1B_2, tale che:

$$(A_1O) : (OB_2) = Q_3 : P_1; \quad \text{ossia risolvendo:} \quad P_1 \times (A_1O) = Q_3 \times (OB_2).$$

Ma a questa condizione soddisfa anche il punto B_1, perchè: $P_1 \times (A_1B_1) = Q_2 \times (B_1B_2)$, per ipotesi, essendo tali prodotti i momenti (eguali) delle coppie date, e $Q_2 = Q_3$ pure per ipotesi. Sarà perciò anche: $P_1 \times (A_1B_1) = Q_3 \times (B_1B_2)$, ed O coincide con B_1.

La nuova risultante sarà allora la forza $(B_1R_2) = (A_1P_1) + (B_2Q_3) = P + P' = (B_1R_1)$; e dovendo essere parallela e concorde con le A_1P_1 e B_2Q_3, sarà collineare ed opposta alla B_1R_1. Cioè il sistema delle quattro forze $(P_1 . Q_1 . P_3 . Q_3)$, equivalente alle due risultanti R_1 ed R_2 contrarie, è in equilibrio; *c. d. d.*

72. **Rappresentazione grafica della coppia - Asse-momento.** — Dai teoremi precedenti risulta che una coppia è individuata allorchè sono dati: la direzione dell'asse di rotazione, il senso di rotazione ed il suo momento. Possiamo rappresentare graficamente questi tre elementi con un segmento OM (Fig. 82), avente l'estremo O in un punto qualsiasi, perpendicolare al piano α della coppia $(P.Q)$ assegnata, nel semispazio rispetto ad α da cui si vede ruotare la coppia nel senso positivo, e di lunghezza proporzionale al momento della coppia data. Tale segmento si chiama **asse-momento** della coppia considerata.

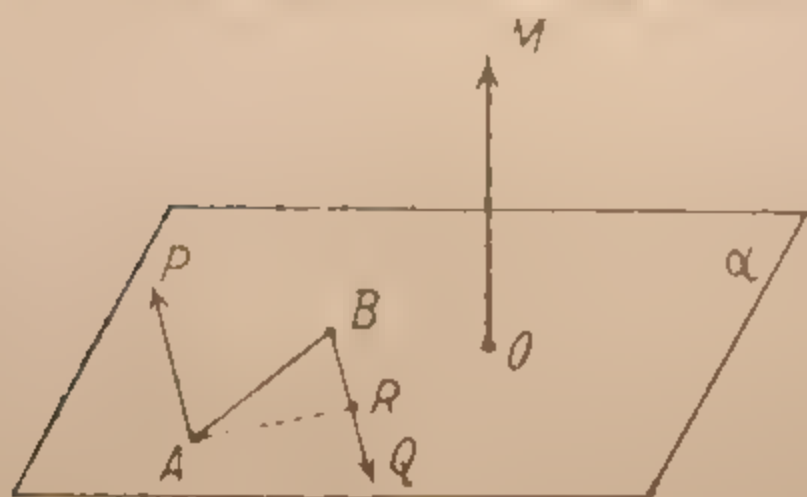



Fig. 82.

73. **Composizione delle coppie.** — Dal paragrafo precedente concludiamo che anche **una coppia è rappresentata da un vettore.** Quindi potremo ridurre la composizione delle coppie alla somma di più vettori, come abbiamo fatto per le velocità, per le accelerazioni e per le forze.

Potremo pertanto enunciare separatamente i seguenti teoremi:

1. La risultante di più coppie, nello stesso piano o in piani paralleli, è una coppia il cui asse-momento è la somma algebrica degli assi-momenti delle coppie componenti.

2. La risultante di due coppie, giacenti in piani diversi non paralleli, è una coppia, il cui asse-momento è la diagonale del parallelogrammo che ha per lati gli assi-momenti delle coppie componenti, presi con l'origine in comune.

3. La risultante di più coppie, giacenti in piani diversi non paralleli, è una coppia, il cui asse-momento è il lato che chiude la spezzata, i cui lati sono gli assi-momenti delle coppie componenti.

Il 2° è un caso particolare del 3°.

74. **Centro delle forze parallele.** — Si voglia ora la risultante di un sistema di un numero qualsiasi n di forze parallele, alcune dirette in un verso, altre in verso contrario. Si potranno prima comporre tutte le forze dirette in un verso, e trovarne la risultante, di intensità eguale alla loro somma; poi si comporranno le forze aventi verso opposto, e si troverà un'altra risultante di intensità eguale alla somma di queste altre forze. Il sistema si riduce così alle due risultanti, cioè a due forze discordi: si potranno dare diversi casi:

1. Le due risultanti sono di intensità eguale ed applicate nello stesso punto; e allora il sistema delle n forze è in equilibrio.

2. Le due risultanti sono di intensità eguale, ma applicate in punti diversi; cioè il sistema si riduce ad una coppia.

3. Le due risultanti sono diseguali, applicate nello stesso punto o in punti diversi; allora ammettono una risultante unica, applicata in un certo punto. L'intensità di questa risultante è eguale alla somma algebrica delle intensità delle n componenti (assumendo come positive le forze dirette in un verso, e negative quelle dirette in verso contrario).

Si può dimostrare che: *una forza è equivalente ad una sistema di una forza e di una coppia.*

Infatti sia AP la forza data, (Fig. 83); in un punto B applichiamo due forze BP_1 e BQ contrarie, parallele ad AP e di intensità eguale a questa. Essendo P_1 e Q in equilibrio, il sistema delle tre forze $(P.P_1.Q)$ è equivalente alla sola forza P. Ora, le tre forze possono considerarsi come l'insieme della forza P_1 e della coppia $(P.Q)$.

Fig. 83.

Essendo il punto B arbitrario, questa trasformazione può farsi in infiniti modi.

In conclusione possiamo dire che in ogni caso:

Un sistema di n forze parallele, può sempre ridursi ad una forza ed una coppia.

I primi due casi sono particolari del terzo: al N. 1 è il caso particolare in cui forza e coppia ono entrambe nulle; il N. 2 è il caso particolare in cui è nulla la forza e non la coppia.

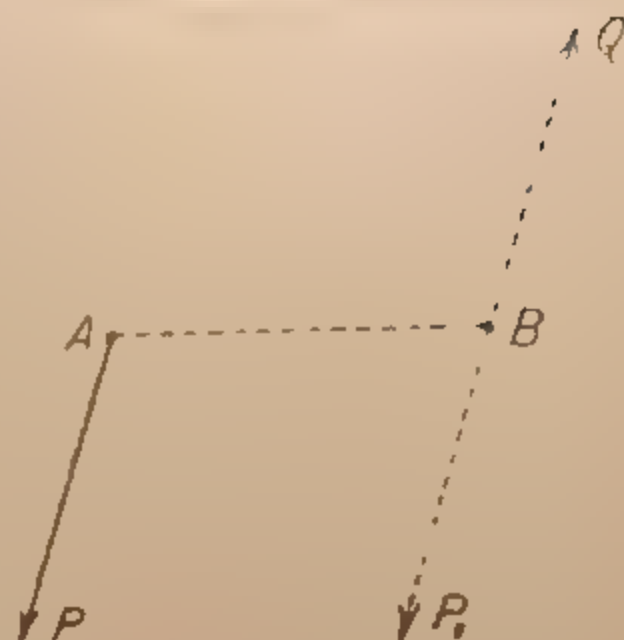
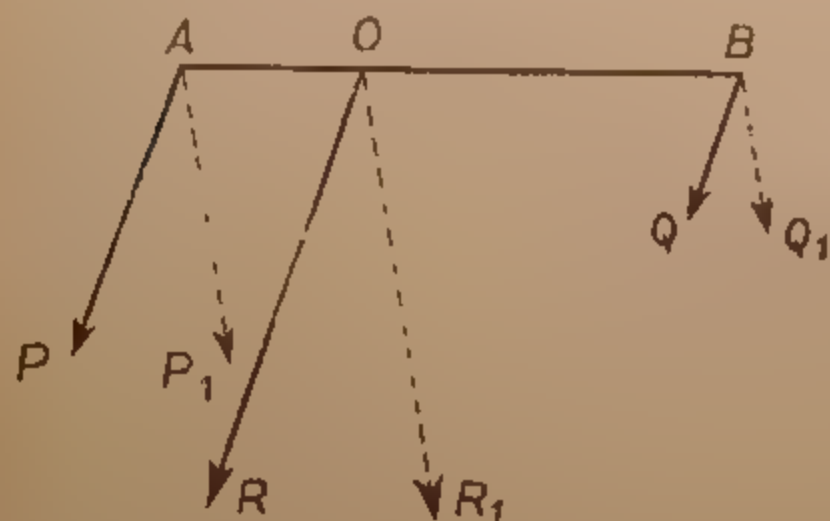



Fig. 84.

Il punto di applicazione della risultante, si chiama il **centro delle forze parallele.**

Se P e Q sono due forze parallele, ed R la loro risultante (Fig. 84), il punto di applicazione O di questa si troverà per mezzo di una proporzione in cui entrano solo i valori di P e Q e le distanze (OA) ed (OB). Se alle forze P e Q sostituiamo quindi due nuove forze P_1 e Q_1 anch'esse parallele, eguali rispettivamente alle prime, la risultante R_1 delle nuove forze sarà applicata nello stesso punto O di prima; quindi, estendendo il ragionamento al caso di n forze parallele:

Il centro delle forze parallele non varia, comunque ruotino le forze componenti attorno ai loro punti d'applicazione; purchè conservino la loro intensità e si mantengano parallele fra loro.

75. Problemi sulle forze parallele.

a) Problemi risoluti.

1. *Una persona porta due secchi, contenenti l'uno l. 15 e l'altro l. 25 d'acqua, sospesi alle estremità di un bastone lungo* m *1,50. In qual punto dovrà poggiare il bastone sulla spalla, per sostenere tutto il carico?*

Risoluzione. — Siano A e B le estremità del bastone; in A sia attaccato il secchio minore, in B il maggiore. Sia O il punto d'appoggio sulle spalle: O dev'essere il punto d'applicazione della risultante delle due forze *kg* 15 e *kg* 25, date dai due secchi (trascurando il peso dei recipienti). Quindi:

$(AO):(OB) = 25:15.$ Componendo: $(AO+OB):(OB) = (25+15):15$

ma $(AO+OB)$ è la lunghezza di tutto il bastone, perciò:

$1{,}50:(OB) = 40:15;$ risolvendo la quale:

$$(OB) = \text{m}\,\frac{1{,}50\times 15}{40} = \text{m}\ 0{,}56.$$

[illegible] l'estremo B, a cui è appeso [illegible]

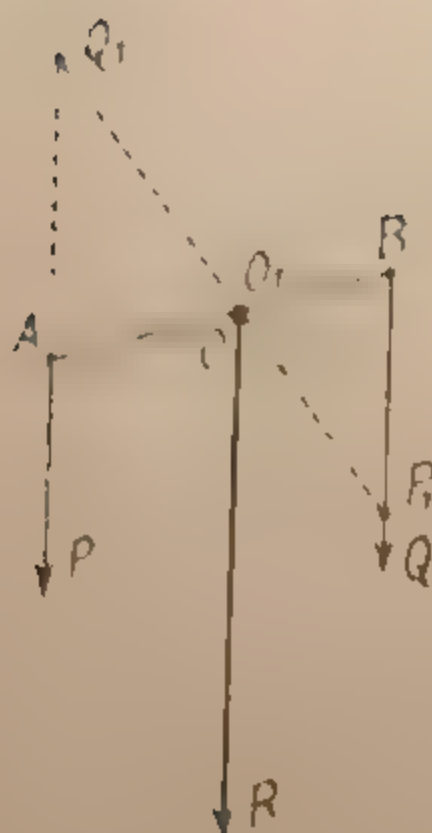
[illegible] *di applicazione e l'intensità* [illegible] *15 e kg 18 rispettivamente,* [illegible]

[illegible] è un segmento lungo *mm* 22 (Fig. 85); esso rappresenta l'asta (1 *mm* equivale a 1 *cm* dell'asta). Le componenti sono rappresentate da segmenti paralleli e concordi (di qualunque direzione) $AP = mm\ 15$ e $BQ = mm\ 18$, (1 *mm* equivale a 1 *kg*). La risultante dev'essere applicata in un punto O, tale che:

Fig. 85.

1) $(AO):(OB) = Q:P$ cioè: $(AO):(OB) = 18:15$;

componendo:

$(AO + OB):(AB) = (18 + 15):18$; cioè: $(AB):(AO) = 33:18$.

Essendo $(AB) = 22$, e dividendo per 3 i termini del 2° rapporto, si ricava:

$$22:(AO) = 11:6; \quad \text{da cui:} \quad (AO) = \frac{22 \times 6}{11} = 12.$$

Quindi la risultante sarà applicata in un punto interno di AB, a *cm* 12 di distanza da A. La sua intensità sarà:

$$R = P + Q = \text{kg.}\ (15 + 18) = \text{kg}\ 33;$$

e sarà parallela e concorde con le forze date.

Graficamente si può trovare il punto di applicazione della risultante nel modo seguente: Si prolunghi PA di un segmento $AQ_1 = BQ$, e si prenda su BQ un segmento $BP_1 = AP$. Si congiunga Q_1 con P_1; questa congiungente taglia AB (per essere Q_1 e P_1 da bande opposte rispetto ad AB); il punto d'intersezione è il punto cercato.

Infatti, chiamiamo O_1 tal punto; i triangoli AQ_1O_1 e BP_1O_1 sono simili, avendo $A\widehat{O_1}Q_1 = B\widehat{O_1}P_1$ perchè opposti al vertice; $A\widehat{Q_1}O_1 = B\widehat{P_1}O_1$, perchè alterni interni tra le parallele AQ_1 e BP_1 tagliate dalla trasversale Q_1P_1; quindi sarà:

$$AO_1 : O_1B = AQ_1 : BP_1; \qquad \text{ossia:} \qquad (AO_1):(O_1B) = Q:P.$$

Ma a tale proporzione soddisfaceva il punto O per la 1), quindi O_1 coincide con O.

3. *Determinare analiticamente e graficamente il punto di applicazione della risultante di due forze parallele discordi, essendo* d *la distanza tra i loro punti d'applicazione, e l'intensità dell'una gli* m/n *di quella dell'altra.*

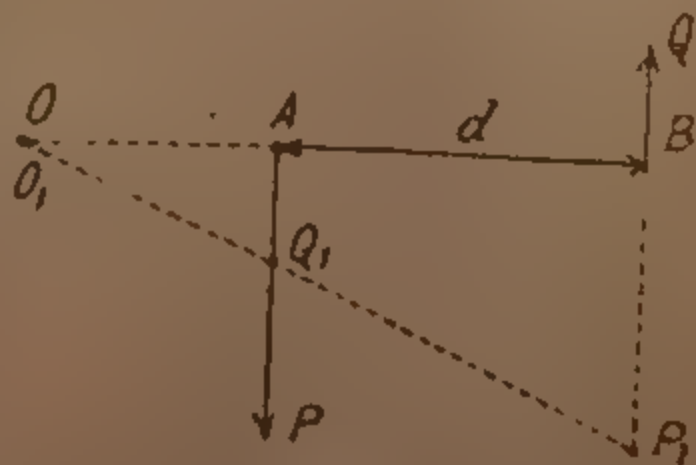
Fig. 86.

Risoluzione. — Supponiamo $m > n$; sia AB (Fig. 86) il segmento che congiunge i punti d'applicazione delle componenti, e d la sua lunghezza; queste siano rappresentate da AP e BQ, essendo

$$AP = \frac{m}{n} BQ.$$

La risultante sarà applicata in un punto O, sul prolungamento di BA, tale che:

2) $$(OB):(OA) = P:Q$$

o anche, per l'ipotesi: $$(OB):(OA) = m:n.$$

Scomponendo si ottiene

$$(OB - OA):(OA) = (m - n):n$$

ossia:

$$d:(OA) = (m - n):n$$

dalla quale si ricava:

$$(OA) = \frac{dn}{m - n}.$$

Graficamente si può determinare il punto O nel seguente modo: Si prolunghi QB di un segmento $BP_1 = AP$, e si prenda su AP un segmento $AQ_1 = BQ$. Si congiunga P_1 con Q_1; la retta P_1Q_1 taglierà (perchè $BP_1 > AQ_1$) la retta BA in un punto O_1, che è il punto cercato.

Infatti, dai triangoli simili O_1AQ_1 e O_1BP_1 si ottiene:

$$O_1B : O_1A = BP_1 : AQ_1; \qquad \text{ossia:} \qquad (O_1B):(O_1A) = P:Q.$$

Ma a tale condizione soddisfaceva O per la 2), quindi O_1 coincide con O.

4. *Una coppia ha il braccio di cm 30 e le forze di kg 12 ciascuna; quali forze bisogna applicare alle estremità di un segmento lungo cm 32, le cui direzioni siano inclinate a 45° con questo, per ottenere una coppia equivalente alla prima?*

Risoluzione. — Il momento della coppia data è: $m = 12 \times 30 = 360$.

Sia $(P.Q)$ la coppia da determinare, (Fig. 87). Il braccio AH è un cateto del triangolo rettangolo ABH, il quale avendo un angolo acuto di 45°, è isoscele; cioè $AH = BH$. Per il teor. di Pitagora si ha:

$$(AH)^2 = (AB)^2 - (BH)^2 = (AB)^2 - (AH)^2, \text{ da cui:}$$

$$2(AH)^2 = (AB)^2 \quad \text{ed} \quad (AH) = \frac{(AB)}{\sqrt{2}}\text{(1)} = \text{cm } \frac{32}{\sqrt{2}}.$$

Il momento della coppia $(P.Q)$ è:

$$m' = P \times (AH) = P \times \frac{32}{\sqrt{2}};$$

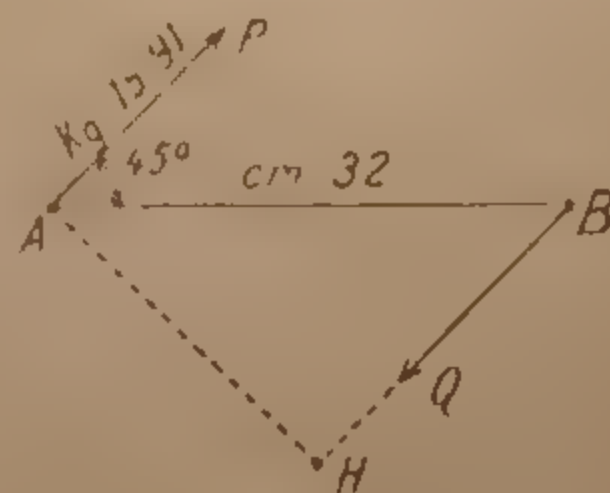



Fig. 87.

perchè le coppie siano equivalenti, dev'essere $m = m'$; cioè:

$$360 = P \times \frac{32}{\sqrt{2}} \qquad \text{da cui si ricava:} \qquad P = \frac{360\sqrt{2}}{32} = \text{kg } 15{,}91.$$

Naturalmente bisogna supporre le due coppie complanari.

b) Problemi da risolvere.

1. Due persone A e B reggono un peso di un quintale, per mezzo di un bastone lungo *cm* 120, appoggiato alle estremità sulle loro spalle. Il peso è applicato a *cm* 50 di distanza dalla spalla di A; calcolare quale peso grava su ciascuna delle due persone, trascurando il peso del bastone.

2. Due persone A e B portano un peso di *kg* 92 su un palo, appoggiato alle estremità sulle loro spalle. Il peso è lontano dalla spalla di B il triplo che da quella di A. Se il peso si allontana di *cm* 12 dalla spalla di A, questi sopporta *kg* 60. Calcolare la lunghezza del palo, e il peso portato da ciascuna persona nel primo caso, trascurando il peso del palo.

(1) Lo studioso noterà che AB è la diagonale di un quadrato, di cui AH è il lato, e si poteva subito scrivere questo risultato.

3. Determinare analiticamente [illegible] applicazione e la risultante di due forze parallele discordi, di *kg* 18 e *kg* 24 rispettivamente, applicate alle estremità di una sbarra lunga [illegible]

4. Se la risultante di due forze parallele [illegible] *kg* [illegible] e il suo punto d'applicazione dista [illegible] da quello di una componente di *kg* 15, determinare analiticamente e [illegible]amente il punto d'applicazione dell'altra componente.

5. Una sbarra è appoggiata per le sue estremità [illegible] un punto intermedio distante dalle estremità rispettivamente *cm* [illegible] e *cm* [illegible] grava un peso di *kg* 500. Calcolare le forze sui punti di appoggio, trascurando il peso della sbarra.

6. Due coppie giacciono in piani fra loro perpendicolari. La prima ha le forze di *kg* 15 ed il braccio di *cm* 30; la seconda ha le forze di *kg* 18 ed il braccio di *cm* 50. Determinare l'intensità delle forze di una coppia equivalente alla loro risultante, se il segmento che congiunge i punti di applicazione di tali forze è lungo *cm* 72, e la direzione di esse è inclinata a 30° con tale segmento.

Equilibrio nelle rotazioni.

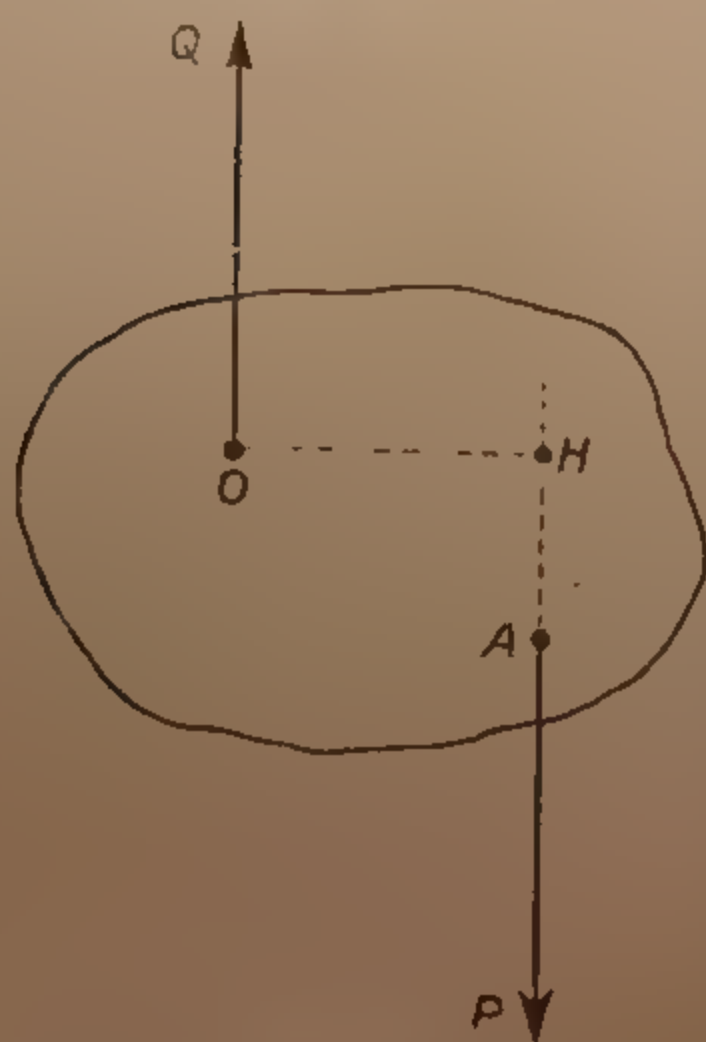
76. Corpo girevole attorno ad un punto. — Abbiamo esaurito tutti i casi possibili di composizione di forze applicate ad un corpo, i cui punti siano liberi di muoversi comunque nello spazio. Ora dobbiamo studiare il caso in cui alcuni punti del corpo siano soggetti ad alcune condizioni o, come si dice, ad alcuni **legami** o **vincoli**.

Fig. 88.

Il legame più semplice è che, fra tutti i punti del corpo, ve ne sia uno che debba rimanere fisso. Studiamo cioè l'azione di forze applicate ad un corpo girevole attorno ad un punto o centro fisso. Sia O questo punto e sia AP una forza applicata in un punto A del corpo, (Fig. 88). L'effetto di questa non varierà, se aggiungeremo un'altra forza OQ, parallela e contraria ad AP, applicata nel punto fisso O; ciò perchè questa forza, non potendo spostare il suo punto di applicazione che per ipotesi è fisso, non produce alcun effetto di moto sul corpo. Ma il sistema delle due forze P e Q costituisce una coppia, a cui la forza AP equivale; quindi:

Una forza applicata in un punto di un corpo girevole attorno ad un centro di rotazione, fa ruotare il corpo finchè il centro di rotazione non si trovi sulla direzione della forza.

Analogamente che per la coppia (§ 67), si chiama: **braccio** il segmento della perpendicolare OH condotta dal centro di rotazione sulla direzione della forza; **momento di rotazione** il prodotto dell'intensità della forza per la lunghezza del suo braccio:

$$1) \qquad momento = (AP) \times (OH)$$

Il momento è positivo o negativo, a seconda che la rotazione prodotta dalla forza avviene nel senso delle lancette dell'orologio, o in senso contrario. Nel caso della Fig. 88, il momento di AP è positivo.

Poichè la 1) è anche il momento della coppia (P, Q), anche ora col momento della forza AP misureremo l'effetto di rotazione di questa.

77. Teorema di Varignon. – L'equilibrio di due o più forze applicate ad un corpo, girevole attorno a un punto, è basato sul seguente teorema, dovuto a Varignon:

La somma algebrica dei momenti di rotazione di due forze complanari rispetto a un punto del loro piano, è uguale al momento della loro risultante.

1. Siano le componenti SP e SQ due forze concorrenti (Fig. 89), ed SR la loro risultante; O il centro di rotazione, nel piano delle due forze ed esterno al loro angolo. Congiungiamo O con S, e conduciamo PA, QB, RC perpendicolari ad OS.

Fig. 89.

Il momento M_P della forza SP rispetto ad O, è il prodotto di (SP) per la distanza di O da SP; cioè il doppio dell'area del triangolo OSP; ma tale area possiamo calcolarla prendendo come base OS e come altezza PA; quindi: $M_P = (OS) \times (PA)$. Parimenti il momento M_Q della forza SQ, sarà: $M_Q = (OS) \times (QB)$; ed il momento M_R della risultante SR sarà: $(OS) \times (RC)$.

Conduciamo PD perpendicolare ad RC; il quadrilatero $APDC$ è un rettangolo, quindi: $CD = PA$.

I triangoli PDR ed SBQ sono eguali, perchè entrambi rettangoli, l'ipotenusa PR dell'uno è uguale all'ipotenusa SQ dell'altro, perchè lati opposti di un parallelogrammo, e gli angoli $\widehat{DPR}$ e $\widehat{QSB}$ sono eguali, avendo i lati paralleli e concordi; quindi: $RD = QB$. Perciò sarà:

$$M_R = (OS) \times (RC) = OS \times (DC + RD) =$$
$$= (OS) \times (PA + QB) = (OS) \times (PA) +$$
$$+ (OS) \times (QB) = M_P + M_Q . \quad c. d. d.$$

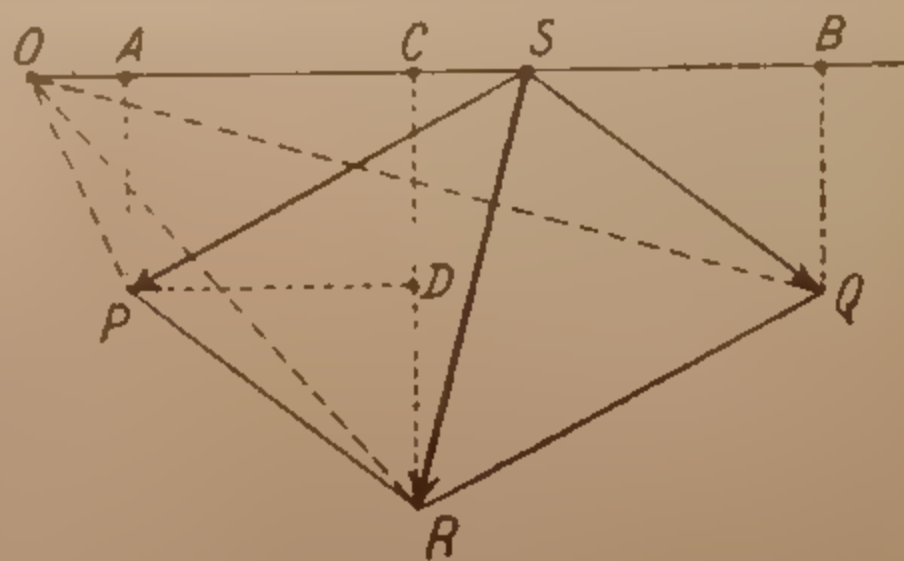
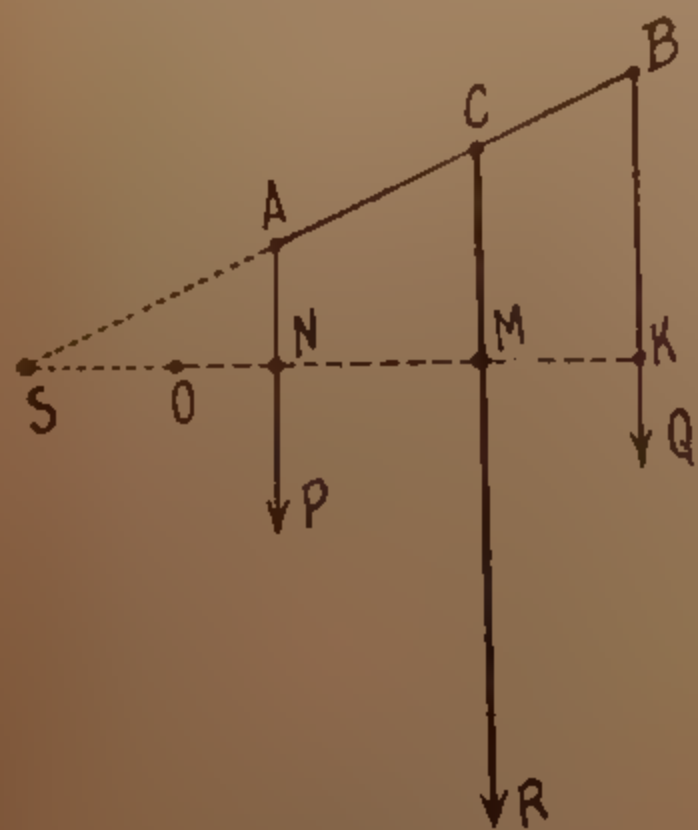
Lasciamo allo studioso la dimostrazione, con lo stesso procedimento, nel caso che O sia interno all'angolo $\widehat{PSQ}$; nel qual caso i momenti delle due forze componenti hanno segno contrario, ed il momento della risultante è uguale alla differenza dei valori assoluti dei momenti delle componenti.

Fig. 90.

2. Se le due componenti AP e BQ sono parallele (Fig. 90), sia O il centro di rotazione, esterno alla striscia delle AP, BQ; siano ON, OK, OM, i bracci delle componenti P e Q, e della loro risultante R, rispetto ad O. Sappiamo (§ 65) che:

$$2) \qquad (CB) : (AC) = P : Q .$$

Per il teorema di Talete, si ha: $CB : AC = MK : NM$; quindi sostituendo nella 2:)

$$(MK) : (NM) = P : Q ; \qquad \text{risolvendo:} \qquad Q \times (MK) = P \times (NM)$$

Ma: $\quad MK = OK - OM; \quad NM = OM - ON;$ sostituendo:

$Q \times (OK - OM) = P \times (OM - ON)$, ossia $Q \times (OK) - Q \times (OM) = P \times (OM) - P \times (ON)$, che si può scrivere: $P \times (OM) + Q \times (OM) = P \times (ON) + Q \times (OK)$,

o anche: $\quad (P + Q) \times (OM) = P \times (ON) + Q \times (OK)$; ma $P + Q = R$, quindi:

$$R \times (OM) = P \times (ON) + Q \times (OK). \qquad \textit{c. d. d.}$$

Lasciamo allo studioso di estendere la dimostrazione con lo stesso procedimento:

1° nel caso che O sia interno alla striscia delle AP, BQ; nel qual caso i momenti delle due componenti hanno segno contrario, ed il momento della risultante sarà eguale alla differenza dei valori assoluti dei momenti delle componenti;

2° nel caso che le componenti siano parallele discordi, disuguali od eguali;

3° nel caso che le componenti siano più di due.

Sicchè riteniamo il teorema di Varignon dimostrato in ogni caso.

78. Equilibrio nella rotazione. — E allora, si abbiano due forze AP e BQ complanari (Fig. 91), applicate allo stesso corpo girevole attorno ad un centro O del loro piano; la prima farà girare il corpo con un momento dato da:

Fig. 91.

$$M_P = P \times (OH)$$

La seconda lo farà girare con un momento dato da:

$$M_Q = - Q \times (OK)$$

Chiamando M_R il momento della risultante, sarà per il teorema di Varignon:

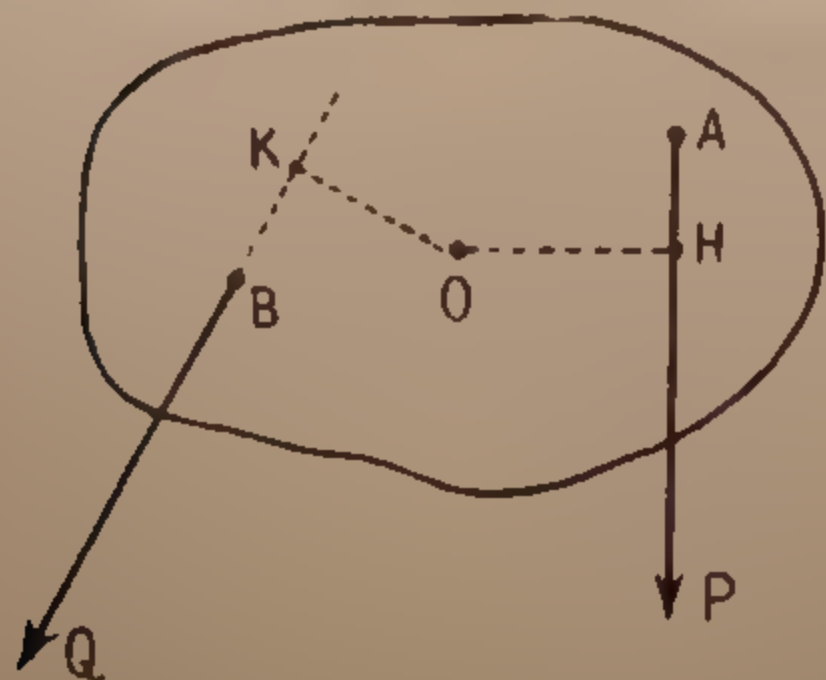
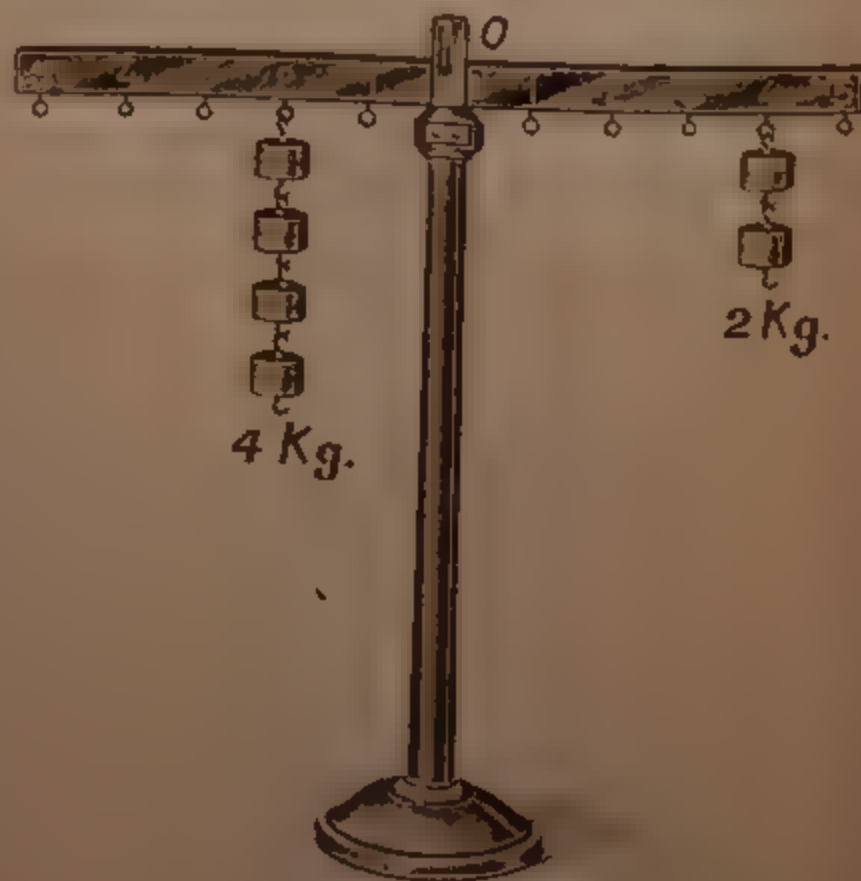
$$M_R = P \times (OH) - Q \times (OK)$$

Le due forze saranno in equilibrio, ed il corpo rimarrà in quiete, se: $M_R = O$, cioè: $P \times (OH) = Q \times (OK)$, che si può anche scrivere:

3) $\quad P : Q = (OK) : (OH) \quad$ Cioè:

Due forze (complanari, con momenti discordi), applicate ad un corpo girevole attorno ad un punto sono in equilibrio, allorchè le loro intensità sono inversamente proporzionali alle lunghezze dei rispettivi bracci.

Fig. 92.

La verifica sperimentale di questo teorema, si può fare con l'apparecchio della Fig. 92. Un'asticella, divisa in parti uguali, è sostenuta in modo da poter ruotare attorno ad un punto O. Si applichi in un punto 4 da una parte dell'asticella, un peso di 2 *kg*; esso farà girare tutta l'asticella. Per mantenere questa orizzontale si potrà applicare dall'altra parte un peso di 4 *kg* nel

punto 2, come è indicato dalla Fig. 92, oppure un peso di 8 kg al punto 1. Infatti si ha l'eguaglianza dei varî momenti:

$$2 \times (0\text{-}4) = 4 \times (0\text{-}2) = 8 \times (0\text{-}1).$$

Il precedente teorema ci spiega il fatto che se su l'*altalena*, formata semplicemente con un travetto appoggiato su un sostegno qualsiasi (Fig. 93), vogliamo che un ragazzo piccolo e più leggero, faccia contrappeso ad un altro ragazzo più grande e più pesante, occorre che il primo si ponga a distanza dal cavalletto maggiore del secondo.

Fig. 93.

Se le forze applicate al corpo sono più di due, avremo sempre per lo stesso teorema, che:

Più forze (complanari) applicate ad un corpo girevole attorno ad un punto sono in equilibrio, allorchè la somma algebrica dei loro momenti di rotazione è zero.

Oppure, il che è equivalente:

Più forze (complanari) applicate ad un corpo girevole attorno ad un punto, si fanno equilibrio, se la somma dei momenti delle forze che tendono a far girare il corpo in un senso, è eguale alla somma dei momenti di quelle che tendono a produrre la rotazione opposta.

Osserviamo che se in ogni caso l'equilibrio si ha allorchè il momento della risultante è zero, ciò può avvenire in due casi:

1. *È zero l'intensità della risultante.* Ciò vuol dire che l'equilibrio si avrebbe anche se il corpo fosse senza legami; cioè (§ 76), non dovesse rotare attorno ad un punto fisso.

2. *È zero il braccio della risultante.* Cioè la direzione della risultante contiene il centro di rotazione.

La verifica sperimentale, nel caso di più di due forze, si può fare con l'apparecchio indicato nella Fig. 94; si può mantenere orizzontale l'asta sospesa ad una funicella, collocando da una parte un peso D di 3 *kg* su un braccio 4; e dall'altra parte: un peso A di 1 *kg* su braccio 5, un peso B di 1 *kg* su braccio 4, e un peso C di 1 *kg* su braccio 3. Infatti si ha l'eguaglianza dei momenti:

Fig. 94.

$$(3 \times 4) = (1 \times 5) + (1 \times 4) + (1 \times 3).$$

79. Rappresentazione grafica delle forze nelle rotazioni.

— Abbiamo visto (§ 76), che una forza applicata ad un corpo girevole attorno ad un punto, equivale ad una coppia. E allora, come si è fatto per la coppia (§ 72), si può anche ora definire la forza con un *asse-momento*, e rappresentare questo con un vettore. Sicchè anche ora, la composizione delle forze applicate ad un corpo girevole attorno ad un punto, si può riportare alla composizione dei vettori.

80. Corpo girevole attorno ad un asse. — **N[illegible] un sol punto fisso, vi sia una retta fissa;** cioè il corpo [illegible] **ad un asse.**

Sia XX_1 l'asse di rotazione (Fig. 95), ed AP una forz[illegible] corpo, scomponiamo (§ 62) questa forza i[illegible] una AP_1 parallela all'asse XX_1; l'altra AP_2 nella direzione dell'intersezione del piano PAP_1 con un piano α passante per A e perpendicolare all'asse XX_1. La forza AP_1 non ha alcun effetto; perchè dovrebbe trascinare l'asse, che per ipotesi è fisso. L'azione di AP è quindi equivalente a quella di AP_2. Ma l'effetto di questa forza è quello che si avrebbe se il corpo ruotasse attorno al centro O, intersezione del piano α con l'asse XX_1; quindi tale effetto sarà misurato dal momento di AP_2 rispetto ad O, cioè da:

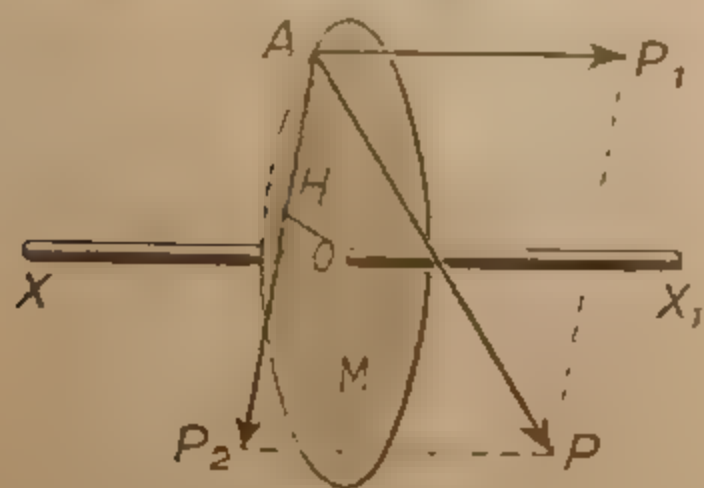



Fig. 95.

$$M = P_2 \times (OH)$$

Il problema così è ricondotto al caso precedente, della rotazione attorno ad un punto fisso. Quindi:

Più forze applicate ad un corpo girevole attorno ad un asse sono in equilibrio, allorchè la somma algebrica dei momenti delle loro componenti in piani perpendicolari all'asse, è zero.

81. Problemi sulle rotazioni.

a) Problemi risoluti.

1. *Agli estremi di un'asta orizzontale lunga* cm 60, *sono sospesi due corpi pesanti rispettivamente* kg 5 *e* kg 7; *in qual punto dovrà sostenersi l'asta perchè si mantenga orizzontale?* (Trascurare il peso dell'asta).

Risoluzione. — Siano A e B gli estremi dell'asta, O il punto cercato; in A sia applicato il peso di 5 *kg*, in B l'altro. Essendo le due forze verticali, e l'asta orizzontale, i bracci delle due forze sono i segmenti OA ed OB. Per la 3) del § 78, dovrà essere:

$5 : 7 = (OB) : (OA)$; componendo: $(5 + 7) : 7 = (OB + OA) : (OA)$.

Ma: $(OB + OA) = \text{cm } 60$; quindi: $12 : 7 = 60 : (OA)$; da cui:

$$(OA) = \text{cm } \frac{60 \times 7}{12} = \text{cm } 35.$$

Risposta. L'asta dovrà sostenersi per un punto di AB posto a *cm* 35 dal punto di applicazione del peso minore.

2. *Un'asta orizzontale lunga* l (cm) *può ruotare intorno ad un suo estremo* O; *all'altro estremo è saldata una sfera di ferro di raggio* r (cm). *Sapendo che il peso minimo occorrente per rompere un filo di acciaio della sezione di 1 mm²* (carico di rottura), *è di* kg *90, calcolare il diametro minimo di un filo di acciaio, con un capo fissato a* cm *20 di distanza da* O, *capace di sostenere il peso della sfera.* (Trascurare il peso dell'asta).

Risoluzione. — La sfera agisce all'estremità dell'asta orizzontale, con una forza di intensità eguale al suo peso; questo, come è noto (vedasi anche § 162-4), si calcola moltiplicando il volume della sfera per la densità del ferro. Sia P il peso della sfera, V il suo volume, $d = 7{,}8$ la densità del ferro; è: $V = \text{cm}^3\, \frac{4}{3}\pi r^3$; quindi:

$$P = Vd = \text{g}\, \frac{4}{3}\pi r^3 \times 7{,}8 = \text{g}\, 10{,}4\,\pi r^3 = \text{kg}\, 0{,}0104\,\pi r^3.$$

La forza F' agisce come se fosse applicata n[illegible] braccio di *cm* $(l + r)$; il suo effetto è [illegible]

Sia l [illegible] $m = l = 20$. Per l'equilibrio dovrà essere $m = m'$, cioè:

$$F \times 20 = 0{,}0104\, \pi r^3 (l + r); \qquad \text{da cui:}$$

$$F = \text{kg}\, \frac{0{,}0104\, \pi r^3 (l + r)}{20} = \text{kg}\, 0{,}00052\, \pi r^3 (l + r)$$

Sia x (*mm*) il diametro del filo, la sua sezione sarà $s = \text{mm}^2\, \frac{\pi x^2}{4}$, e potrà sopportare il carico di:

$$F' = \text{kg}\, 90\, \frac{\pi x^2}{4} = \text{kg}\, 22{,}5\, \pi x^2.$$

Dovendo essere $F' \geqq F$, avremo:

$$22{,}5\, \pi x^2 > 0{,}00052\, \pi r^3 (l + r), \qquad \text{da cui:}$$

$$x > \sqrt{\frac{0{,}00052\, r^3 (l + r)}{22{,}5}} \; ; \quad \text{cioè:} \qquad x \geqq \text{mm}\, 0{,}0048\, r \sqrt{r (l + r)}\, .$$

b) **Problemi da risolvere.** (In tutti questi problemi, trascurare il peso dell'asta).

1. Un'asta AB di legno orizzontale, lunga *cm* 80, è sostenuta per un perno orizzontale (perpendicolare ad AB), posto a *cm* 30 da A; a questo estremo è applicato un peso di *kg* 60. Che peso occorre sospendere all'altro estremo B, perchè l'asta si mantenga orizzontale?

2. Un'asta AB è sospesa per il suo centro di gravità O; sulla metà OA sono sospesi: un corpo di *kg* 8 a 15 *cm* da O, un corpo di *kg* 14 a 40 *cm* da O, un corpo di *kg* 50 alla estremità A; sulla metà OB è sospeso un corpo di *kg* 20 alla distanza di *cm* 25 da O. Che peso bisogna applicare all'estremo B, perchè l'asta si mantenga orizzontale?

3. Un'asta è piegata a squadra, con le due branche eguali, e può ruotare (senza deformazioni) attorno al vertice dell'angolo che ha per lati le due branche (supposte due segmenti); all'estremo di una branca è sospeso (con un filo) un cono equilatero di ferro, di lato l. Calcolare qual peso bisogna sospendere all'estremo dell'altra branca, perchè la branca che sostiene il cono faccia con la verticale:

   1°: un angolo di 30°; 2°: un angolo di 45°; 3°: un angolo di 20° 13′ 45″.

   (N. B. - L'ultimo caso richiede l'uso delle tavole trigonometriche; gli altri no).

La gravità.

82. **La forza di gravità.** — Abbiamo chiamato *gravità* (§ 18) la forza con cui la Terra attira i corpi ad essa vicini; il *peso* di un corpo è l'intensità con cui tale forza di gravità agisce su di esso. L'osservazione ci dice che un corpo, lasciato libero nello spazio (nel vuoto) (1), *cade* secondo la retta che unisce tale corpo (supposto un punto) col centro della Terra. Questa è adunque la direzione secondo cui agisce la gravità.

Tale direzione si chiama *la verticale*, ed è quella che assume il **filo a piombo**; cioè un corpo pesante attaccato ad un filo, di cui l'altro estremo è tenuto

---

(1) Quando diciamo *nel vuoto*, intendiamo nello spazio privo anche di aria.

fisso (Fig. 96). Questa direzione è anche perpendicolare alla superficie dell'acqua stagnante, come si può verificare con una squadra, (Fig. 97). Le verticali nei diversi punti, concorrono tutte verso il centro della Terra; sono cioè nella direzione dei raggi terrestri.

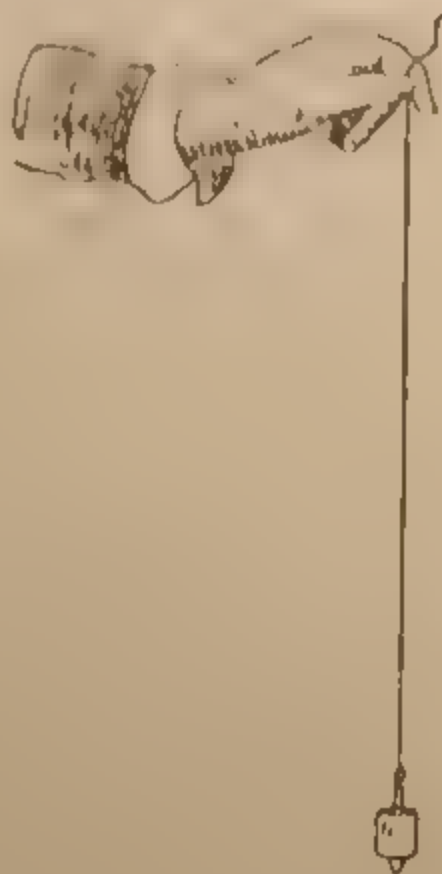
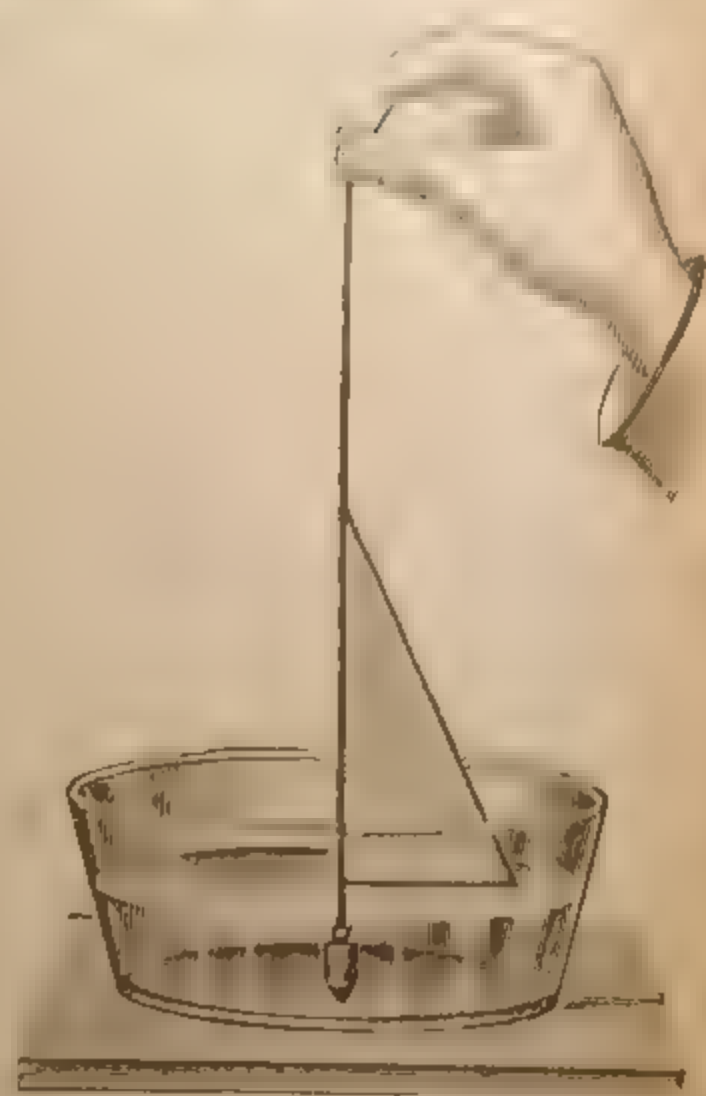



Fig. 96. Fig. 97.

83. Centro di gravità. — Qualunque delle particelle che compongono un corpo, staccata da questo e lasciata libera, cade; quindi la gravità agisce su di un corpo come un complesso di innumerevoli forze, una per ogni punto materiale del corpo, ciascuna eguale al peso di tale punto. Tutte queste forze a rigore non sono parallele, perchè le loro direzioni s'incontrano nel centro della Terra. Ma per la grandissima distanza di questo centro, si considerano le forze di gravità agenti su un corpo di dimensioni comuni, come parallele; due fili a piombo, attaccati alla cima della cupola di S. Pietro alla distanza di 1 metro, sarebbero vicino al pavimento, cioè a circa *m* 130 di distanza, più vicini di poco più di *mm* 0,02.

Tutte queste forze parallele e concordi, ammettono una risultante, anche essa verticale, di intensità eguale alla somma dei pesi delle varie molecole, cioè al peso totale del corpo; ed applicata in un punto che dovremmo chiamare (§ 74): *centro delle forze parallele dovute alla gravità.* Lo chiameremo più brevemente **centro di gravità, o baricentro**; esso, per la proprietà vista al § 74, è invariabile in un corpo, comunque questo si muova. Concludendo:

La gravità agisce su un corpo come una forza sola, verticale, diretta verso il basso, applicata nel baricentro, di intensità eguale al peso del corpo.

84. Ricerca geometrica del centro di gravità. — Se il corpo è omogeneo, ed ha una figura geometrica regolare, il suo baricentro coincide col centro di figura. Esaminiamo infatti i casi principali. Supponiamo in ogni caso, che si tratti di figure nel senso fisico, cioè materiali, e quindi pesanti.

1. **Il baricentro di un segmento è il suo punto medio.** – Scomponiamo il segmento in un complesso di coppie di punti equidistanti dagli estremi. Ogni coppia costituisce un sistema di due forze parallele, concordi, eguali, la cui risultante è applicata nel punto medio del segmento che li congiunge, cioè nel punto medio del segmento dato. Questo sarà perciò il baricentro del segmento.

2. **Il baricentro di una figura piana qualsiasi, è su un suo diametro.** – Data una figura piana qualsiasi, consideriamola scomposta in un sistema di corde

parallele, di [illegible]za tanto piccola quanto si vuole. (Fig. 98). Il luogo dei punti medi di queste corde [illegible] una curva AB. Se in particolare questa linea è un segmento, lo chiameremo un diametro. Se la figura ha un asse di simmetria, [illegible] un diametro.

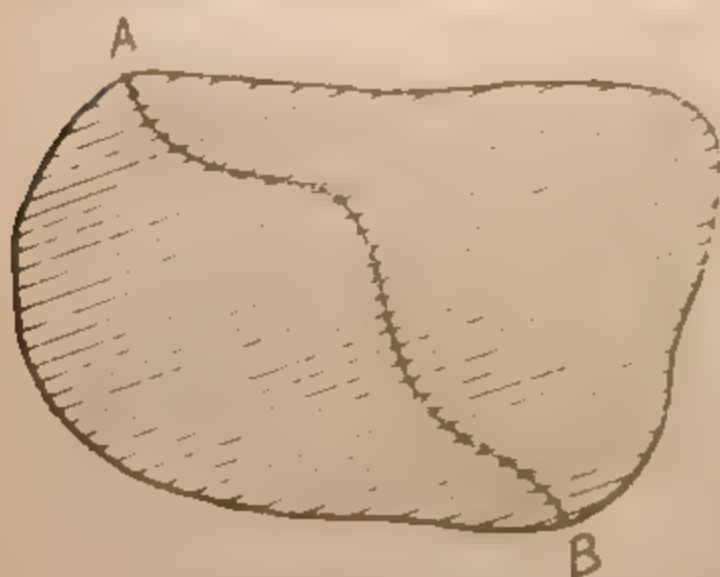



Fig. 98.

Se la figura ha un diametro, il baricentro sarà su di esso.

Infatti, scomponiamo la figura nel sistema di corde parallele, di cui AB sia il diametro, (Fig. 99). Il baricentro di ciascuna corda sarà il suo punto medio (caso precedente). Possiamo pensare che il corpo, rispetto alla gravità, sia equivalente all'insieme dei punti del diametro, ciascuno dei quali abbia peso eguale alla corda che lo contiene. Il baricentro sarà il punto di applicazione della risultante di un sistema di forze parallele, d'intensità disuguale, ma aventi tutte il punto di applicazione su AB, il punto di applicazione di tale risultante sarà manifestamente anch'esso su AB, c. d. d.

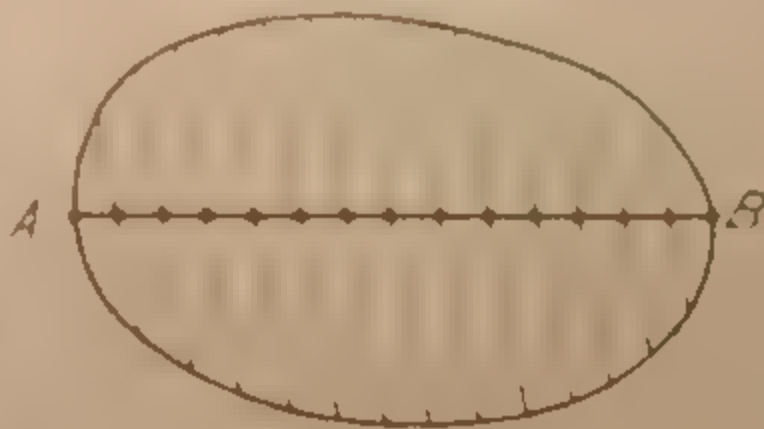



Fig. 99.

Se quindi di una figura piana riusciamo a conoscere due diametri, il baricentro sarà il loro punto d'incontro.

3. **Il baricentro di un cerchio è il suo centro.** – Infatti, ogni diametro del cerchio (nel senso geometrico) è anche un diametro (nel senso fisico, secondo il N. 2).

4. **Il baricentro di un triangolo è il punto d'incontro delle mediane.** – Infatti, considerando il sistema di corde parallele ad un lato AC del triangolo, i punti medi di esse giacciono sulla mediana AM relativa a tale lato, (Fig. 100): le mediane sono perciò dei diametri. Per questo in Geometria, il punto di incontro delle mediane si è chiamato il *baricentro del triangolo*. Sappiamo anche che tale punto è su ciascuna mediana ai $^2/_3$ dal vertice.

Fig. 100.

5. **Il baricentro di un parallelogrammo è il punto d'incontro delle diagonali.** – Infatti, considerando il sistema di corde parallele ad una diagonale AC, (Fig. 101), i loro punti medi giacciono sull'altra diagonale; le due diagonali sono quindi due diametri.

Fig. 101.

La proprietà vale naturalmente, in particolare, per il *rombo*, il *rettangolo* ed il *quadrato*.

6. **Il baricentro del trapezio si trova con la seguente costruzione geometrica:** Sia $ABCD$ il trapezio (Fig. 102), ed MN la congiungente i punti medi delle due basi. Si prolungano le due basi, da parti opposte rispetto

ad MN, ciascuna di un segmento uguale all'altra b
e $DF = AB$. Si congiunga E con F; EF incontra

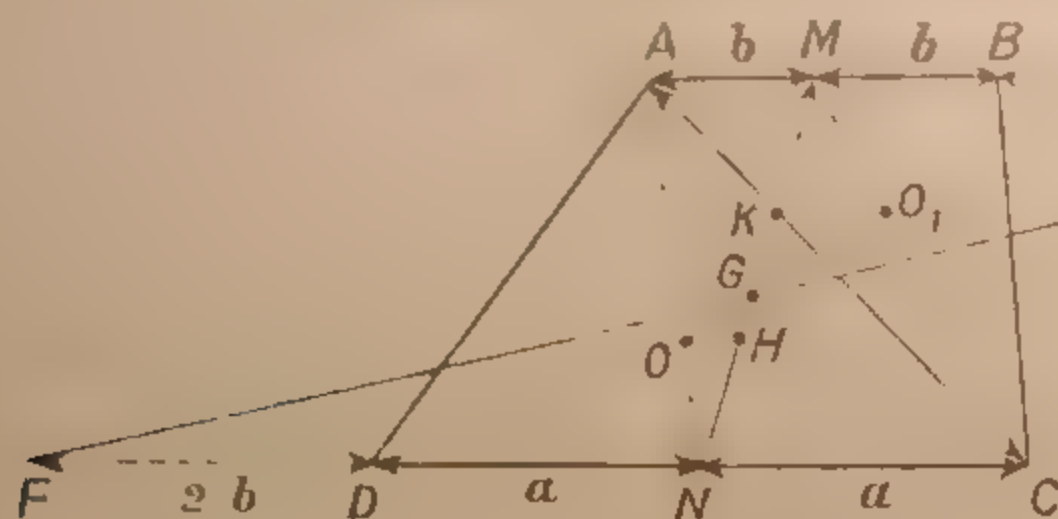



Fig. 102.

sono da bande opposte rispetto ad MN) in un punto G, che è il baricentro del trapezio.

Infatti, il punto medio di qualunque corda del trapezio, parallela alle basi, è su MN; questo è quindi un diametro e conterrà il baricentro. Sia AC una diagonale del trapezio; questo è scomposto da essa nei due triangoli ADC ed ABC. Il centro di gravità di ADC è sulla mediana AN, in un punto O tale che $NO = \frac{1}{3} AN$; il centro di gravità di ABC è sulla mediana CM, in un punto O_1 tale che $MO_1 = \frac{1}{3} CM$; il baricentro del trapezio è il punto di applicazione della risultante di due forze parallele e concordi, eguali rispettivamente ai pesi dei due triangoli ADC ed ABC, applicate rispettivamente in O ed O_1; tale punto è manifestamente sulla OO_1. Quindi il baricentro del trapezio, dovendo essere su MN e su OO_1, è il loro punto d'incontro G.

Si conducano OH ed O_1K parallele alle basi del trapezio.

Dai triangoli simili NOH ed NAM, si ricava: $NO : NA = NH : NM = HO : AM$; ed essendo $NO = \frac{1}{3} NA$, sarà pure: $NH = \frac{1}{3} NM$; $HO = \frac{1}{3} AM$.

Dai triangoli simili MKO_1 ed MNC si ricava: $MO_1 : MC = MK : MN = KO_1 : NC$; ed essendo $MO_1 = \frac{1}{3} MC$, sarà pure: $MK = \frac{1}{3} MN$; $KO_1 = \frac{1}{3} NC$.

Quindi: $NH = MK$, perchè entrambi eguali a $\frac{1}{3} MN$, di cui KH è l'altro terzo; cioè, ponendo $(MN) = m$: $\quad (NH) = (MK) = (KH) = \dfrac{m}{3}$.

Dai triangoli simili OHG ed O_1KG si ricava: $GH : GK = OH : O_1K$; ponendo: $(NC) = a$, $(AM) = b$, $(GH) = x$, è: $(GK) = (KH) - (GH) = \dfrac{m}{3} - x$; allora l'ultima proporzione si scrive: $x : \left(\dfrac{m}{3} - x\right) = \dfrac{b}{3} : \dfrac{a}{3}$; componendo: $\dfrac{m}{3} : x = \dfrac{a+b}{3} : \dfrac{b}{3}$

da cui:
$$x = \frac{m}{3} \times \frac{b}{a+b};$$

quindi:
$$(GN) = \frac{m}{3} + x = \frac{m}{3}\left(1 + \frac{b}{a+b}\right) = \frac{m}{3} \times \frac{a+2b}{a+b}.$$

Sia ora G_1 il punto d'intersezione di EF con MN; dai triangoli simili G_1FN e G_1EM si ricava: $\quad G_1N : G_1M = NF : ME$. $\quad$ Essendo:
$(NF) = (ND) + (DF) = (ND) + (AB) = a + 2b$; $\quad (G_1M) = (MN) - (G_1N) = m - (G_1N)$;
$(ME) = (MB) + (BE) = (MB) + (DC) = b + 2a$; $\quad$ sostituendo nell'ultima proporzione si ottiene:

$$(G_1N) : [m - (G_1N)] = (a + 2b) : (b + 2a);$$

componendo:
$$m : (G_1N) = (3a + 3b) : (a + 2b);$$

da cui:
$$(G_1N) = \frac{m}{3} \times \frac{a+2b}{a+b}.$$

Si trova adunque che $G_1N = GN$, e quindi G e G_1 sono lo stesso punto; $\quad$ c. d. d.

7. **Il baricentro di un poligono regolare è il centro del cerchio circoscritto.** – Infatti, ogni segmento che congiunge il centro col punto medio di un lato del poligono, è un diametro.

8. **Il baricentro di un prisma a basi parallele, è il punto medio della congiungente i baricentri delle basi.** – Infatti, considerando il sistema dei poligoni eguali, sezioni del prisma con piani paralleli alle basi, tali poligoni hanno il baricentro sulla congiungente suddetta, ed hanno tutti lo stesso peso. Quindi rispetto alla gravità, il prisma equivale a tale congiungente, i cui punti hanno ciascuno peso eguale a quello di un poligono sezione; perciò il baricentro sarà, per il N. 1, sul punto medio di essa.

9. **Il baricentro di un cilindro** (a basi parallele), **è il punto medio della congiungente i centri delle basi.** - Si ricava con ragionamento eguale al precedente.

10. **Il baricentro di una piramide qualsiasi, è sul segmento che congiunge il vertice con il baricentro della base, ai $^3/_4$ dal vertice.**

a) Si abbia dapprima una piramide a base triangolare, (Fig. 103). Consideriamo il sistema dei triangoli, sezioni della piramide con piani paralleli alla base ABC; tali triangoli hanno il baricentro sulla VG_1 congiungente il vertice V della piramide con il baricentro G_1 della base. Su tale segmento sarà perciò anche il baricentro della piramide. Ma questa si può considerare come avente C per vertice e VAB per base; quindi il suo baricentro sarà pure sul segmento CG_2 che congiunge C con il baricentro del triangolo VAB. Ora G_1 è (per il N. 4) sulla mediana CD del triangolo ABC, relativa al lato AB; e G_2 è parimenti sulla mediana VD del triangolo VAB relativa allo stesso lato AB; cioè CD e VD hanno D in comune e giacciono in un piano; questo piano contiene anche CG_2 e VG_1 che avranno perciò un punto G in comune. Il baricentro della piramide, dovendo essere, come s'è visto, su VG_1 e CG_2, sarà il punto G.

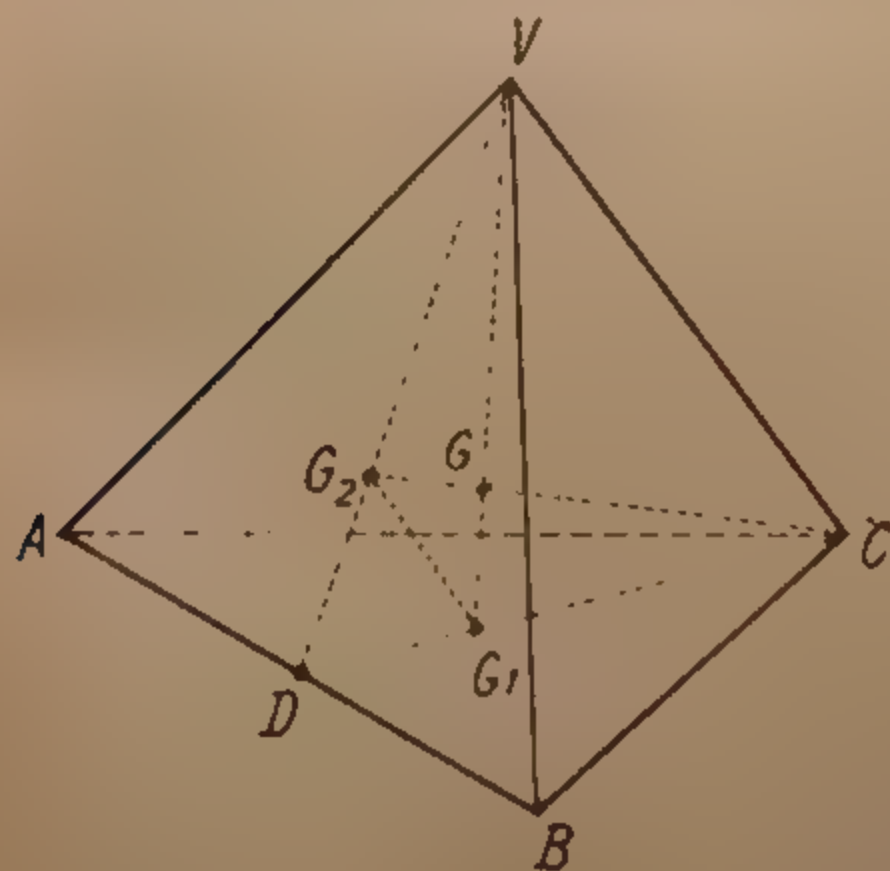



Fig. 103.

Abbiamo per il N. 4: $DG_1 = \frac{1}{3} DC$; $DG_2 = \frac{1}{3} VD$; quindi i triangoli DG_1G_2 e DCV, avendo un angolo in comune e i lati che lo comprendono proporzionali, sono simili, e sarà: $G_1G_2 = \frac{1}{3} VC$ e tali segmenti sono paralleli. Ma allora anche i triangoli G_2GG_1 e CGV sono simili, quindi sarà:

$G_1G_2 : VC = G_1G : VG$; ma, come si è visto è: $G_1G_2 = \frac{1}{3} VC$, quindi anche: $G_1G = \frac{1}{3} VG$ e perciò: $VG = {}^3/_4 \, VG_1$. *c. d. d.*

b) Si abbia ora una piramide qualsiasi, (Fig. 104). Consideriamo tutte le diagonali del poligono base condotte da un suo vertice, e tagliamo la piramide con i piani che contengono il vertice e ciascuna di dette diagonali; avremo scomposto la piramide in tante piramidi a base triangolare. Il baricentro di ciascuna di queste è, per il teorema

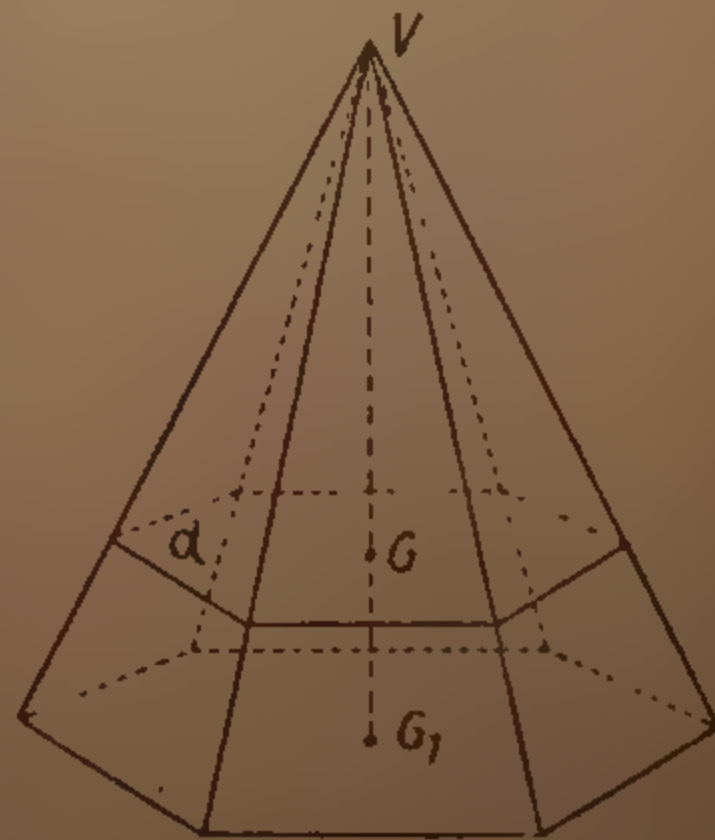



Fig. 104.

precedente, sulla congiungente il vertice col baricentro [illegible]
ai $^3/_4$ dal vertice. È facile vedere che i baricentri di tutte q[illegible],
su un piano α parallelo alla base, la cui distanza dal vertice [illegible]
piramide data.

D'altra parte, considerando il sistema dei poligoni sezioni della [illegible] con piani paralleli alla base, essi hanno il baricentro sulla congiungente [illegible] col il baricentro G_1 della base; quindi su questa congiungente sarà [illegible] il baricentro della piramide data; cioè sarà sull'intersezione G di VG_1 col piano α. Se la distanza di V da α è i $^3/_4$ dell'altezza della piramide, è anche: $VG = {}^3/_4 \, VG_1$ [illegible]

11. **Il baricentro di un cono qualsiasi, è sulla congiungente il vertice col centro della base, ai $^3/_4$ dal vertice.**

Infatti il cono è l'elemento di separazione delle classi contigue di piramidi iscritte e circoscritte ad esso; tutte le piramidi di queste classi hanno il baricentro sulla congiungente il vertice con il centro della base del cono, ai $^3/_4$ dal vertice; quindi tale punto è anche il baricentro del cono.

12. **Il baricentro di una sfera è il suo centro.** – Infatti, considerando il sistema di cerchi, sezioni della sfera con piani paralleli, i loro baricentri giacciono sul diametro della sfera, perpendicolare a tali piani; su tale diametro sarà perciò il baricentro della sfera. Questo baricentro pertanto, dovendo essere su qualunque diametro della sfera, è il centro di essa.

85. **Ricerca sperimentale del centro di gravità.** — Se il corpo è irregolare, il baricentro si trova con l'esperienza. Questa è basata sul fatto che:

Un corpo pesante sospeso ad un punto è in equilibrio, allorchè il centro di gravità ed il punto di sospensione giacciono sulla medesima verticale.

Difatti, sia O il punto di sospensione, e G il centro di gravità di un corpo, (Fig. 105). La forza di gravità agente sul corpo, può rappresentarsi con il segmento verticale GP; essa farà ruotare il corpo attorno ad O finchè O si trovi sulla direzione di GP (§ 76), cioè finchè O e G siano sulla stessa verticale.

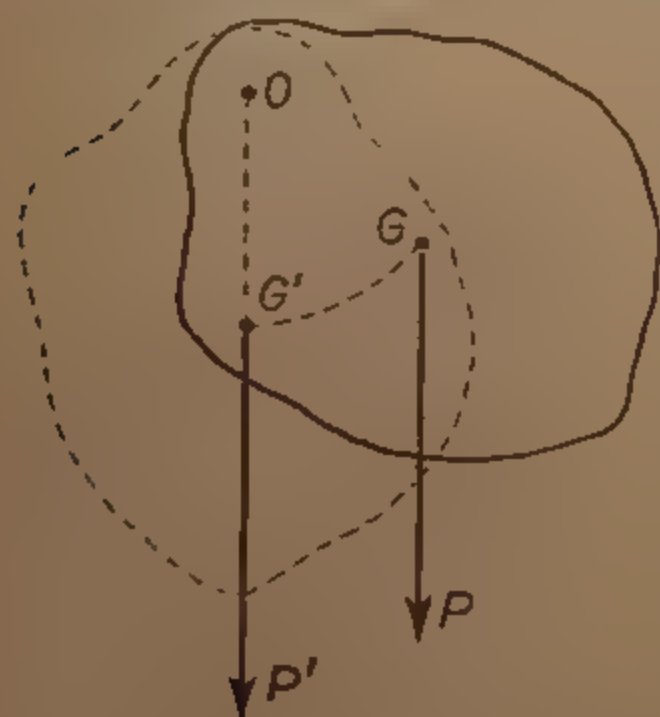



Fig. 105.

E allora, si sospenda il corpo, di cui si cerca il baricentro, con un filo, per un suo punto B qualsiasi (Fig. 106) e si aspetti che sia fermo; il centro di gravità deve trovarsi sulla verticale passante per B, cioè sul prolungamento del filo. Si ripete l'operazione sospendendo il corpo per un altro punto A; anche ora il centro di gravità sarà sul prolungamento del filo. Il punto d'incontro G dei due prolungamenti, è il centro di gravità cercato.

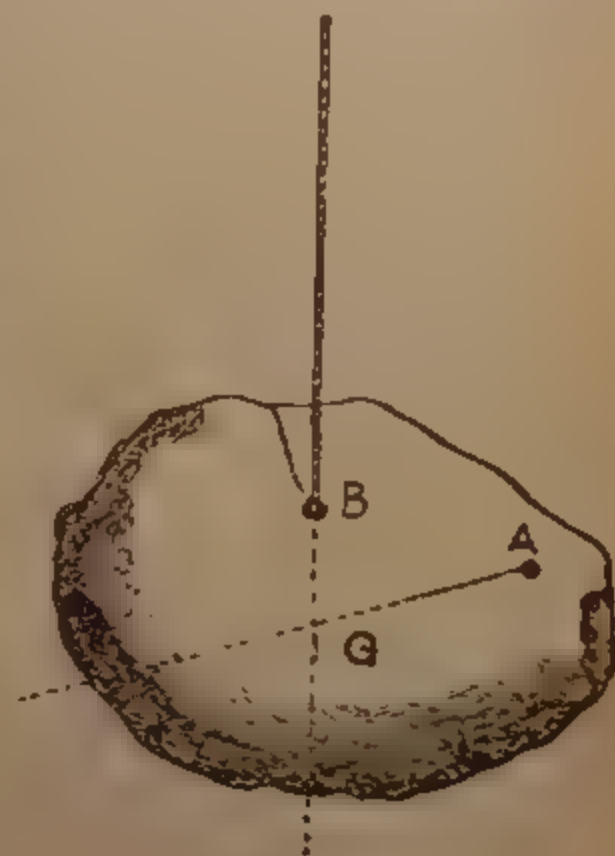



Fig. 106.

Non è detto che il baricentro sia necessariamente un punto del corpo; esso può essere anche fuori del corpo, se questo ha una cavità (Fig. 107).

Il ba[illegible] A, B... [illegible]
[illegible]tamente insieme, si trova considerando le forze parallele $G'P$, $G''Q$.... (Fig. 108) costituite dal peso di ciascuno dei corpi, ed applicate nei rispettivi centri di gravità G', G''.... Si trovi la risultante GR di queste forze, con la nota regola del § 65; il punto di applicazione G di essa è il centro di gravità di tutto il sistema. (Vedasi problema N. 2 del § 88).

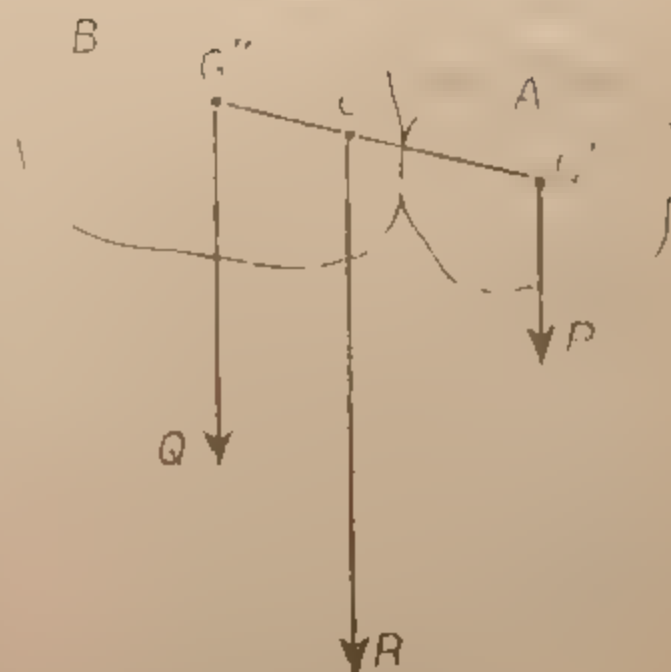



Fig. 107

Fig. 108.

86. **Equilibrio di un corpo pesante sospeso ad un punto.** — Abbiamo visto nel paragrafo precedente, qual'è la condizione di equilibrio di un corpo pesante sospeso ad un punto: **il punto di sospensione ed il centro di gravità del corpo devono trovarsi sulla stessa verticale.** Questa condizione può essere soddisfatta in tre modi:

1. **Equilibrio stabile,** allorchè il centro di gravità G è *sotto* al punto di sospensione O, (Fig. 109). Spostando alquanto il corpo dalla posizione di equilibrio, esso vi ritorna (dopo qualche oscillazione). In queste condizioni si trovano quelle figure che stanno in equilibrio sulla punta P di un piede (Fig. 110), nelle quali i pesi m di piombo abbassano il centro di gravità al di sotto del punto P di appoggio.

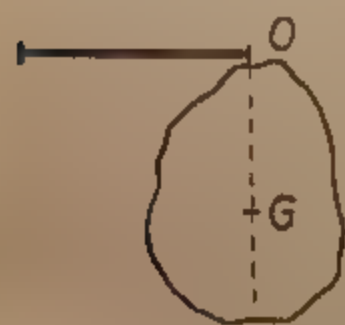
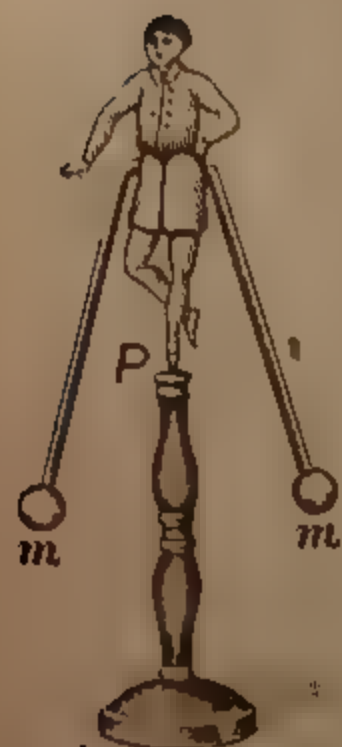



Fig. 109.

2. **Equilibrio istabile,** allorchè il centro di gravità G è *sopra* il punto di sospensione O (Fig. 111). Spostando il corpo, anche di pochissimo, dalla posizione di equilibrio, esso non vi ritorna; ma se ne allontana sempre più, fino ad occupare la posizione dell'equilibrio stabile. In queste condizioni si trova, ad es., una sedia sostenuta su un dito all'estremo di una gamba, (Fig. 112).

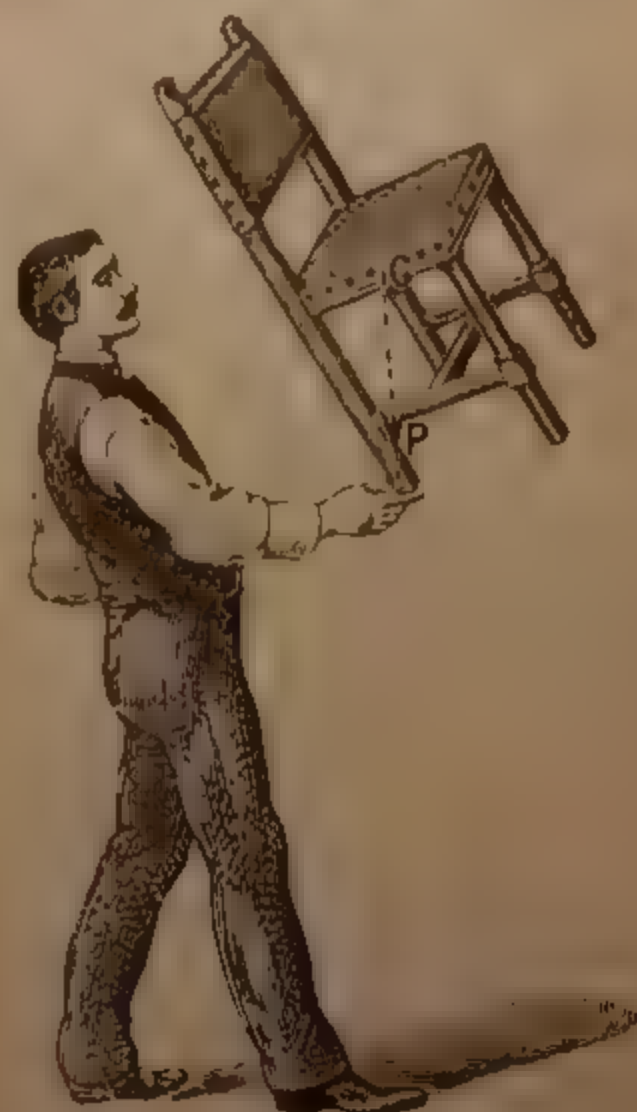



Fig. 110.

Fig. 111.

Fig. 112.

3. **Equilibrio indifferente,** allorchè il centro di gravità *coincide* col punto di sospensione. Comunque si sposti il corpo, esso rimane in equilibrio.

87. **Equilibrio di un corpo pesante, appoggiato su un piano orizzontale.** — Quando un corpo è appoggiato su un piano orizzontale, ha in comune con questo un certo numero di punti A, B, C.... F, G.... (Fig. 113).

Sarà possibile formare con *alcuni* di essi $ABCDE$ un p[illegible] comprenda i punti rimanenti $F, G....$; in modo cio[illegible]

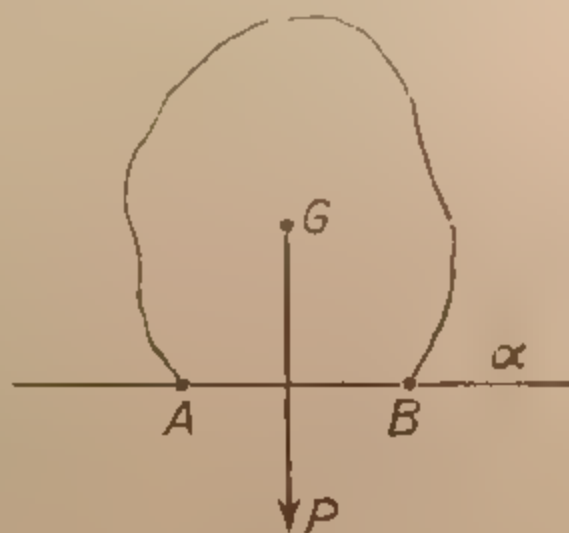
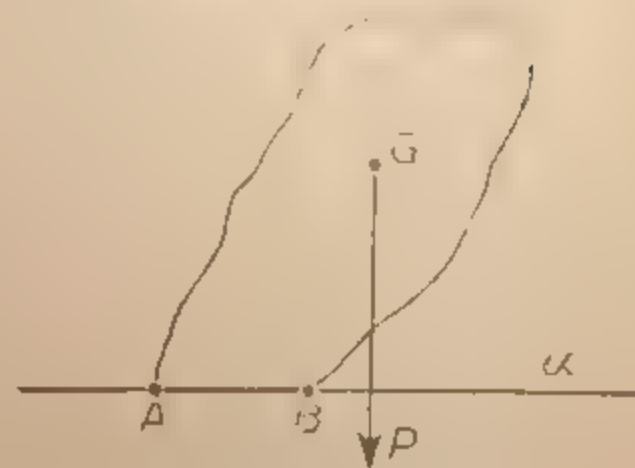



Fig. 113. Fig. 114. Fig. 115.

punti sia esterno al poligono. Questo poligono si chiama la base di appoggio.

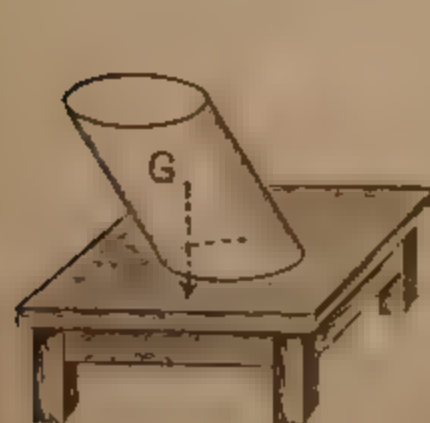
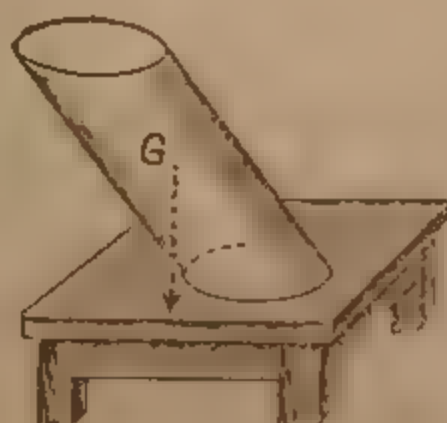



Fig. 116. Fig. 117.

La gravità su un corpo la cui base di appoggio sia in sezione AB (Figg. 114-115), agisce (come sappiamo) sul baricentro G, nella direzione della verticale GP. Se questa direzione incontra il piano a d'appoggio *dentro* la base d'appoggio (Fig. 116), la gravità evidentemente non può muovere il corpo, e questo rimane in equilibrio. Se invece GP incontra il piano a fuori di AB (Fig. 115), la gravità farà ruo-

Fig. 118.

Fig. 119.

tare il corpo intorno ad un asse passante per B, ed il corpo ribalta. Quindi:

Un corpo pesante appoggiato su un piano orizzontale è in equilibrio, allorchè la verticale abbassata dal suo centro di gravità cade dentro la base di appoggio.

Un cilindro retto ha per base di appoggio il cerchio base; la verticale abbassata dal suo centro di gravità cade al centro di tale cerchio, e il cilindro è in equilibrio. È ancora in equilibrio un cilindro obliquo, nelle condizioni della Fig. 116. Se in-

Fig. 120.

Fig. 122.

Fig. 123.

vece l'inclinazione aumenta, o la lunghezza del lato del cilindro è grande come in Fig. 117, il cilindro non può rimanere in equilibrio, e cade.

Si spiega nello stesso modo come non cadano, pur essendo inclinate, la torre pendente di Pisa (Fig. 118) e la *Garisenda* di Bologna (Fig. 119).

Fig. 121.

Per una persona in piedi, ferma, la base di appoggio è il trapezio ottenuto congiungendo le due punte e i due talloni dei piedi (supposti questi ridotti a due segmenti) (Fig. 120). La verticale abbassata dal centro di gravità della persona, cade in *O* fra i due piedi, cioè dentro la base di appoggio e la persona è in equilibrio. L'equilibrio sussiste anche, se s'innalza il centro di gravità, come avviene per una persona che cammini sui trampoli, (Fig. 121).

Fig. 124.

Ma se essa solleva con [illegible] un corpo [illegible] per-
gare il corpo dall'altro lato, per mantenere l'equilibrio. [illegible]
una persona che porta un carico sulle spalle, [illegible] il corpo [illegible]
(Fig. 123).

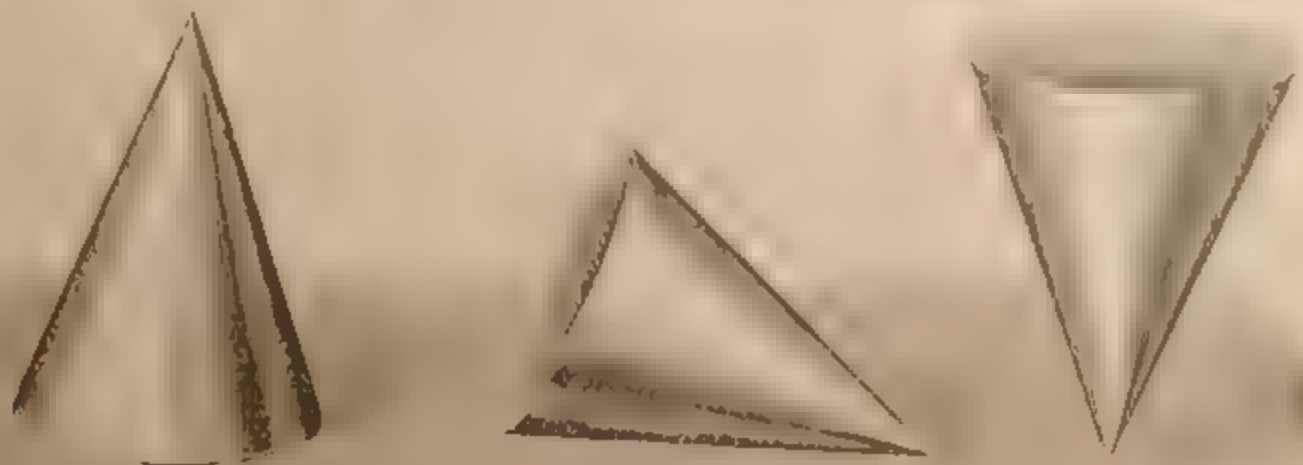



Fig. 125.

Nel caricare una vettura si deve evitare di porre i carichi in alto, per non alzare troppo il centro di gravità; altrimenti, su una strada in pendenza, la vettura potrebbe facilmente ribaltare.

La base di appoggio può ridursi ad una piccola superficie; ciò spiega come non cadano alcuni massi che si trovano in natura, pur essendo sostenuti dal terreno quasi per un punto. La Fig. 124 mostra uno di questi massi, detto la *Roccia pendente*, nel Colorado.

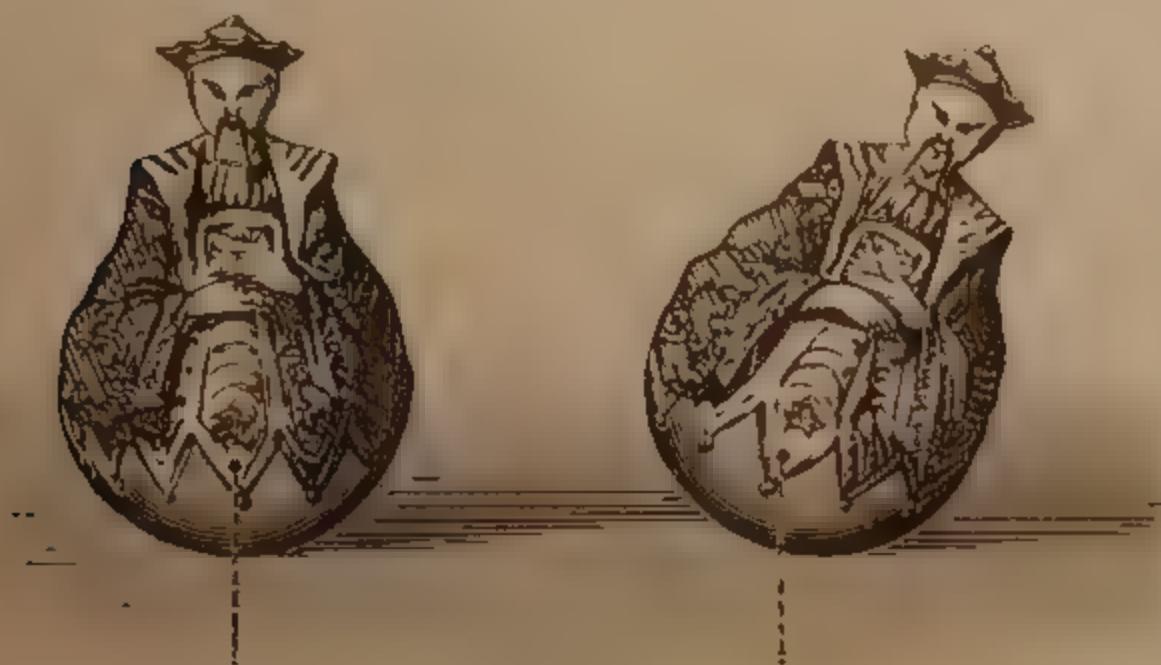
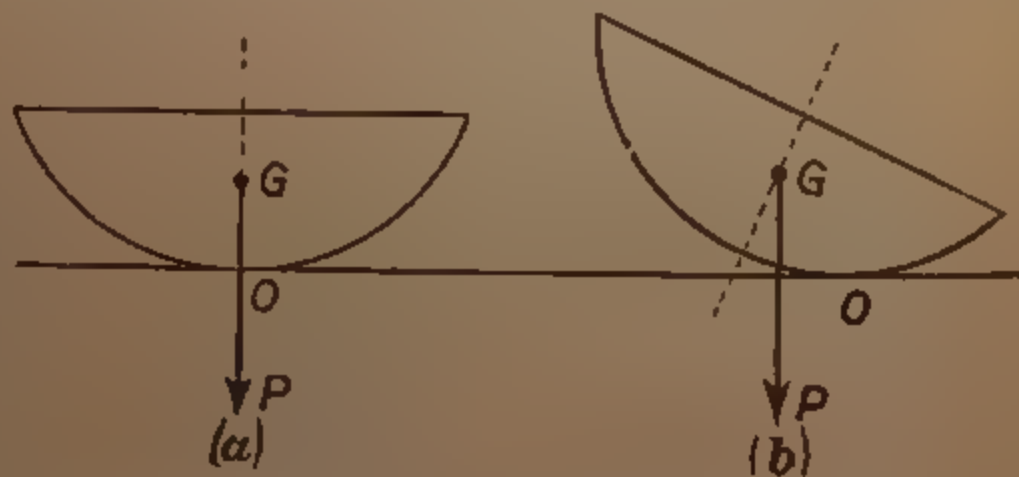



Fig. 126.

La base di appoggio può ridursi ad un punto o ad un segmento. La Fig. 125 mostra i varî casi con un medesimo corpo a forma di cono: a sinistra esso è appoggiato sulla sua base, ed è in equilibrio stabile; in mezzo è appoggiato su una generatrice, ed è in equilibrio indifferente; a destra è appoggiato sul vertice, ed è in equilibrio istabile.

Fig. 127.

Hanno pure un sol punto d'appoggio quelle figure che inclinate si raddrizzano da sè, (Fig. 126). Sono formate da un segmento sferico di piombo, sormontato da una figurina di celluloide o di altra sostanza, così leggera da trascurarne il peso. Rappresentiamo il segmento in sezione (Fig. 127); nella posizione (a) è in equilibrio, poichè la verticale abbassata dal centro di gravità G, cade nel punto di appoggio O.

Nella posizione inclinata (b) la gravità, rappresentata da GP, fa ruotare il segmento intorno ad O, fino a ricondurlo alla posizione (a).

88. Problemi sulla gravità.

a) Problemi risoluti.

1. Dimostrare che *se due triangoli hanno la base in comune, la congiungente i loro baricentri è parallela alla congiungente i vertici.*

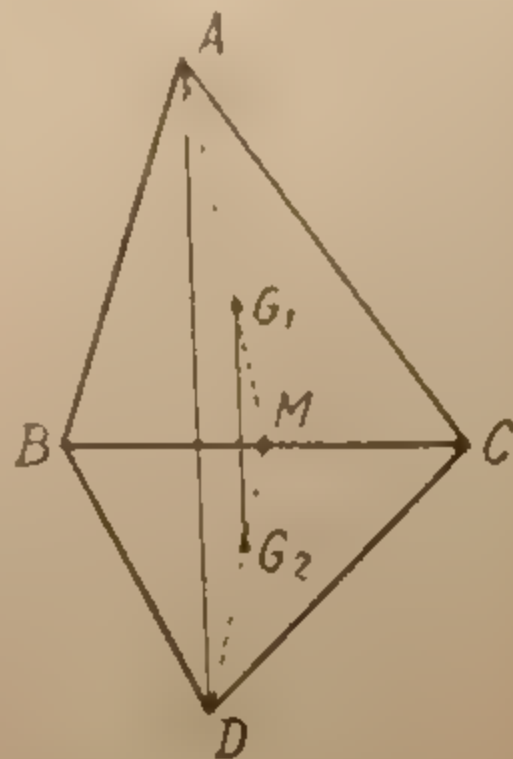
Fig. 128.

Dimostrazione. — Siano ABC e DBC i due triangoli, (Fig. 128), sia BC la base in comune, AD la congiungente i vertici, G_1 il baricentro di ABC e G_2 quello di DBC. Dobbiamo dimostrare che G_1G_2 è parallela ad AD.

Infatti, sia M il punto medio di BC; è: (§ 84-4):

$$MG_1 = \tfrac{1}{3}\, MA, \qquad MG_2 = \tfrac{1}{3}\, MD; \qquad \text{cioè:}$$

$$MG_1 : MA = MG_2 : MD.$$

I triangoli MG_1G_2 ed MAD hanno un angolo in comune, e i lati che lo comprendono proporzionali; quindi sono simili, e sarà G_1G_2 parallela ad AD. *c. d. d.*

2. *Un cilindro di marmo, di cm 5 di raggio ed alto cm 12, è sormontato da un cono di ferro con la base in comune, il cui lato è di cm 15. Trovare la posizione del centro di gravità del sistema.*

Risoluzione. — Il sistema è rappresentato schematicamente in Fig. 129.

Fig. 129.

Dati: $(CB) = (OA) = 5$; $(AB) = (OC) = 12$; $(VA) = 15$; densità: del marmo $= 2{,}7$; del ferro $= 7{,}8$.

Calcoliamo l'altezza (VO) del cono, col teorema di Pitagora:

$$(VO) = \sqrt{(VA)^2 - (OA)^2} = \text{cm}\,\sqrt{15^2 - 5^2} = \text{cm } 14{,}1.$$

Abbiamo ricordato (§ 81-2), che il peso di un corpo è uguale al prodotto del volume per la densità. Quindi:

$$\text{Peso del cilindro} = g\,(\underbrace{5^2 \times 3{,}14 \times 12}_{\text{volume}} \times 2{,}7) = g\ 2543{,}4$$

$$\text{Peso del cono} = g\,(\overbrace{5^2 \times 3{,}14} \times \overbrace{(14{,}1 : 3)} \times 7{,}8) = g\ 2877{,}8.$$

Il baricentro del cilindro è G_1 a metà di OC; il baricentro del cono è G_2 tale che (§ 84 - 11):

$$(OG_2) = \frac{1}{4}\,(VO) = \text{cm}\,\frac{14{,}1}{4} = \text{cm } 3{,}5.$$

Dovremo perciò comporre una forza in G_1 di g 2543,4 con un'altra parallela in G_2 di g 2877,8, essendo:

$$(G_1G_2) = (OG_1) + (OG_2) = \text{cm}\,(6 + 3{,}5) = \text{cm } 9{,}5.$$

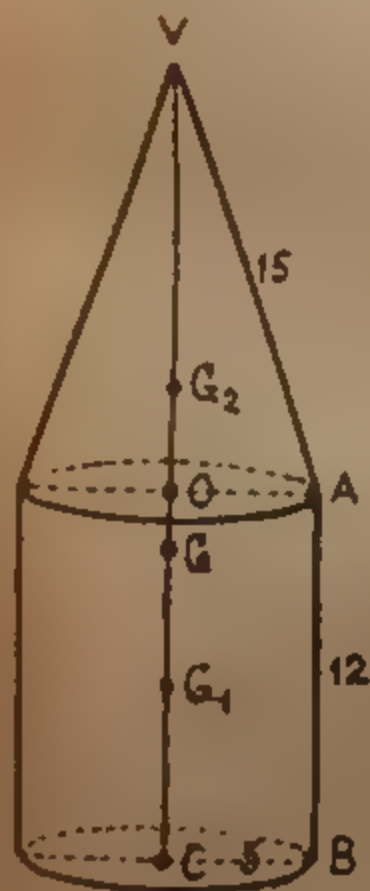
Il punto d'applicazione G della risultante di queste due forze, sarà tale che:

$$(G_1G) : (GG_2) = 2877{,}8 : 2543{,}4;$$

componendo: $$(G_1G) : (G_1G + GG_2) = 2877{,}8 : (2877{,}8 + 2543{,}4);$$

cioè: $$(G_1G) : 9{,}5 = 2877{,}8 : 5421{,}2;$$

risolvendo: $$(G_1G) = \text{cm}\,\frac{9{,}5 \times 2877{,}8}{5421{,}2} = \text{cm } 5;$$

e infine: $$(CG) = (CG_1) + (G_1G) = \text{cm}\,(6 + 5) = \text{cm } 11.$$

Risposta: Il baricentro G del sistema è sulla congiungente il [illegible] col centro della base non comune del cilindro, a *cm* 11 da questa b[illegible]

b) Problemi da risolvere.

1. Un filo metallico omogeneo ed uniforme, è piegato a forma di triangolo isoscele; le lunghezze del lato e della base sono rispettivamente l ed a. Determinare la posizione del baricentro.

2. Un cilindro retto è formato da due pezzi cilindrici di sostanza diversa: l'uno di altezza h e densità d, l'altro di altezza h_1 e densità d_1. Determinare la posizione del baricentro.

3. Un corpo è formato da due sfere omogenee, della stessa sostanza, tangenti ed attaccate l'una all'altra; esse hanno il diametro rispettivamente di *cm* 10 e *cm* 25. Trovare la posizione del baricentro del sistema.

4. In un vaso cilindrico si sovrappongono tre strati di mercurio, acqua, olio d'oliva, alti rispettivamente *cm* 8, *cm* 16 e *cm* 12. Si calcoli la posizione del centro di gravità del sistema. (Si trascuri il peso del vaso; 1 cm^3 di mercurio pesa *g* 13,6 ed 1 cm^3 di olio pesa *g* 0,9).

5. Trovare la lunghezza massima dell'asse di un cilindro obliquo di raggio r (a basi parallele) appoggiato con una base su un piano orizzontale, inclinato a 45° rispetto a questo, perchè esso rimanga in equilibrio sul piano.

Le macchine in quiete.

89. Macchina. — Due forze contrarie si fanno equilibrio, senza intervento di alcuna altra cosa. Ma possiamo, ad es., sollevare un peso di 100 *kg* con lo sforzo di 20 *kg* adoperando una leva, una taglia, ecc. Questi congegni costituiscono una **macchina**, che è adunque:

Qualunque sistema che serve ad equilibrare una forza con un'altra che non sia contraria.

La forza che fa equilibrio, si chiama la **potenza**; quella a cui si fa equilibrio, si chiama la **resistenza**. Le macchine possono essere *semplici* o *composte*; le semplici sono quelle che non si possono decomporre in altre più semplici, e sono sei: **la puleggia, la leva, l'asse nella ruota, il piano inclinato, la vite, il cuneo.** Tutte le altre sono composte di due o più macchine semplici.

Noi studieremo le macchine semplici; ne daremo la descrizione e la condizione di equilibrio; cioè in che relazione sono la potenza e la resistenza per ottenere l'equilibrio. Studieremo cioè le macchine in quiete (**equilibrio statico**); così potremo supporre che non vi siano attriti.

Diremo che in una macchina vi è **vantaggio**, se la potenza è minore della resistenza. Anzi, misureremo il vantaggio con un numero, che è il rapporto tra la resistenza R e la potenza P:

1) Vantaggio: $$V = \frac{R}{P}$$

Es. Se con la potenza di 20 *kg* si fa equilibrio ad una resistenza di 100 *kg*, si avrà un vantaggio di:

$$V = \frac{100}{20} = 5.$$

90. **Puleggia o carrucola** è un disco rigido D girevole attorno al suo asse, (Fig. 130). Questo è sostenuto da una **staffa** S, solitamente munita di un gancio G; nel disco è scavata una scanalatura detta **gola**, nella quale scorre una fune F. La puleggia può adoperarsi in due modi.

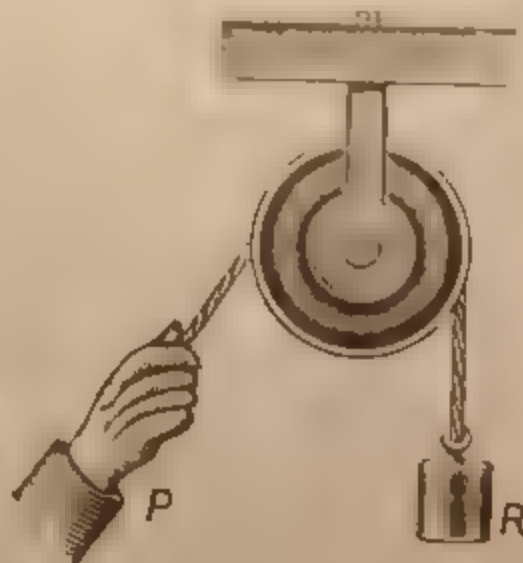
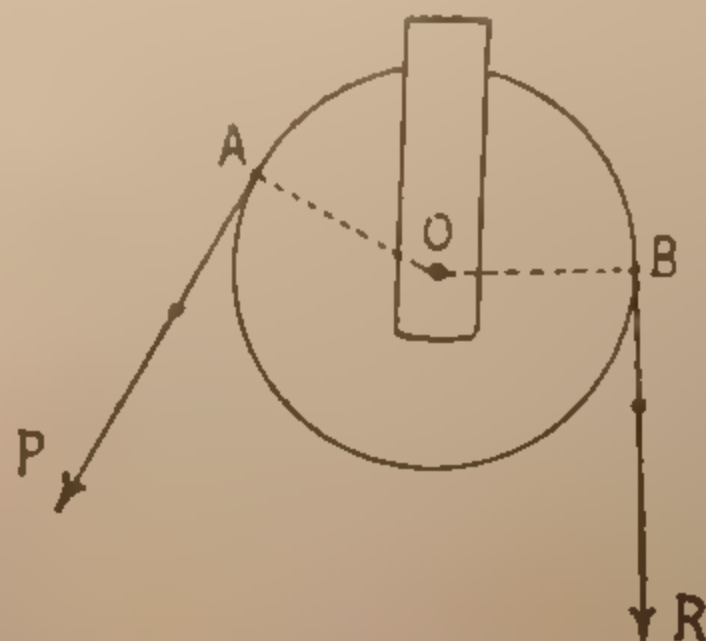



Fig. 130. Fig. 131. Fig. 132.

1. **Puleggia fissa.** La staffa è fissa ad un sostegno; ad un capo della fune è applicata la resistenza R; all'altro capo la potenza P, (Fig. 131).

Condizione di equilibrio: *La potenza è eguale alla resistenza.*

Infatti, rappresentiamo schematicamente la puleggia, come in Fig. 132; essa costituisce un corpo girevole attorno ad un punto O. La potenza P produce rotazione in un senso, attorno ad O, con braccio OA; la resistenza R produce pure rotazione attorno ad O, ma in senso contrario, con braccio OB. Per la 3) del § 78, l'equilibrio si avrà allorchè:

$$P : R = (OB) : (OA)$$

ma $OA = OB$ perchè raggi del medesimo cerchio, quindi anche $P = R$; *c. d. d.*

Fig. 133.

La verifica sperimentale si fa attaccando ai capi della fune pesi eguali; la fune da sè non scorre comunque sia la posizione dei due pesi.

La Fig. 133 mostra un'applicazione di questa puleggia.

Con questa macchina quindi non si ha nè vantaggio nè svantaggio; essa serve unicamente a cambiare la direzione della resistenza; cioè a vincere questa con una forza eguale, ma in direzione più comoda.

2. **Puleggia mobile.** — Un capo della fune è fisso in A (Fig. 134); all'altro capo è applicata la potenza P; alla staffa la resistenza R.

Fig. 134.

Condizione di equilibrio: *La potenza è metà della resistenza, se i due tratti di fune sono paralleli.*

Infatti, rappresentiamo schematicamente [illegible] tuisce un corpo girevole attorno ad un punto O; la potenza P produce rotazione attorno ad O [illegible] con braccio OA eguale al diametro del disco; la resistenza

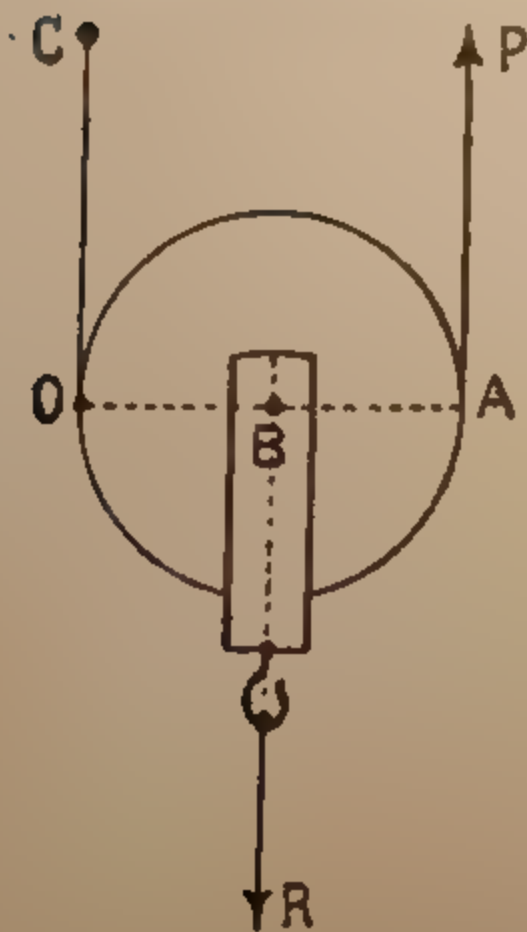



Fig. 135.

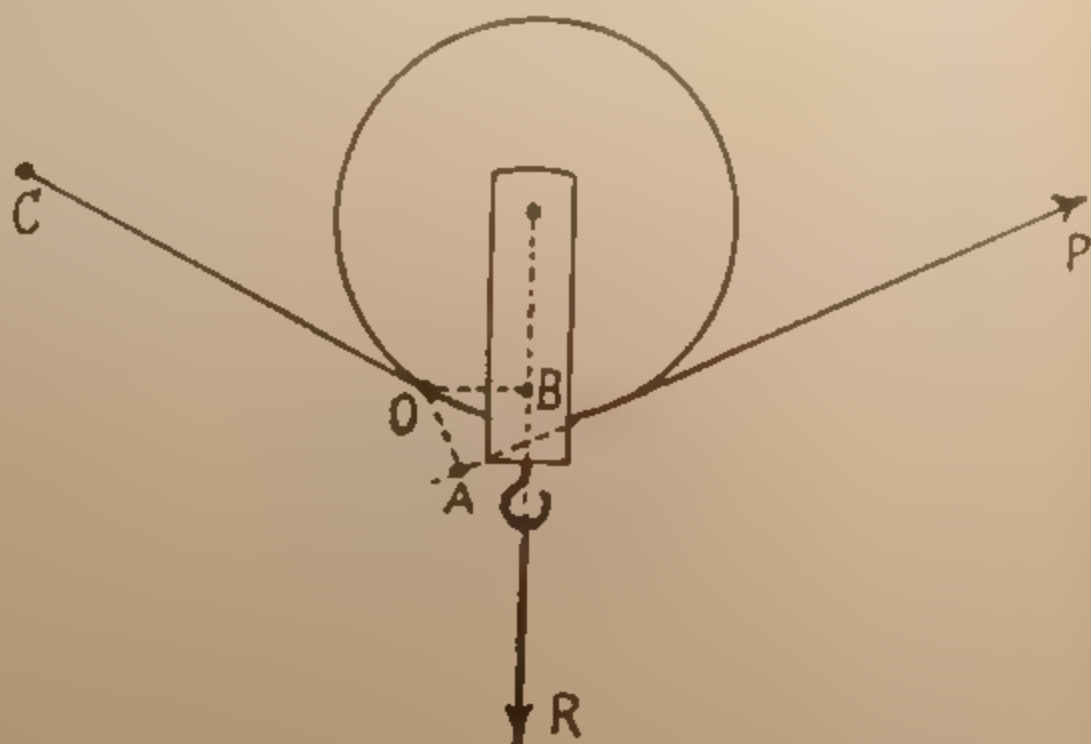



Fig. 136.

produce rotazione pure attorno a O, in senso contrario, con braccio OB eguale al raggio del disco; per la 3) del § 78. l'equilibrio si avrà allorquando:

$$P : R = (OB) : (OA)$$

$$\text{ma:} \quad OB = \frac{1}{2} OA, \quad \text{quindi anche:} \quad P = \frac{1}{2} R.$$

Ciò se CO è parallela ad AP. Se ciò non è, come in Fig. 136, i bracci della potenza e della resistenza sono rispettivamente OA ed OB e non sono più l'uno metà dell'altro. Può darsi persino che $OA < OB$, e può aversi quindi svantaggio.

91. **Leva.** — Si chiama leva qualunque corpo rigido, girevole attorno ad un punto; questo punto si chiama il **fulcro**. Non è detto che la leva debba essere rettilinea; può essere ad es. *fal-*

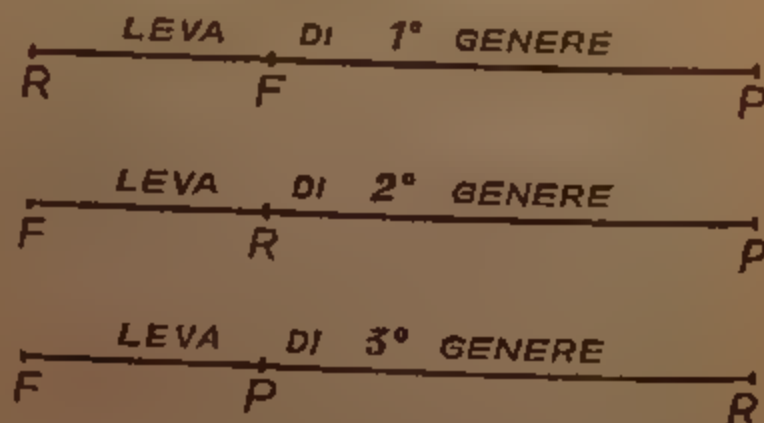



Fig. 137.

Fig. 138.

ciata, come in Fig. 137. Sia O il fulcro; in A agisce la resistenza R, in B la potenza P.

Condizione di equilibrio: *La potenza sta alla resistenza, come inversamente il braccio della resistenza sta al braccio della potenza.*

Infatti, si tratta ancora di un corpo girevole attorno ad un punto, sul quale sono applicate due forze P ed R, agenti con bracci rispettivamente OK ed OH (1). Per la solita condizione 3) di § 78, dovrà essere per l'equilibrio:

Fig. 139.

$$P : R = (OH) : (OK),$$

Vi sono tre generi di leva, (Fig. 138):

1. **Leva di 1° genere**, o *interfissa è quella in cui il fulcro è tra le direzioni della potenza e della resistenza.* Si ha vantaggio se il fulcro è più vicino alla resistenza; si ha svantaggio nel caso contrario. Sono esempi di leva di 1° genere: *il palanchino* (Fig. 139); *le forbici* (Fig. 140); *le tenaglie* (Fig. 141); ecc.

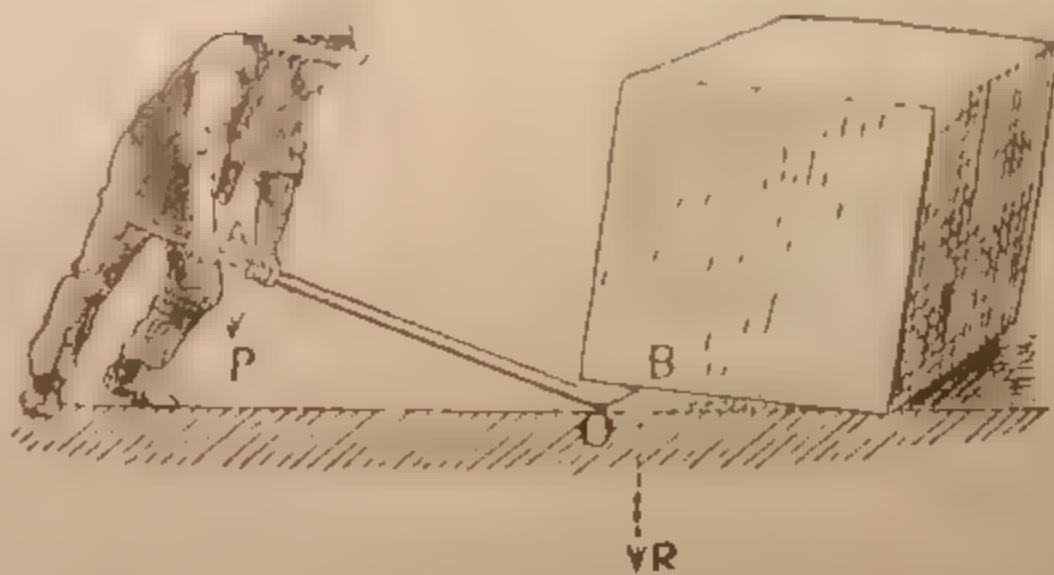
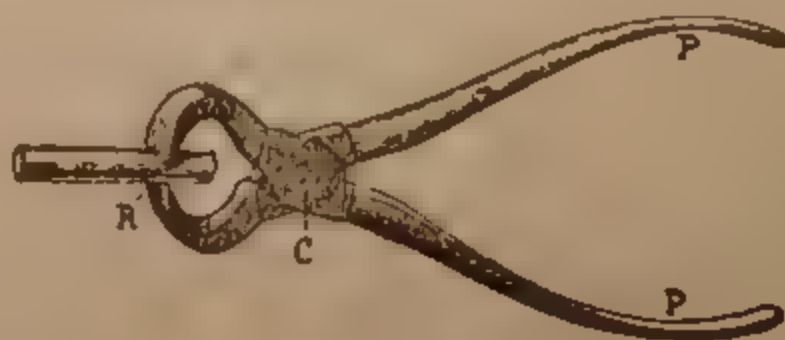



Fig. 140.

Fig. 141.

2. **Leva di 2° genere**, o *interesistente, è quella in cui la direzione della resistenza è tra quella della potenza ed il fulcro.* Essendo il braccio della resistenza *sempre minore* di quello della potenza, si ha sempre vantaggio.

Fig. 142.

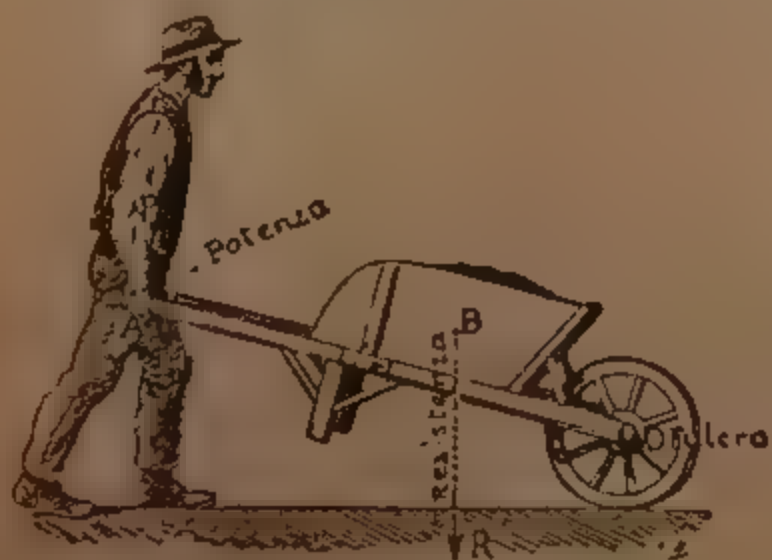



Fig. 143.

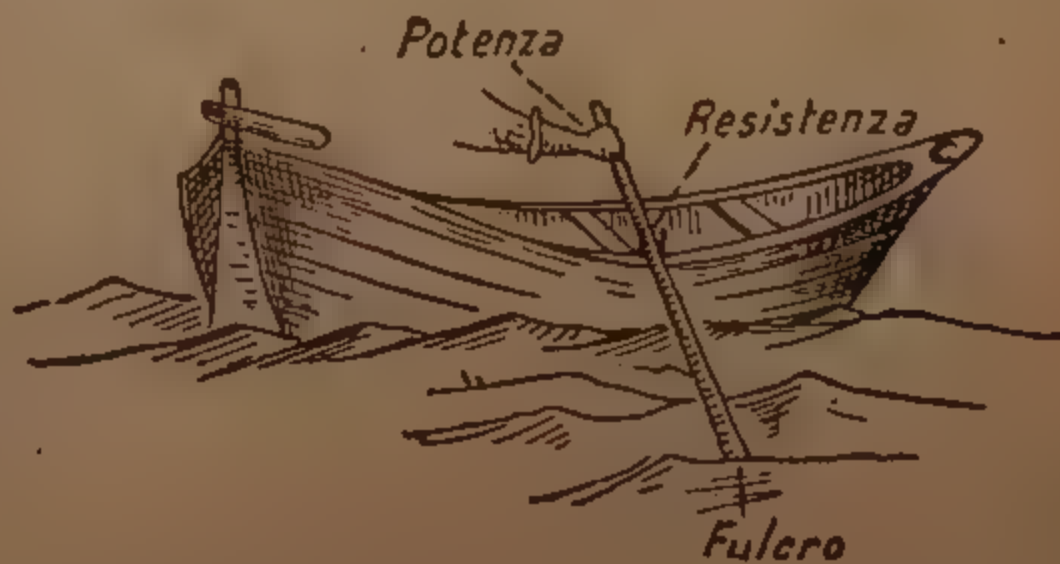



Fig. 144.

Sono esempi di leva di 2° genere: *lo schiaccianoci*, (Fig. 142); la *carriola*, (Fig. 143); *il remo* (2), (Fig. 144); ecc.

---

(1) Si noti che i bracci *non sono OB* ed *OA*; ma, per la definizione di § 78 *i segmenti perpendicolari OK* ed *OH* da *O* alle direzioni delle due forze.

(2) Si osservi che nel remo *il fulcro è nell'acqua*, e sulla barca è invece il punto d'applicazione della resistenza, che è data dalla barca medesima da muovere.

3. **Leva di 3º genere,** *o interpotente, è quella in cui la* [illegible] *della potenza è tra il fulcro e quella della resistenza.* Essendo il [illegible] resi-

Fig. 145.

stenza *sempre maggiore* di quello della potenza, **si ha sempre svantaggio.**

Sono esempi di leva di 3º genere: *le molle del fuoco* (Fig. 145); *il pedale dell'arrotino* (Fig. 146), ecc.

Fig. 146.

92. **Asse nella ruota.** — Si chiama **asse nella ruota** un sistema di due cilindri coassiali, di raggio diverso, girevoli attorno all'asse comune. La potenza P agisce su una fune avvolta sul cilindro maggiore (**la ruota**); la resistenza R su una fune avvolta, in senso contrario, sul cilindro minore (**l'asse**) (Fig. 147).

Condizione di equilibrio: *La potenza sta alla resistenza, come il raggio dell'asse sta al raggio della ruota.*

Infatti, consideriamo una sezione trasversale della macchina, con un piano perpendicolare all'asse, che tagli la ruota; il cerchio A (Figura 148) rappresenta la ruota, e il cerchio B l'asse. La potenza P e la resistenza R agiscono tangenzialmente alle circonferenze di tali cerchi.

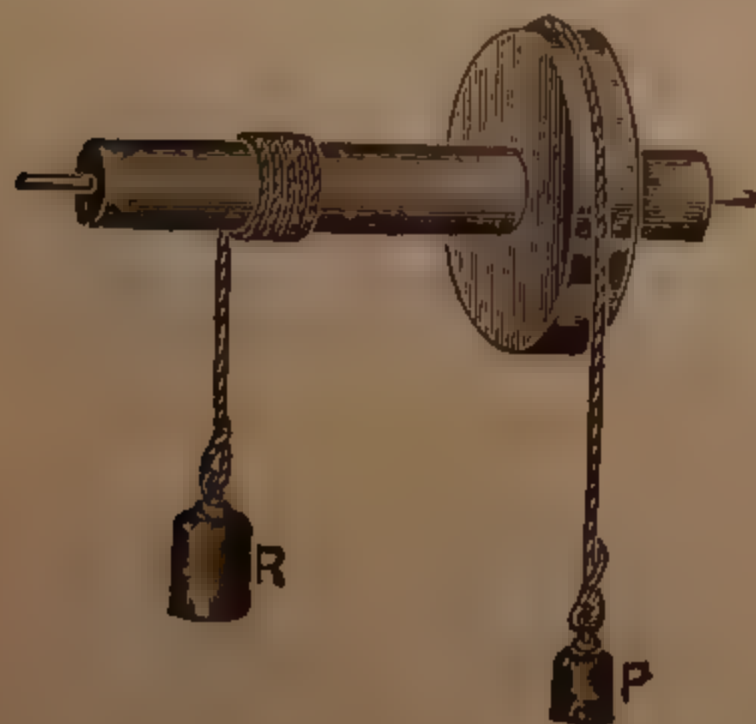
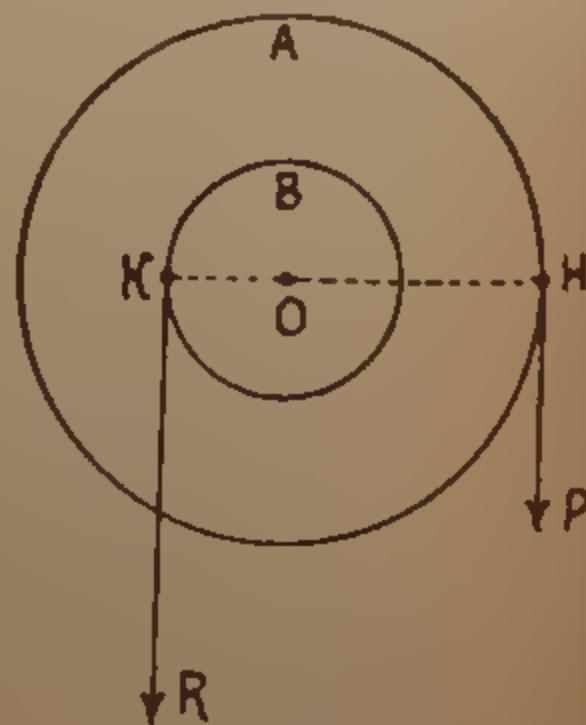



Fig. 147.

Fig. 148.

Si tratta ancora di forze che producono rotazione attorno ad un asse O, con bracci rispettivamente eguali ad OH ed OK, che sono i raggi dei due cerchi A e B. Quindi per la 3) § 78, sarà:

$$P : R = (OK) : (OH) .$$

Nella pratica la potenza si suole applicare per mezzo di piuoli infissi sull'asse, e la macchina si chiama: **verricello**, se l'asse di rotazione è orizzontale (Fig. 149) e serve a tirar su dei pesi; si usa per tirare le secchie nei pozzi, o l'adoperano i muratori per tirare su i materiali, sostituendo ai

piuoli una manovella. Si chiama argano [illegible] verticale (Fig. 150), e serve ad esercitare trazioni; p. es., per tirare le barche alla riva

Fig. 149.

93. **Piano inclinato.** — Si chiama *piano inclinato un piano (rigido), nè orizzontale nè verticale.*

Sia AB (Fig. 151) la sua sezione con un piano verticale e perpendicolare al piano inclinato; siano A e B due punti *qualsiasi* su di essa.

Da A conduciamo la verticale AC, da B la orizzontale BC; s'incontreranno (perchè tra loro perpendicolari) in un punto C. Si è costruito così un triangolo rettangolo, in cui $(AB) = l$ si chiama la lunghezza del piano inclinato; $(AC) = a$ l'altezza, e $(BC) = b$ la base. L'angolo $\widehat{ABC} = \alpha$ si chiama l'inclinazione del piano.

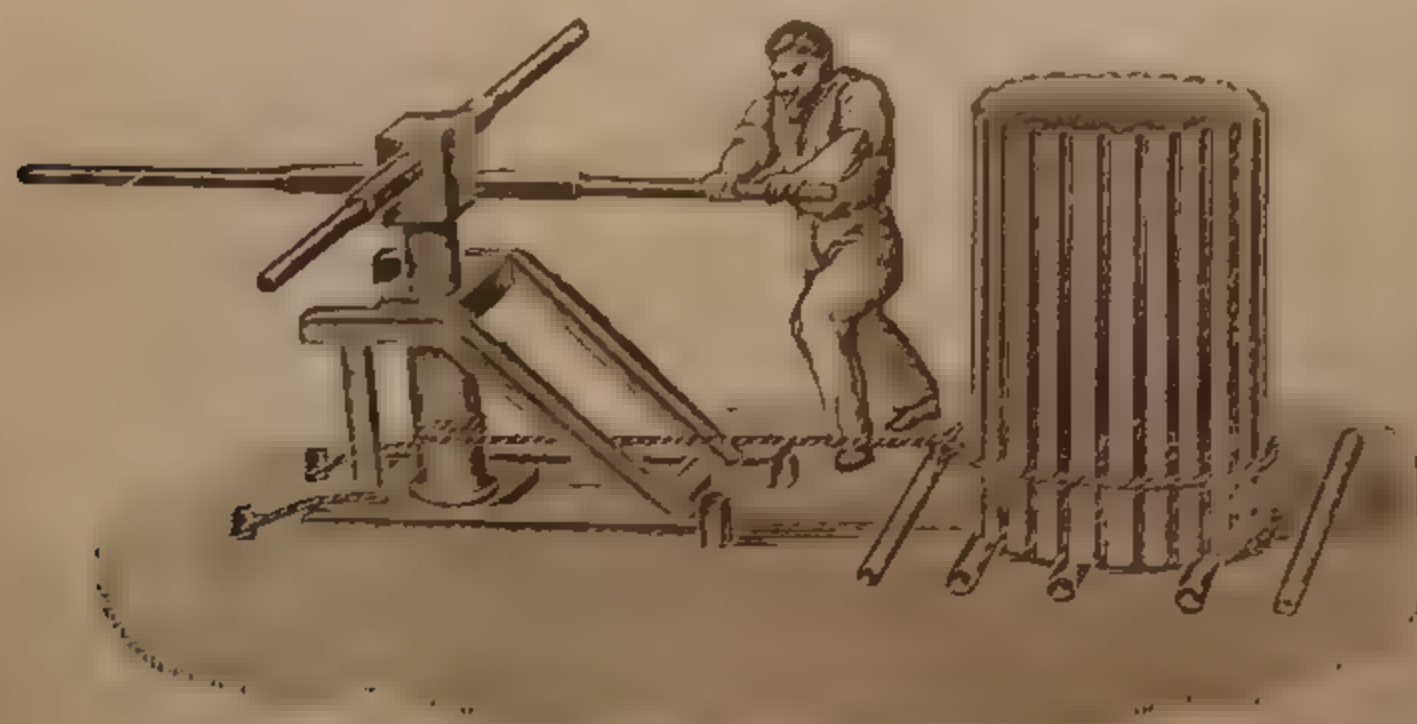



Fig. 150.

Ponendo un corpo pesante G sul piano, esso scivola in basso: *Qual forza si richiede per tenere fermo il corpo sul piano?*

Questa forza sarà la potenza, ed il peso del corpo la resistenza. Distingueremo due casi:

1° caso. *La direzione della potenza è parallela al piano.*

Rappresentiamo con GR il peso del corpo, essendo G il baricentro, (Fig. 152).

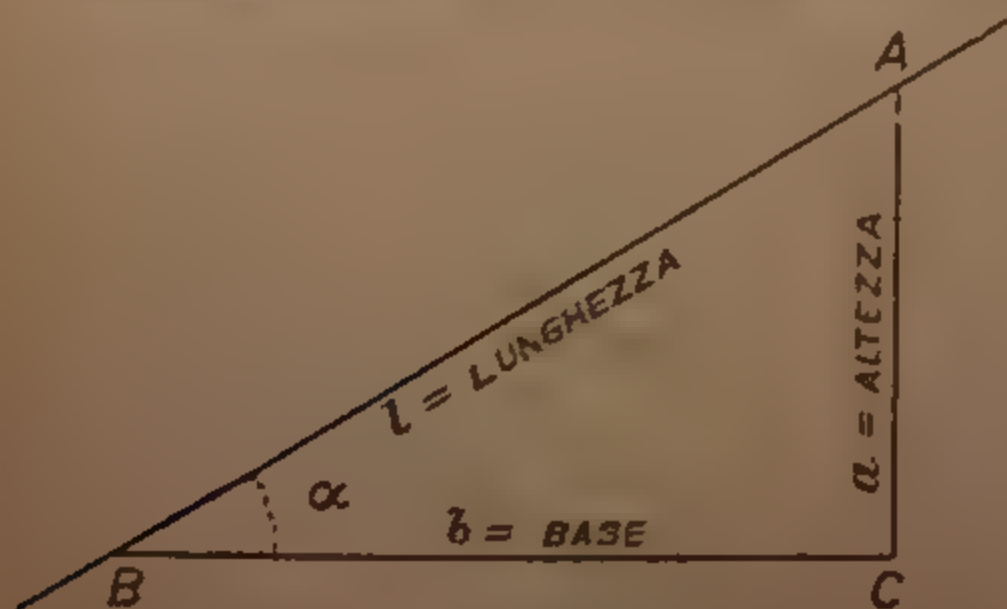
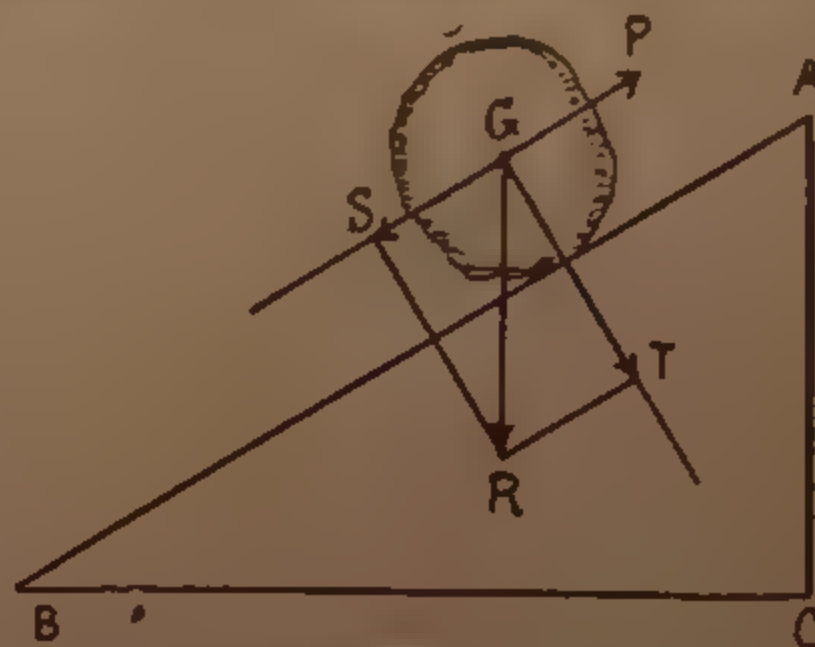



Fig. 151. Fig. 152.

Scomponiamo (§ 62) tale forza in due: l'una nella direzione del piano inclinato (cioè parallela ad AB), l'altra in direzione perpendicolare al piano. Siano GT e GS

le due componenti; la GT non ha alcun [illegible] La [illegible]

[illegible] La componente GT [illegible] se non vi fosse. Rimane l'altra componente GS, che è quella che trascina il corpo in basso. La potenza che cerchiamo è quindi la forza GP contraria a GS. Per calcolare questa forza, notiamo che i due triangoli GRS e ABC sono simili, per avere:

Fig. 153.

$\widehat{GSR} = \widehat{ACB}$ perchè retti; $\widehat{GRS} = \widehat{ABC}$ perchè hanno i lati perpendicolari e sono entrambi acuti; sarà quindi eguale anche il terzo angolo; i lati omologhi sono allora proporzionali:

$$GS : GR = AC : AB\,,$$

e sostituendo alle grandezze le loro misure:

$$2) \qquad P : R = a : l$$

Cioè:

Condizione di equilibrio: *La potenza sta alla resistenza, come l'altezza sta alla lunghezza del piano.*

Essendo a sempre minore di l, sarà anche sempre $P < R$; cioè in questo caso si ha sempre vantaggio.

Risolvendo la proporzione 2) rispetto a P si trova:

$$3) \qquad P = R\,\frac{a}{l}$$

o anche: $P = R \operatorname{sen} \alpha$.

Casi particolari: Se l'inclinazione del piano è: $\alpha = 0$, cioè il piano è orizzontale, sarà:

$a = 0$, e per la 3): $P = 0$.

Cioè: *un corpo pesante, su un piano orizzontale è in equilibrio, senza che alcuna forza lo sostenga.*

Fig. 154.

L'inclinazione del piano sia: $\alpha = 90^\circ$; cioè il piano è verticale. Con con-

sider[illegible] lo l'angolo α il punto A si allontana sempre più, i due segmenti CA e BA tendono ad assumere valore eguale, cioè il loro rapporto [illegible] tende al limite 1; quindi: per $\alpha = 90^\circ$ è: $P = R$.

[illegible]

Fig. 155.

essa verticale, occorre una forza eguale al peso del corpo; risultato evidente poichè in questo caso il piano è come se non vi fosse.

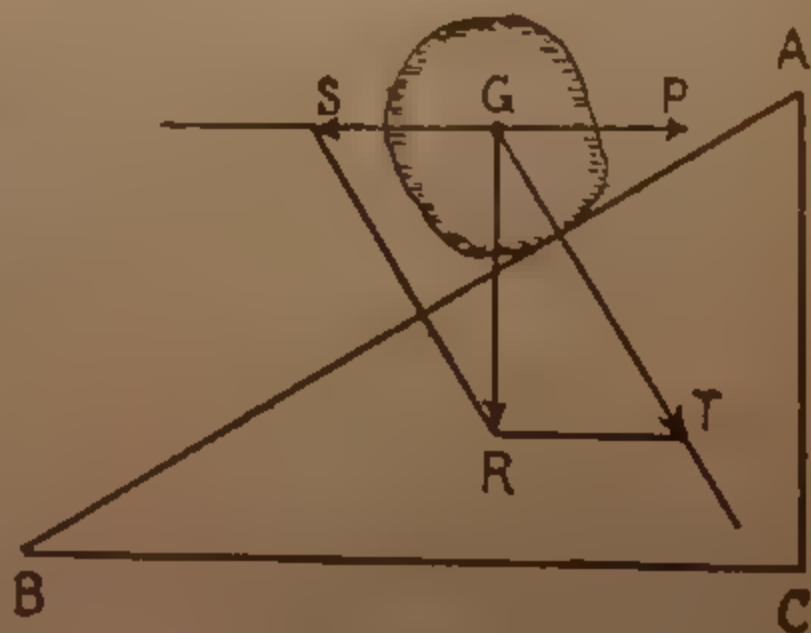
Applicazione del 1° caso del piano inclinato sono: i travetti di guida adoperati per caricare e scaricare le botti dai carri (Fig. 153), le funicolari, le strade in pendenza; le scale, ecc.

La Fig. 154 mostra un *piano inclinato* per trasporto di materiali, e la Fig. 155 la *scala mobile* della ferrovia metropolitana di Napoli.

Fig. 156.

2° caso. *La potenza è orizzontale.*

Si risolve in modo analogo al precedente; sia G il corpo e GR ne rappresenti ancora il peso, (Fig. 156). Si scomponga GR in due forze GS e GT, la prima in direzione orizzontale, cioè parallela a BC, e la seconda anche ora perpendicolare al piano. La forza GT non ha alcuna influenza sul moto del corpo, che è sollecitato solo dalla forza GS; la potenza cercata è quindi la forza GP, contraria a GS. I due trian-

goli SGE e ACB sono simili per essere rett[illegible], lati perpendicolari, ed entrambi acuti. Si avrà allora la propor[illegible]

$$GS : GR = AC : BC;$$ o anch[illegible]

4) $$P : R = a : b;$$ cio[illegible]

Condizione di equilibrio: *La potenza sta alla resistenza, come l'altezza sta alla base.*

Risolvendo la 4) rispetto a P si avrà:

5) $$P = R\frac{a}{b}, \qquad \text{o anche:} \qquad P = R \tang \alpha$$

Se l'inclinazione $\alpha = 45^\circ$, è: $a = b$, e sarà $P = R$; inversamente per $\alpha \gtrless 45^\circ$ è $P \gtrless R$. Si avrà perciò vantaggio o svantaggio, a seconda che l'inclinazione è minore o maggiore di 45°.

Casi particolari: Per $\alpha = 0$, cioè su un piano orizzontale, è $a = 0$ e quindi $P = 0$; risultato già trovato nel 1° caso. Per $\alpha = 90°$ è $a = \infty$ e quindi $P = \infty$. Cioè (teoricamente) occorrerebbe premere con una forza infinitamente grande, perpendicolarmente a un piano verticale, per trattenere su questo un corpo qualsiasi. In pratica il risultato è modificato dal fatto che la pressione del corpo sul piano genera una forza d'attrito, che si oppone alla caduta del corpo; una forza limitata può quindi tenere fermo il corpo contro il piano.

94. **Vite.** — Su un cilindro avvolgiamo il modello in carta di un triangolo rettangolo in modo che un cateto ao coincida con una generatrice (Fig. 157). L'ipotenusa descrive sul cilindro una curva, che si chiama **elica**, e che dobbiamo immaginare che prosegua per infiniti giri, sul cilindro indefinito. Questa curva ha in comune con una generatrice qualunque, infiniti punti $a\ c'c''$.... che sono *equidistanti*; la distanza ac' fra due di questi punti consecutivi, si chiama il **passo**. L'elica è pertanto definita, allorchè è dato il raggio del cilindro ed il suo passo.

Fig. 157.

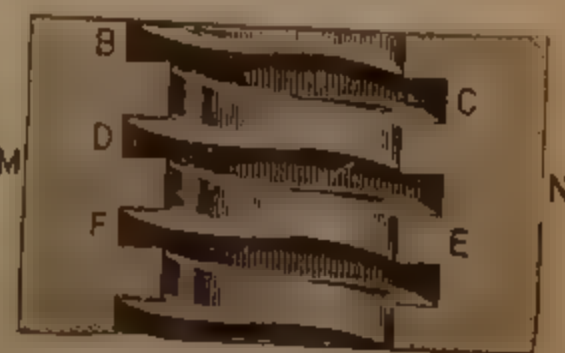



Fig. 158.

Fig. 159.

Fig. 160.

Si faccia ora scorrere sull'elica un opportuno triangolo o rettangolo; questi generano un risalto a sezione triangolare, Fig. 158, o rettangolare, Fig. 159, chiamato il **filetto** o **pane** o *verme*; il tutto forma la vite, di cui AB è il passo.

Insieme alla vite occorre considerare la **madrevite**, Fig. 160, che si può definire lo stampo o la matrice della vite.

La vite s'impegna dentro la madrevite (Fig. 161), rispetto a cui ha contemporaneamente un moto di rotazione attorno all'asse del cilindro, e di

traslazione nella direzione di quest'asse, e si *avanza* ad ogni giro di una lunghezza eguale al passo. I due movimenti può averli entrambi la vite, e

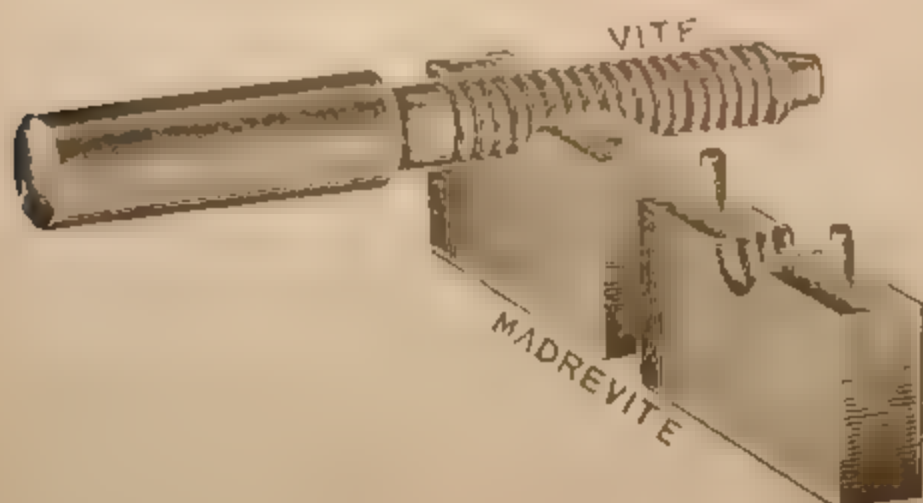



Fig. 161.

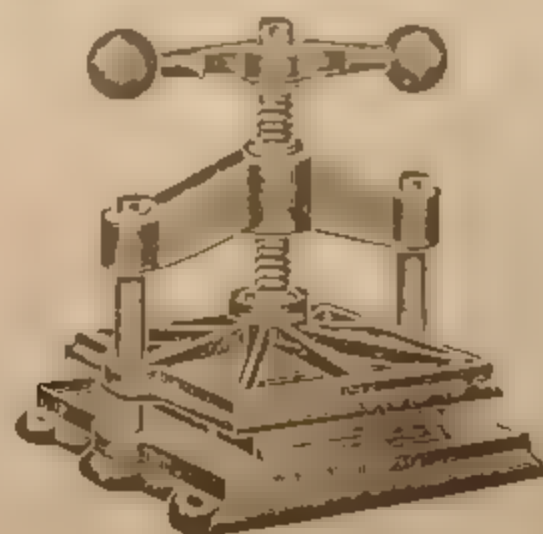



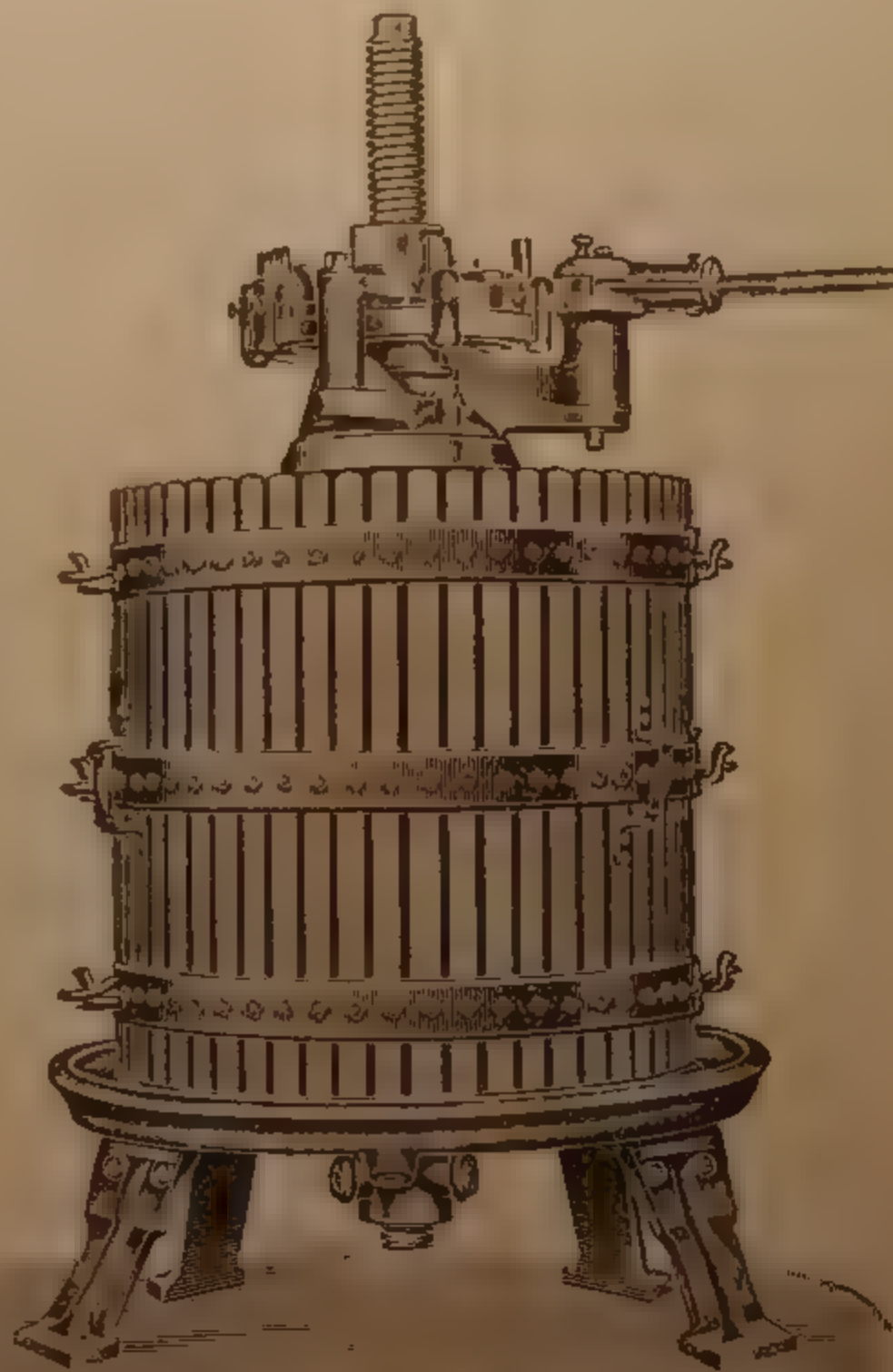
Fig. 162.

si avrà la **vite a madrevite fissa**, come nel torchio del copialettere, (Fig. 162); o può averli entrambi la madrevite, come nel torchio per l'uva, (Fig. 163); o può la vite avere il moto di rotazione e la madrevite quello di traslazione. In questo caso si ha la **vite a madrevite mobile.**

Fig. 163.

In ogni caso, la resistenza agisce nella direzione dell'asse della vite; la potenza è la forza che fa girare la vite; è applicata direttamente alla *testa* della vite o su una manovella infissa nella testa, e agisce in un piano perpendicolare all'asse della vite.

Condizione di equilibrio: *La potenza sta alla resistenza, come il passo della vite sta alla circonferenza descritta dalla potenza.*

Infatti, svolgendo su un piano una *spira* $ac'c$ (Fig. 157) dell'elica, si può assimilare questa macchina al piano inclinato, 2° caso; in cui l'altezza sia eguale al passo ac' dell'elica, e la base alla circonferenza rettificata $c'c$ del cilindro, supponendo che la potenza agisca direttamente su questo. Si deduce così la condizione di equilibrio enunciata. Per tale ragione qualcuno non considera la vite come macchina semplice, ma la fa derivare dal piano inclinato.

Con questa macchina si può ottenere un vantaggio grandissimo; ma nella pratica gli attriti assai rilevanti, modificano notevolmente la condizione di equilibrio.

95. Cuneo. — Il cuneo è un prisma rigido, la cui sezione [illegible] perpendicolare agli spigoli è un triangolo isoscele ABC (Fig. 164). In questo, la base AB si chiama testa e il lato BC fianco. La potenza è una forza perpendicolare alla testa; la resistenza invece agisce perpendicolarmente ai fianchi.

Condizione di equilibrio: *La potenza sta alla resistenza su un fianco, come la lunghezza della testa sta alla lunghezza del fianco.*

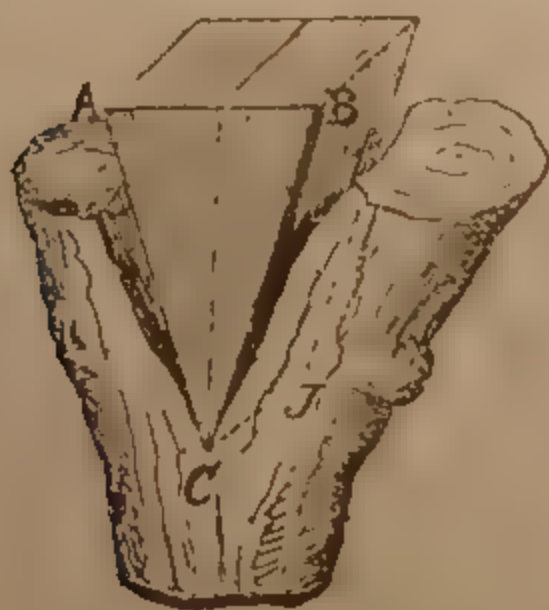
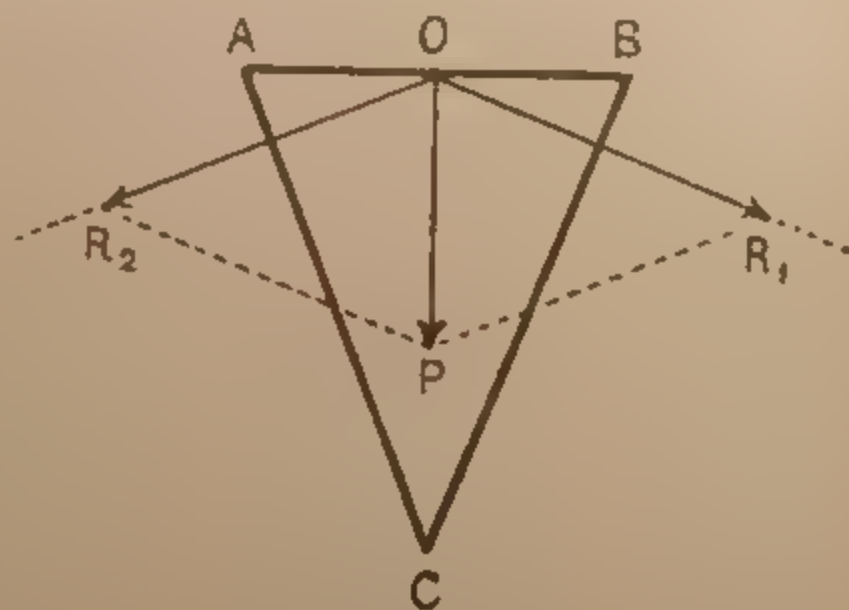



Fig. 164. Fig. 165.

Infatti rappresentiamo con OP (Fig. 165) la potenza. Essa può scomporsi nelle due forze di intensità eguale OR_1 e OR_2 nelle direzioni perpendicolari ai fianchi, di cui una, ad es. la R_1, costituisce la resistenza su un fianco. I due triangoli OPR_1 e ABC sono simili, per avere i lati rispettivamente perpendicolari; si avrà allora la proporzione tra i lati omologhi:

$$OP : OR_1 = AB : BC\,.$$

In questa macchina si avrà vantaggio tanto maggiore, quanto più piccolo è l'angolo in C.

Esempi di cuneo sono: i coltelli, la scure, gli scalpelli, il cuneo dello spaccalegna, ecc. Ricordiamo però che la condizione di equilibrio avanti enunciata è solo teorica; nella pratica, per gli attriti, la potenza deve essere almeno il triplo di quella teorica.

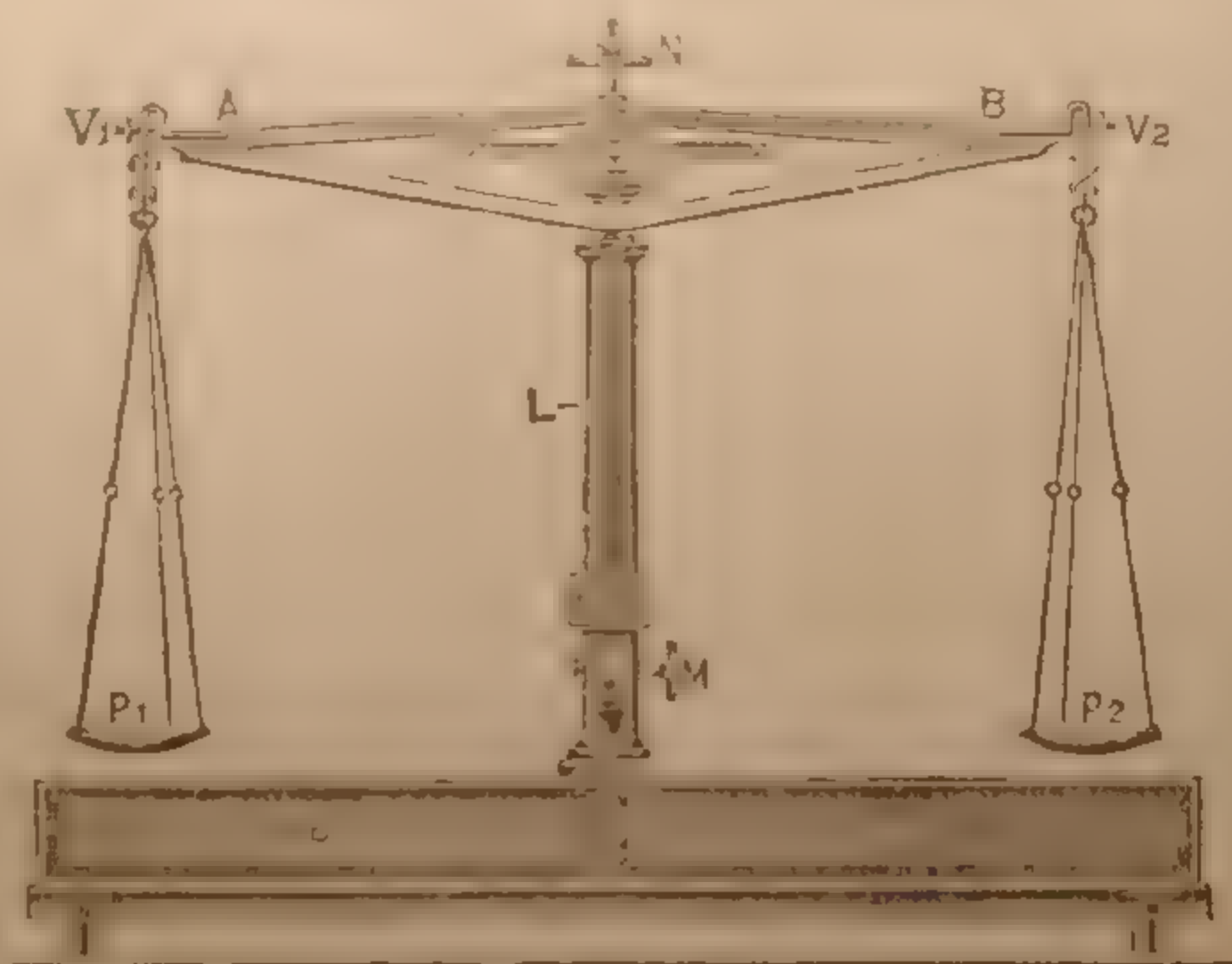
96. Macchine composte. — Non possiamo ingolfarci nello studio delle innumerevoli macchine composte impiegate nella pratica, che è compito della meccanica applicata. Fra esse le più note sono: il *paranco*, le *trasmissioni*, i *rotismi*, la *cremagliera*, ecc.

97. La bilancia. — La bilancia serve per determinare il peso dei corpi, per confronto con pesi noti; essa è un'applicazione della leva di 1° genere.

È formata da un'asta o da una losanga traforata AB (Fig. 166) detta giogo, che può oscillare attorno ad un fulcro o, formato dallo spigolo di un prisma di acciaio, detto il coltello, rappresentato separatamente in

Fig. 167. Il [illegible] agata, sostenuto [illegible] etta: il suo spigolo divide il giogo (schem[illegible]) [illegible] parti eguali, chiamati i bracci: alle estremità [illegible] sono sospesi i piatti P_1 e P_2. Il giogo forma una leva di 1° genere a bracci eguali; si avrà perciò l'equilibrio allorchè sui piatti si pongono pesi eguali. In tali condizioni il giogo è orizzontale e si dice che la *bilancia è in equilibrio.*

Fig. 166

Per osservare meglio questa condizione, nel centro del giogo è infisso perpendicolarmente ad esso, un lungo indice L, la cui estremità è avanti allo zero di una lastrina graduata, allorchè la bilancia è in equilibrio.

Per determinare il peso di un corpo, si colloca questo su uno dei piatti, e poi sull'altro si pongono per tentativi tanti pesi noti e graduati, presi da una *pesiera* (Fig. 168), finchè la bilancia è in equilibrio: questi pesi misurano il peso del corpo.

Ciò però richiede che la bilancia sia **giusta.** Una bilancia è giusta se i bracci hanno esattamente la stessa lunghezza e peso, e se anche i piatti sono dello stesso peso. Ciò non essendo possibile in modo rigoroso, nel fare una pesata si commette sempre un certo errore; che però, nelle bilance di precisione oggi costruite, può essere così piccolo da potersi trascurare. Ad ogni modo si può evitare, ricorrendo al **metodo della tara.**

F ig. 67.

Fig. 168.

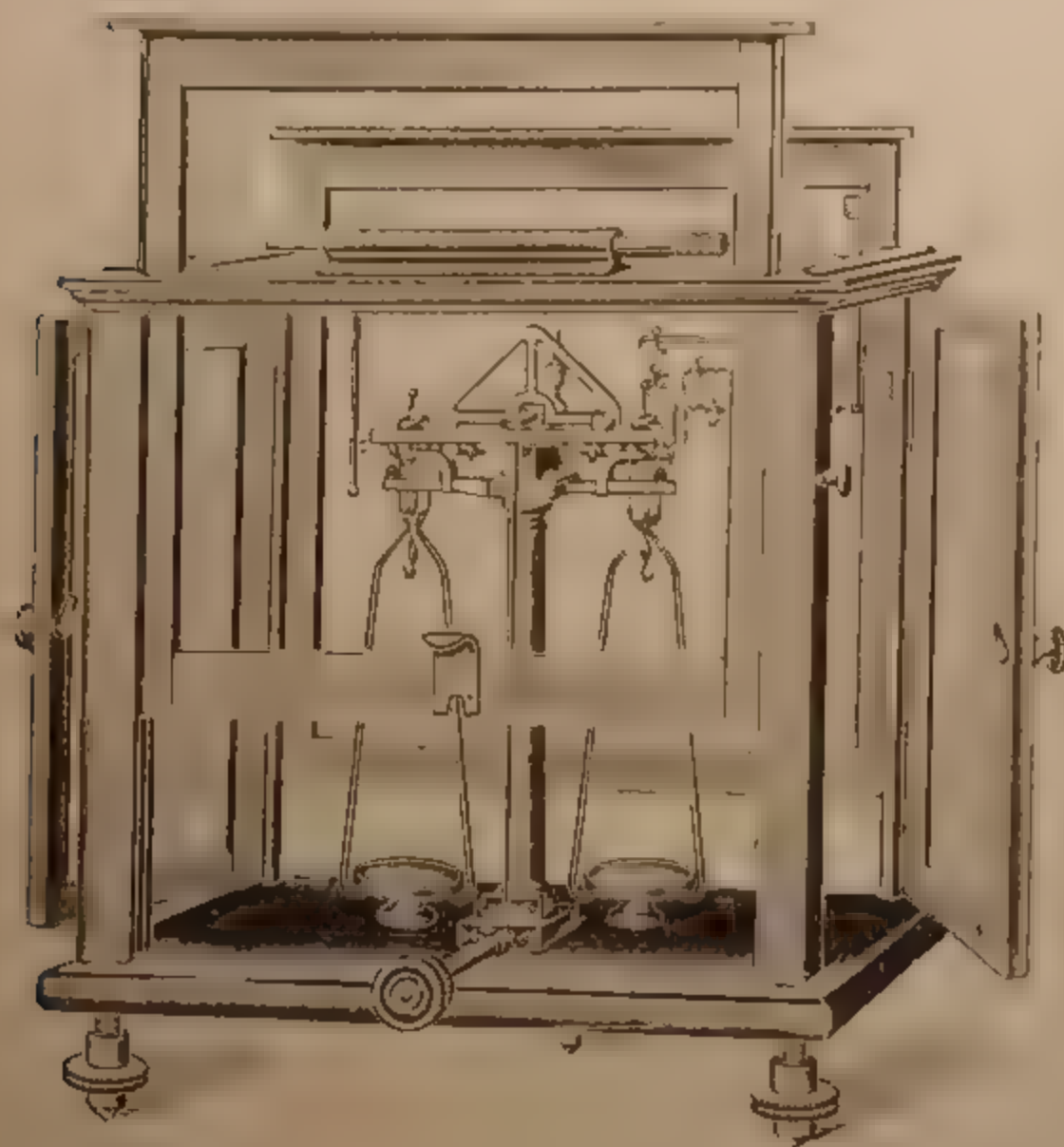
Per ciò si mette su un piattello il corpo da pesare, e sull'altro una *tara* (pallini di piombo, o altro), finchè si ottiene l'equilibrio; indi si toglie il

corpo dal piattello e al suo posto si pongono tanti pesi gr[illegible]
ottenere nuovamente l'equilibrio. Questi pesi graduati, dànno [illegible]
del corpo; perchè tali pesi e il corpo sono confrontati [illegible]
e se vi è errore si compensa.

Se la bilancia è giusta, allorchè non vi sono pesi sui piattelli l'indice deve essere esattamente a zero; se non lo è, si corregge per mezzo delle viti V_1 e V_2 che modificano l[illegible]mente la lunghezza dei bracci.

Fig. 169.

Le doti di una bilancia sono *sensibilità* e *prontezza.*

La sensibilità è il peso minimo che occorre mettere su uno dei piatti della bilancia in equilibrio, perchè essa si sposti visibilmente dall'equilibrio. La bilancia è tanto più sensibile quanto più lunghi sono i bracci, quanto più vicino al fulcro è il centro di gravità [1] e quanto minori sono gli attriti. Per diminuire questi occorre che il giogo sia leggero, pur non essendo deformabile; per ciò talvolta lo si costruisce di alluminio. Nelle migliori bilance di precisione la sensibilità arriva al *ventesimo di milligrammo*; cioè esse *sentono* il peso di un capello [2].

Perchè il taglio del coltello non si smussi con l'uso, il che nuocerebbe alla sensibilità e all'esattezza, quando la bilancia non si adopera, con un congegno messo in azione col girare un bottone M, si solleva tutto il giogo; in modo che il coltello non poggia più sul suo sostegno.

La prontezza è la proprietà per cui la bilancia in oscillazione si ferma in equilibrio al più presto. La prontezza è tanto maggiore quanto più i bracci sono corti, quanto più basso è il centro di gravità e quanto più grandi sono gli attriti. Prontezza e sensibilità dipendono cioè da condizioni opposte; ed una bilancia di precisione non sarà mai pronta.

Le bilance di precisione si racchiudono in custodie a vetri per ripararle dai movimenti anche impercettibili dell'aria (Fig. 169), senza di che anche il fiato di una persona vicina, avrebbe influenza sui piattelli. Vi sono oggi anche bilance in cui il cambio dei pesi si fa automaticamente dall'esterno della custodia, girando appositi bottoni.

---

(1) Il centro di gravità deve però sempre essere *sotto* al fulcro; altrimenti l'equilibrio sarebbe istabile (§ 86) e la bilancia si rovescerebbe; una tal bilancia si chiama *folle*. Nelle bilance di precisione si aggiunge al centro del giogo un pesetto N che avvitandosi più o meno si alza e si abbassa spostando così la posizione del centro di gravità, per regolare la sensibilità.

(2) La *microbilancia* di Steele-Grant è sensibile al milionesimo di milligrammo!

98. Problemi sulle macchine.

a) Problemi risoluti.

1. *Con un'asta di ferro lunga m 1,50, si vuol sollevare un peso di 3 quintali, agente su un estremo dell'asta, appoggiata ad un sostegno a cm 20 da tale estremo. Quale forza dobbiamo applicare all'altro estremo dell'asta?*

Risoluzione. — Si tratta di una leva di 1° genere in cui:
braccio della resistenza = *cm* 20;
braccio della potenza = *cm* (150 — 20) = *cm* 130;
la resistenza = *kg* 300.

Quindi: $x : 300 = 20 : 130$

risolvendo: $$x = \text{kg}\ \frac{300 \times 20}{130} = \textbf{kg 46,1}.$$

2. *Un verricello con due manovelle, lunghe ciascuna* cm *40, è manovrato da due persone, che applicano ciascuno la forza di* kg *15. Il tamburo del verricello ha il diametro di* cm *20 e su di esso si avvolge una corda di canape. Calcolare il carico* R *che si può sollevare, se per gli attriti e resistenze della fune si perde in tutto il 10 % della potenza impiegata.*

Risoluzione. — Il tamburo costituisce il cilindro minore, di raggio: r_1 = *cm* 10; il cilindro maggiore ha raggio di lunghezza eguale a quella della manovella: r_2 = *cm* 40; la potenza impiegata è la forza delle due persone, cioè: P = *kg* (15 × 2) = *kg* 30.
Quindi per la condizione di equilibrio sarà, (§ 92):

$$30 : R' = 10 : 40; \qquad \text{da cui si ricava:} \qquad R' = \text{kg}\ \frac{30 \times 40}{10} = \text{kg } 120.$$

In pratica, se per gli attriti dei perni e per l'avvolgimento della fune si perde il 10 %, cioè si utilizza solo il 90 % della potenza, il carico effettivamente sollevato è:

$$R = 0{,}90 \times R' = \text{kg } (120 \times 0{,}90) = \textbf{kg 108}.$$

3. *Con quale forza si deve spingere una botte del peso di 4 quintali, per caricarla su di un carro alto* m *0,90, servendosi di guide di legno lunghe* m *4,50, di cui un estremo è a terra e l'altro sul carro?*
Per la 1) del § 93, sarà:

$$x : 400 = 90 : 450\,; \qquad \text{da cui:} \qquad x = \frac{400}{450} \times 90 = \textbf{kg 80} \text{ (teorici)}.$$

4. *In un torchio da uva, la potenza è fornita dallo sforzo muscolare di una persona, pari a* kg *50 ed agisce su una manovella lunga* m *2,50; la vite del torchio ha il passo di* mm *20. Calcolare la pressione prodotta dalla madrevite.*

Risoluzione. — Chiamando h la lunghezza del passo, P la potenza, x la resistenza cercata, e l la lunghezza della manovella, sarà, (§ 94):

$$P : x = h : 2\pi l, \quad \text{cioè sostituendo i valori dati:}$$

$$50 : x = 20 : (2\pi \times 2500); \qquad \text{da cui:} \qquad x = \text{kg}\ \frac{2\pi \times 2500 \times 50}{20} = \textbf{kg 39 250}.$$

b) Problemi da risolvere.

Ove non è detto altrimenti, si considerino le macchine senza attriti.

1. La lunghezza dell'avambraccio è di *cm* 35; la distanza dal gomito al punto ove si attacca il muscolo che muove l'avambraccio è *cm* 5; la forza di contrazione di questo (in direzione verticale) è di *kg* 80. Calcolare che peso si può reggere sulla

mano, se l'avambraccio è orizzontale. (Si [illegible]
di queste distanze, che geometricamente non avrel[illegible]

2. Con un verricello si può sostenere un [illegible],
il diametro dell'asse è *cm* 14. Quanto dev'essere il [illegible]

3. Un cavallo tira un carro su una strada in [illegible]
(cioè s'innalza di *m* 12 su 100 *m* di percorso). Qual'è la [illegible], se
il carro pesa in tutto 10 quintali, e se occorre la trazione di [illegible] gli
attriti; quant'è il vantaggio ottenuto?

4. Qual'è la potenza, parallela alla base, necessaria per equilibrare una resistenza
di *kg* 150, su un piano inclinato, la cui inclinazione è di 3[illegible]?

5. Risolvere lo stesso problema del N. 4, supponendo l'inclinazione del piano di 4[illegible]°,
o di 60°, o di 35° 25′.

6. In un torchio da copialettere la manovella è lunga *cm* 40 (da un estremo al-
l'altro) e la si spinge con la forza di *kg* 15 per ciascun estremo. Calcolare il passo che
deve avere la vite, per ottenere sul copialettere la forza premente di *kg* 5000.

7. Con riferimento alla Fig. 146, la lunghezza dell'assicella su cui poggia il piede
sia di *cm* 50, il piede prema a *cm* 20 dal fulcro, la manovella della ruota centrale sia
lunga *cm* 15 ed il diametro di questa *cm* 60; il diametro della puleggia della mola sia
di *cm* 10 e il diametro della mola di *cm* 40. Calcolare la forza con cui deve premere
il piede, per vincere sulla mola una resistenza di *g* 500.

DINAMICA

I tre principî.

99. **La dinamica** *studia il moto dei corpi, in relazione con le cause* (forze) *che lo producono.*

Questo studio è basato sui seguenti tre postulati o principî:

1° **Principio d'inerzia**, *o di Leonardo da Vinci* [1]. *Un corpo* (inanimato) *persevera nel suo stato di quiete o di moto rettilineo ed uniforme, finchè non agisce su di esso una causa esterna che modifica tale stato.*

Essendo un postulato, dobbiamo ritenerlo dimostrato dall'osservazione.

Ora la prima parte (**inerzia di quiete**) è evidente. La seconda parte (**inerzia di moto**) non sembra evidente, perchè ordinariamente vediamo i corpi in moto fermarsi più o meno presto, se non vi si applica una forza che ne mantiene il movimento. Ma ciò avviene perchè su un corpo che si muove sulla terra, agisce sempre una causa esterna (l'attrito, o la resistenza del mezzo in cui si muove), che lo ferma.

Difatti, lanciando con una certa spinta una palla su un selciato, essa percorrerà, ad es., *m* 20 prima di fermarsi; lanciando la stessa palla con la stessa spinta, su una pista di cemento, andrà avanti anche *m* 50; lanciandola su un campo di ghiaccio, procederà anche per più di *m* 100.... Dunque, quanto minore è la difficoltà (l'attrito) opposta al moto della palla, tanto più lontano essa si spinge; onde è lecito pensare che se non vi fosse alcun attrito, la palla, una volta avuta la spinta, andrebbe così lontano da non fermarsi più. Questo è appunto il principio d'inerzia.

Esempi di moto che avviene per inerzia sono quelli dei corpi celesti; per i quali il moto, una volta iniziato per cause a noi non note, proseguirà da sè indefinitamente, senza che occorra più alcuna forza per mantenerlo.

Osserviamo però, che per tali corpi non sempre il moto è rettilineo; per intervento di alcune cause, che meglio esamineremo in seguito.

Da questo principio segue che:

Il moto rettilineo ed uniforme avviene solo per legge d'inerzia, cioè senza l'intervento di alcuna forza.

Perchè però il corpo dalla quiete passi al moto uniforme, occorre inizialmente una forza, che agisca per breve tempo; durante questo tempo la velocità del corpo aumenta. Quando poi la forza cessa, il corpo prosegue per inerzia con moto uniforme, e con la velocità che aveva raggiunto nell'ultimo istante in cui la forza è cessata. Perciò si suol dire, impropriamente, che il moto uniforme è prodotto da una *forza istantanea.*

---

(1) Leonardo da Vinci, esercitò il suo potentissimo ingegno in tutti i campi dell'attività umana; n. a Vinci presso Firenze nel 1452, m. a Cloux presso Amboise il 2 maggio 1519.

100. 2° Principio, o *di Galileo.* Oggi si suole [illegible] lo l'enunciato di Newton[1]. *Ogni variazione di moto è proporzionale all'intensità della forza agente, ed avviene nella direzione di questa.*

Il principio risulta chiaro ricordando (§ 52), che le forze sono le cause delle variazioni di moto, e perciò l'effetto dev'essere proporzionale alla causa. Le variazioni di moto possono essere: la variazione di direzione (moto curvilineo) e la variazione della velocità. Se il moto è rettilineo, la variazione di moto si riduce solo alla variazione di velocità, cioè all'accelerazione; quindi in conclusione il 2° principio dice che:

Principio fondamentale della Dinamica: *L'accelerazione è proporzionale all'intensità della forza.*

Indichiamo con F la forza, a l'accelerazione; sappiamo che tale proporzionalità si esprime, (§ 3):

$$1) \qquad \frac{F}{a} = m\,;$$

dove m è una costante, per lo stesso corpo, ma variabile da corpo a corpo, che si chiama la massa del corpo considerato. La definizione di massa è adunque puramente algebrica[2]:

Massa è il rapporto costante tra la forza e l'accelerazione.

101. Massa. — Se una forza la cui intensità è 100, agisce su un corpo che abbia ad es. il volume di 15 cm^3, gli imprimerà ad es. l'accelerazione di *cm* 50 al secondo. La massa del corpo allora per la 1) è:

$$m = \frac{100}{50} = 2$$

La stessa forza agisca ora su un corpo della stessa sostanza, ma del volume di 30 cm^3, cioè doppio; l'esperienza mostra che l'accelerazione acquistata da questo corpo sarà solo la metà di prima, cioè *cm* 25 al secondo; la sua massa sarà allora:

$$m' = \frac{100}{25} = 4\,;$$

cioè m' è il doppio di m. Dunque: *raddoppiando il volume di un corpo, ne raddoppia la massa.* Per questo si suole dire comunemente, ma impropriamente, che *la massa esprime la* **quantità di materia** *di cui è formato il corpo.* (definizione secondo Newton).

Appendiamo ad un filo un pezzo di sughero, e supponiamo il filo tanto lungo, che spostando il sughero lateralmente, esso si muova sensibilmente su un piano orizzontale. Il sughero è fermo allorchè il filo è verticale; vediamo che basta una forza minima, perfino un soffio, perchè il sughero si sposti dalla posizione di equilibrio. Se al sughero sostituiamo una grossa

---

(1) Newton Isacco, tra i più grandi scienziati dell'umanità; n. a Whoolsthorpe il 5 gennaio 1642, m. a Kensington il 31 marzo 1727.

(2) Le considerazioni fatte per la massa in questa parte della meccanica, si riferiscono ad un corpo in quiete, o tutto al più animato dalle velocità usuali. Vedremo in seguito (Vol 3° - § 75), che per le velocità grandissime (centinaia di *km* al *s*) la massa aumenta con la velocità.

[illegible] anche la palla, [illegible]. Ciò perchè il piombo oppone [illegible] al movimento ed [illegible] una forza più grande per [illegible] velocemente, come prima faceva il sughero. Questa differenza di comportamento fra i due corpi, questa diversa **quantità di inerzia** ch'essi oppongono al movimento, la esprimiamo dicendo che il sughero e il piombo hanno *massa* diversa. *La massa esprime perciò la quantità d'inerzia che il corpo oppone al moto.* (definizione secondo Eulero [1]). Abbiamo cercato con queste definizioni di Newton e di Eulero, di dare un significato fisico al concetto di massa. Ma ricordiamoci che la definizione di massa è quella data con la 1).

Fig. 170.

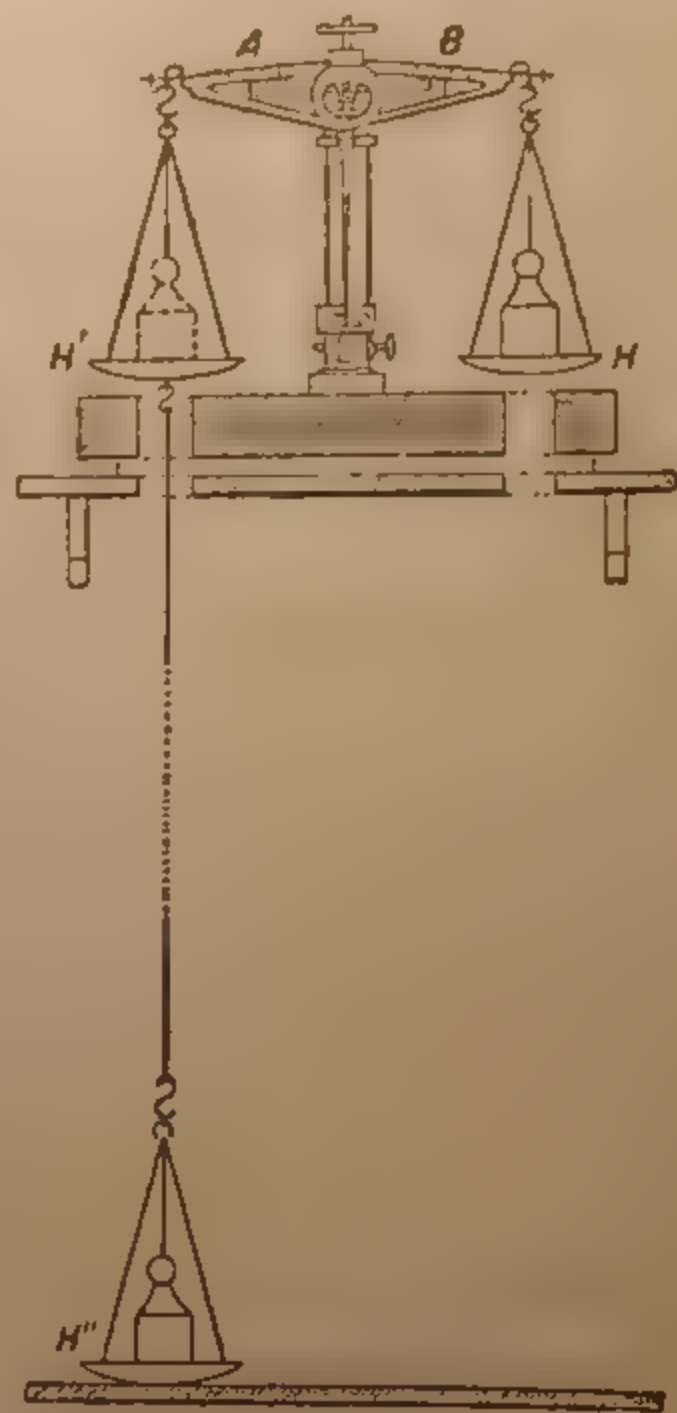
102. **Massa e peso.** — Non si confonda la *massa* col *peso*, che sono concetti affatto diversi. Vi è però tra essi una relazione. Infatti, la 1) vale qualunque sia la forza agente sul corpo; se questa è la forza di gravità, misurata dal peso P del corpo, l'accelerazione a assume un valore particolare, eguale per tutti i corpi, che si suole indicare con g (§ 108); la 1) diventa:

$$2) \qquad \frac{P}{g} = m \qquad \text{o:} \qquad P = mg$$

Questa formula dà la relazione cercata tra peso e massa, e conferma che essi non sono eguali, sebbene siano proporzionali.

Per questa proporzionalità, la bilancia che serve a misurare il peso di un corpo, serve a misurare anche la massa.

Inoltre: il peso di un corpo varia con la distanza dal centro della Terra (§ 182). Il peso di 1 *kg* portato dall'equatore al polo [2] aumenta di circa 5 grammi; e sollevandosi di *m* 25 dal suolo, diminuisce di *mg* 7,4. Quest'ultimo fatto è stato verificato da Jolly, con una bilancia posta su una torre a 25 *m* da terra, e portante ad un'estremità del giogo sospesi due piattelli H' ed H'' (Fig. 170) distanti fra loro *m* 25. Egli equilibrò dapprima la bilancia coi piattelli vuoti; indi pose un corpo di 5 *kg* su H' e lo equilibrò con pari peso in H; dopo trasportò lo stesso corpo da H' in H'' e trovò che la bilancia non era più in equilibrio; ma occorreva aggiungere in H ancora 37 *mg*. Dunque 5 *kg*, abbassandosi di *m* 25, aumentano il peso di 37 *mg*, e 1 *kg* di *mg* (37 : 5) = *mg* 7,4; come si era detto.

---

(1) Eulero Leonardo, il più grande matematico del '700; n. a Basilea nel 1700, m. a Pietroburgo nel 1783.

(2) Per lo schiacciamento della Terra ai poli, un corpo al polo è più vicino di circa *km* 21 al centro della Terra.

Ma se varia il peso di un corpo, varia [illegible] ed il rapporto $\frac{P}{g}$, cioè la massa, rimane costante. Il peso [illegible] corpo è variabile da luogo a luogo; la massa è invece costante.

Per tale ragione per unità fondamentale [illegible] massa (§ 21), anzichè quella di peso.

L'unità di massa è il grammo massa [illegible] anche l'unità di peso, ne deriva che in pratica peso e massa [illegible] stesso corpo sono misurati dallo stesso numero; così un corpo che pesa 5 g ha anche la massa di 5 g. È per questo che volgarmente si confonde il peso con la massa, che pure sono cose essenzialmente diverse. Anche, ad es., per l'acqua il peso e il volume sono espressi dallo stesso numero; ma ciò deriva dal fatto che si è preso come chilogrammo il peso di un litro d'acqua, e non vuole affatto significare che peso e volume siano la stessa cosa.

103. Misura dinamica delle forze - Dine. — Praticamente prendemmo (§ 53) come unità di forza il chilogrammo, esso misura la forza in equilibrio cioè agente su un corpo in quiete; e quindi una unità statica. Ma avendo definito le forze come causa del movimento, è logico dedurne la misura dal moto prodotto e non dall'equilibrio. Ora la 1) del § 101 si può scrivere:

$$F = m a \qquad (3)$$

e in essa sarà $F = 1$ allorchè $m = 1$ ed $a = 1$. Cioè:

L'unità assoluta di forza *è quella che alla massa di 1 grammo, imprime l'accelerazione di 1 centimetro al secondo.*

Questa unità si chiama **dine**.

Per la 2) in un luogo in cui: $g = 980\ {}^{cm}/_{s}$, sarà:

$$P\ (grammi\text{-}forza) = m\ (grammi\text{-}massa) \times 980; \quad \text{e per } m = 1:$$

$$1\ (grammo\text{-}forza) = 980\ dine; \quad \text{o anche:}$$

$$1\ dine = \frac{1}{980}\ grammi = \text{circa } 1\ mg.$$

104. Relazione tra la forza ed il moto. — Dalla 3) si ricava che se F è costante, anche a è costante, e il moto è uniformemente vario. Quindi:

Una forza costante, applicata ad un corpo, lo muove con moto uniformemente vario: uniformemente accelerato, se la forza agisce nello stesso verso del moto; uniformemente ritardato, se agisce in verso contrario.

Se la forza è variabile, anche l'accelerazione è variabile; cioè il moto è vario ma non uniformemente.

Se la forza è zero, anche l'accelerazione è zero, cioè il moto è uniforme; rimane così confermato che il moto uniforme avviene senza alcuna forza, solo per inerzia, § 99. Riepilogando:

Il moto uniforme avviene senza intervento di alcuna forza.
Il moto uniformemente vario è prodotto dalle forze costanti.
Il moto vario comunque, è prodotto dalle forze variabili.

105. Impulso - Quantità di moto. — Chiamasi impulso di una forza F, che agisce per [illegible] t, il prodotto Ft della intensità della forza, per il tempo per cui essa [illegible]

$$Impulso = F t.$$

Chiamasi quantità di moto il prodotto mv della massa di un corpo per la sua velocità [1]:

$$Quantità \ di \ moto = m v.$$

Sostituendo in Ft ad F il suo valore ma della 3), si ha:

$$F t = m a t.$$

Ora, se F è costante, il moto prodotto è (§ 104) uniformemente vario; cioè si può applicare la 4) del § 29 : $v = at$; quindi, sostituendo nella precedente eguaglianza, si ottiene:

4) $$F t = m v;$$ cioè:

L'impulso di una forza è eguale alla quantità di moto per essa acquistata dal corpo.

Una stessa forza F agendo per lo stesso tempo t su due corpi di massa m ed m', imprimerà ad essi le quantità di moto:

$$m v = F t \quad \text{ed} \quad m'v' = F t,$$ cioè:

5) $$m v = m'v';$$ quindi:

Se una stessa forza agisce su corpi diversi per lo stesso tempo, comunica a tutti le medesime quantità di moto.

La 5) può anche scriversi sotto forma di proporzione:

$$v : v' = m' : m$$ cioè:

Corpi diversi, sotto l'azione di una stessa forza, acquistano, dopo il medesimo tempo, velocità inversamente proporzionali alle loro masse.

La 4), per $t = 1$ diventa:

$$F = m v;$$

cioè la misura della forza può ricavarsi dalla quantità di moto acquistata dal corpo dopo un minuto secondo, (*misura secondo Cartesio*).

106. 3° Principio, dell'azione e reazione, *o di Newton.* Si enuncia così:

Ad ogni azione corrisponde una reazione (*di intensità*) *eguale e* (*di verso*) *contraria*. È implicito che cominciano e cessano contemporaneamente.

Essendo un postulato, ci limitiamo a verificarlo con qualche esempio. Una palla elastica, cadendo su un piano elastico, lo urta (azione) e si schiaccia e schiaccia il piano; ma essendo palla e piano elastici, riprendono la forma primitiva e con ciò il piano *reagisce* sulla palla, e la spinge indietro; questa rimbalza (reazione) e risale (teoricamente e nel vuoto) sino all'altezza da cui era caduta; così appunto vuole il 3° principio.

Nello sparo di un fucile la polvere agisce sul proiettile, e lo spinge avanti (*azione*); ma contemporaneamente reagisce sul fucile, che rincula (*reazione*);

(1) Si notino le definizioni *puramente algebriche* di queste due grandezze.

azione e reazione sono manifestamente di verso contrario. Ma esse sono anche di intensità eguale: perchè non devono [illegible] velocità acquisite dal proiettile e dal fucile, che sono di [illegible] dalle loro quantità di moto (§ 105). Cioè, le velocità del proiettile e del fucile [illegible] sono inversamente proporzionali alle rispettive masse; con ciò il principio è verificato.

Se, per la gravità, la Terra attira una pietra che [illegible] la pietra attira la Terra.

Azione e reazione possono sussistere anche in un corpo in quiete. Così ad es., un grave poggiato su un tavolo preme su questo col suo peso (*azione*); ma a sua volta il tavolo *reagisce* con egual forza sul grave, sostenendolo. Infatti, se la gravità cessasse istantaneamente, il grave sarebbe lanciato verticalmente in alto, dalla forza di reazione del tavolo.

Vedremo in seguito parecchie applicazioni di questo 3° principio.

107. Problemi sui principî della dinamica.

a) Problemi risoluti.

1. *A ciascun capo di un lungo filo, che scorre su una puleggia fissa, è legato un peso di* kg *2,5; il sistema è in equilibrio ed in quiete. Su uno dei pesi si aggiunge un peso addizionale di* g *100: il sistema si mette in moto. Dopo 5*^{s} *si toglie (senza scosse) il peso addizionale. Determinare: il moto nei primi 5*^{s}*; il moto successivo dopo tal tempo; lo spazio totale descritto in 15*^{s}. (Si trascurino gli attriti e le masse del filo e della puleggia).

Risoluzione. — La forza che produce il moto iniziale, è il peso di *g* 100; equivalente per la 2) a:

$$F = mg = (100 \times 980) \text{ dine} = 98000 \text{ dine.}$$

Questa forza deve muovere la massa totale M del sistema, che è:

$$M = \text{kg } (2{,}5 \times 2) + \text{g } 100 = \text{g } 5100.$$

Considerando F costante (vedremo al § 108 che a rigore non è), essa imprimerà al sistema un moto naturalmente accelerato, (§ 104); l'accelerazione a sarà tale che, per la 3):

$$F = Ma \qquad \text{da cui:} \qquad a = \frac{F}{M} = {}^{\text{cm}}/_{\text{s}}\ \frac{98\,000}{5\,100} = {}^{\text{cm}}/_{\text{s}}\ 19{,}22.$$

Dopo 5^s il sistema ha acquistato la velocità v_5, (§ 29-4):

$$v_5 = {}^{\text{cm}}/_{\text{s}}\ (19{,}22 \times 5) = {}^{\text{cm}}/_{\text{s}}\ 96{,}1\ ;$$

ed ha percorso lo spazio s_5, (§ 29 - 6):

$$s_5 = \text{cm} \left(\frac{1}{2} \times 19{,}22 \times 5^2 \right) = \text{cm } 240{,}25.$$

Dopo 5^s, cessando la forza acceleratrice, il moto diventa uniforme (§ 104), mantenendo la velocità costante v_5; movendosi per altri 10^s, il sistema percorrerà ancora lo spazio s_{10}, (§ 25 - 1):

$$s_{10} = \text{cm } (96{,}1 \times 10) = \text{cm } 961\ .$$

Lo spazio totale descritto in 15^s, sarà perciò:

$$s = s_5 + s_{10} = \text{cm } (240{,}25 + 961) = \text{cm } 1201{,}25 = \text{m } 12 \text{ circa.}$$

2. *Il nostro fucile da guerra pesa* g *3900; il proiettile* g *10,5 e parte con la velocità iniziale di* m *700 al* s. *Qual'è la velocità con cui il fucile rincula?*

Risoluzione. — Chiamando x la velocità con cui rincula il fucile, si avrà, (§ 106):

$$10{,}5 \times 700 = 3900 \times x \qquad \text{da cui:} \qquad x = \text{m } \frac{10{,}5 \times 700}{3900} = \text{m } 1{,}88.$$

b) **Problemi da risolvere.**

1. Due pesi p e P, [illegible] capi di un filo di una puleggia fissa, p scende verticalmente, P sale (senza attrito) su un piano inclinato a 30° sull'orizzonte; il filo che tira P è parallelo al piano. Calcolare in quanto tempo P percorre la lunghezza l del piano. (Trascurare gli attriti, e le masse della puleggia e del filo).

2. La forza media sviluppata dalla polvere sul proiettile in un'arma da fuoco, è di 400 *kg*; il proiettile pesa *g* 20 e percorre la canna del fucile in 1/[illegible] di secondo. Calcolare la velocità del proiettile all'uscita dall'arma. (Applicare la 4) § 105, riducendo le quantità in unità assolute).

Moto per azione della gravità.

108. **Caduta libera dei gravi.** — Finora in dinamica abbiamo fatto uno studio generico dei movimenti. Studiamo ora alcuni moti particolari.

Studiare un moto vuol dire determinare: la forma della traiettoria, la specie del moto, e le sue leggi.

Il più frequente è il moto di un corpo, che cade liberamente sotto l'azione della gravità.

Fig. 171.

Se una forza agisce su un corpo non soggetto a legami, il moto avviene, per il 2° principio della dinamica, in direzione della forza. Quindi un corpo libero di cadere, si muoverà in modo che il suo baricentro segua la verticale passante per tal punto; questa direzione, abbiamo già visto (§ 82), è la retta che unisce il baricentro del corpo col centro della Terra. Però una foglia o un pezzo di carta cadendo, non seguono la verticale; ma ondeggiano e si muovono più lentamente di altri corpi pesanti. In base a tale osservazione anticamente si credeva che i corpi cadessero tanto più in fretta quanto più fossero pesanti. Ma Galileo dimostrò errata tale credenza; egli fece cadere dall'alto del Campanile di Pisa, due sfere di piombo di egual diametro, ma l'una di peso decuplo dell'altra (la più leggera era vuota internamente); orbene lasciate libere contemporaneamente, le due sfere arrivarono a terra quasi contemporaneamente.

La deviazione dalla verticale e la diversa velocità con cui cadono i varî corpi, dipendono dalla *resistenza dell'aria*. È questa una forza che contrasta la caduta; e siccome agisce in modo vario e non del tutto noto, così studieremo *la caduta dei corpi nel vuoto*.

Newton provò che nel vuoto tutti i corpi cadono secondo la verticale passante per il loro baricentro, con la stessa accelerazione, *e perciò acquistano dopo lo stesso tempo, la stessa velocità.*

Per dimostrare ciò prese un lungo tubo di vetro (chiamato per ciò il **tubo di Newton**) (Fig. 171), da cui si può togliere l'aria con la macchina pneumatica. Nell'interno sono posti pezzettini di sostanze diverse:

carta, legno, piombo.... Facendo cadere questi corpi [illegible] è dentro l'aria, arriva al fondo prima il piombo, [illegible] la carta. **Facendo invece il vuoto, tutti i corpi arrivano al fondo contemporaneamente.**

Anche la caduta dei liquidi è rallentata dalla resistenza dell'aria. Ciò si prova col **martello ad acqua**: esso è un tubo di vetro, della forma della

Fig. 172.

Fig. 172, ripieno d'acqua per circa la metà. Nel tubo è stata tolta l'aria con la macchina pneumatica. Rovesciando bruscamente l'apparecchio, l'acqua cade in un blocco solo, e batte sul **fondo con un colpo secco, come di martello.**

Cadendo invece nell'aria, il liquido si sparpaglia in goccioline, e queste scendono con velocità ridotta. Così, le gocce della pioggia pur cadendo da grande altezza, arrivano a terra con velocità limitata; se non vi fosse l'aria una goccia d'acqua arriverebbe a terra con velocità così grande da riuscire micidiale (§ 138).

La causa che produce la caduta è la forza di gravità. Questa varia con la distanza dal centro della Terra (§ 102); poichè cadendo il corpo si avvicina a terra, la forza che lo accompagna cresce durante la caduta del corpo. Sarebbe malagevole studiare, con le nozioni elementari di matematica che noi possediamo, il moto vario risultante. Ma supponendo che *i corpi cadano da piccola altezza* si può ritenere trascurabile la variazione di distanza dal centro della Terra, e considerare la gravità come forza costante. E allora il moto sarà (§ 104) uniformemente vario; e se il corpo cade partendo dalla quiete, sarà naturalmente accelerato. Le leggi della caduta saranno quindi quelle del moto naturalmente accelerato (§ 29) e le formule relative si otterranno dalle 4), 6), 8) di quel paragrafo, sostituendo ad a il valore speciale che acquista l'accelerazione sotto l'azione della gravità. Abbiamo visto che tale valore è di circa m 9,8 e varia leggermente da luogo a luogo; l'abbiamo indicato con la lettera g (§ 102), e si chiama *l'accelerazione dovuta alla gravità* o semplicemente **la gravità.**

Le leggi della caduta dei gravi (*nel vuoto e da piccole altezze*) saranno date adunque dalle formule:

$$1) \qquad v = gt \qquad s = \frac{1}{2} g t^2 \qquad v = \sqrt{2gs}$$

Esempi: 1° *Un grave cade da una certa altezza e arriva a terra dopo 5 secondi;* la velocità con cui batte a terra sarà per la 1ª delle 1):

$$v = gt = \text{m}\,(9{,}8 \times 5) = \text{m } 49 \text{ al secondo.}$$

L'altezza da cui il corpo parte, sarà per la 2ª delle 1):

$$s = \frac{1}{2} g t^2 = \text{m}\left(\frac{1}{2} 9{,}8 \times 5^2\right) = \text{m } 122{,}5.$$

2. *Una pietra è lasciata cadere in un pozzo profondo* m *40: con che velocità batte sull'acqua?*

Per la 3ª delle 1) sarà:

$$v = \sqrt{2gs} = \sqrt{2 \times 9{,}8 \times 40} = \text{m } 28 \text{ al secondo.}$$

109. Moto verticale dei gravi con velocità iniziale. — Un corpo, soggetto alla gravità, può essere lanciato lungo la verticale, in basso o in alto, con una spinta che gli comunichi una certa velocità iniziale. Es. lo sparo di un fucile con la canna verticale, rivolta in basso o in alto.

A causa della spinta iniziale, il corpo assumerebbe un moto uniforme (§ 99); ma, agendo contemporaneamente la gravità, essa imprimerebbe al corpo un moto naturalmente accelerato; il moto risultante sarà (§ 32 e 33) uniformemente accelerato, se il corpo è spinto in basso, uniformemente ritardato, se è spinto verso l'alto. In conseguenza le leggi saranno espresse dalle formule del § 31, quando al solito ad a si sostituisca g.

2) $$v = u_0 \pm g t ; \qquad s = u_0 t \pm \frac{1}{2} g t^2 .$$

Possiamo calcolare l'altezza raggiunta dal corpo lanciato in alto, se parte con la velocità iniziale u_0. Esso, arrivato all'altezza massima, avrà la velocità zero; quindi vi perverrà dopo il tempo t tale, che, per la prima delle 2):

3) $$v = u_0 - g t = 0 , \qquad \text{cioè:} \qquad t = \frac{u_0}{g} .$$

Dalla seconda formula: $s = u_0 t - \frac{1}{2} g t^2$, sostituendo a t il valore $\frac{u_0}{g}$, si ricava l'altezza massima raggiunta:

4) $$h = u_0 \frac{u_0}{g} - \frac{1}{2} g \frac{u_0^2}{g^2} = \frac{u_0^2}{2 g} .$$

Raggiunta la sommità, il corpo tornerà giù con moto naturalmente accelerato; e percorrerà gli h metri di cui era salito, in un tempo t_1 tale che, per la seconda delle 2):

$$h = \frac{1}{2} g t_1^2 \quad \text{da cui:} \quad t_1 = \sqrt{\frac{2 h}{g}} \; ; \quad \text{o sostituendo ad } h \text{ il suo valore:} \quad t_1 = \frac{u_0}{g} .$$

Cioè, impiegherà a discendere lo stesso tempo t che aveva impiegato a salire.

La velocità che acquista il corpo, allorchè è ritornato al punto di partenza, si ricava dalla prima delle 2), facendovi $t = \frac{u_0}{g}$; sarà:

$$v = g \frac{u_0}{g} = u_0 .$$

Cioè il corpo ritorna al punto di partenza, con la velocità che aveva all'inizio della salita; ciò, naturalmente, nel vuoto.

110. Moto di un grave su un piano inclinato. — Lasciando libero a sè un grave su un piano inclinato, esso è sollecitato a scendere da una forza, che (trascurando ancora gli attriti e la resistenza dell'aria) è, per la 2) del § 93:

9) $$F = P \frac{a}{l} ;$$

nella quale abbiamo chiamato: F la forza cercata, P il peso del corpo, a l'altezza ed l la lunghezza del piano inclinato.

Essendo P costante ed anche costante il rapporto $\frac{a}{l}$, risulta anche F costante; cioè il corpo scende sollecitato da una forza costante, e quindi (§ 104) con moto naturalmente accelerato.

Calcoliamo l'accelerazione g' acquistata. Per la 9): $\frac{F}{P} = \frac{a}{l}$;
ma per il 2° principio della dinamica, le forze sono proporzionali alle accelerazioni da esse impresse; cioè:

$\frac{F}{P} = \frac{g'}{g}$; quindi confrontando con la precedente: $\frac{g'}{g} = \frac{a}{l}$ da cui:

$$10) \qquad g' = g\frac{a}{l}; \quad \text{od anche:} \quad g' = g \operatorname{sen} \alpha.$$

Il tempo t_1 che impiega un corpo a scendere lungo il piano, dalla sommità alla base, cioè a percorrere la lunghezza l del piano, è per la 6) del § 29, e per la 10) di questo paragrafo:

$$t_1 = \sqrt{\frac{2l}{g'}} = \sqrt{\frac{2l^2}{ga}};$$

il tempo t che impiega un corpo a cadere lungo la verticale, dalla sommità alla base, cioè a percorrere l'altezza a del piano, è per la seconda delle 1) del § 108:

$t = \sqrt{\frac{2a}{g}}$; facendo il rapporto dei due tempi si ottiene:

$$\frac{t}{t_1} = \sqrt{\frac{2ga^2}{2gl^2}} = \frac{a}{l} \qquad \text{cioè:}$$

I tempi in cui un grave percorre l'altezza e la lunghezza di un piano inclinato, stanno tra loro come l'altezza sta alla lunghezza.

La velocità v_1 che ha un grave che scende lungo un piano inclinato allorchè ha percorso la lunghezza AB (Fig. 173), è per la 8) del § 29 e per la 10) di questo paragrafo:

$$v_1 = \sqrt{2g'l} = \sqrt{2ga}.$$

La velocità v che ha un grave cadendo lungo l'altezza AC del piano, allorchè è arrivato in C, è per la terza delle 1) del § 108:

$v = \sqrt{2ga}$; cioè: $v_1 = v$. Quindi:

La velocità che acquista un grave, cadendo dallo stesso punto lungo un piano inclinato o lungo la verticale, è la stessa allorchè esso ha raggiunto il medesimo piano orizzontale.

Il teorema precedente vale qualunque sia l'inclinazione del piano, e qualunque sia il punto di partenza A del piano orizzontale α (Fig. 173), purchè AC sia costante, cioè i piani α e β siano orizzontali. Quindi:

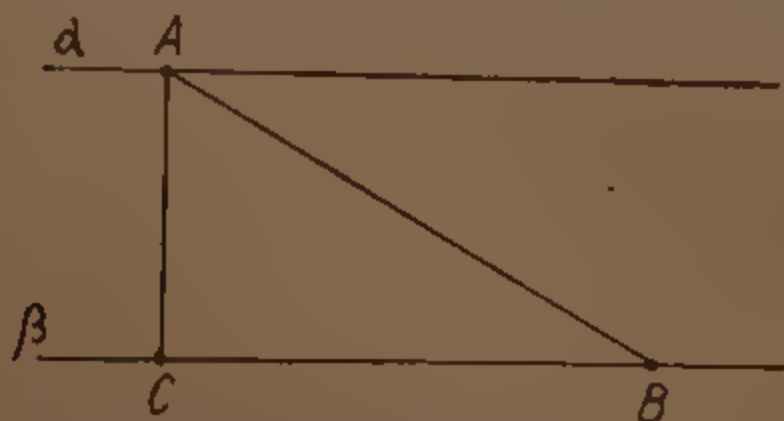



Fig. 173.

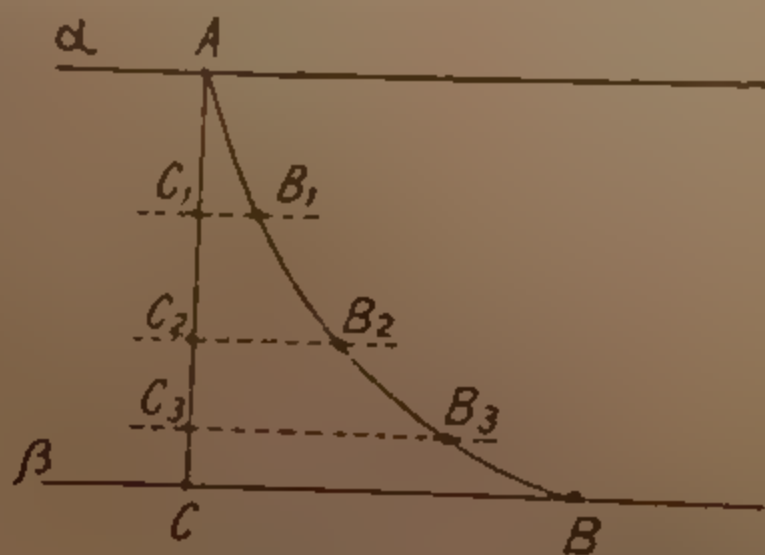



Fig. 174.

La velocità che acquista un grave scendendo da un piano orizzontale ad un altro pure orizzontale sottostante, è la stessa allorchè il grave ha raggiunto il piano inferiore, qualunque sia la retta lungo cui si è mosso.

Si muova infine un grave lungo una linea curva AB, partendo da A, (Fig. 174). Dividiamo l'arco AB in più parti AB_1 - B_1B_2 - B_2B_3 . . . supponiamo queste parti così piccole, che si possano considerare rettilinee. Per i teoremi precedenti, la velocità che ha il grave allorchè ha raggiunto i punti B_1 - B_2.... B, è uguale a quella che avrebbe lungo la verticale, allorchè avesse raggiunto i punti C_1 - C_2.... C; quindi generalizzando:

La velocità che acquista un grave scendendo da un piano orizzontale ad un altro sottostante pure orizzontale, è indipendente dal cammino rettilineo o curvilineo percorso; ed è uguale a quella che avrebbe percorrendo un tratto verticale compreso tra i due piani.

Se il corpo è spinto sul piano inclinato con una velocità iniziale u_0, anche ora il moto sarà uniformemente vario, con le leggi:

$$11) \qquad v = u_0 \pm g't \qquad s = u_0 t \pm \frac{1}{2} g' t^2$$

nelle quali g' ha il valore trovato con la 10).

111. Moto dei proiettili. — Anche ora dobbiamo limitarci a supporre che il moto del proiettile avvenga nel vuoto. Sia r (Fig. 175), la direzione in cui è lanciato il proiettile, dal punto O; l'angolo α che la r forma col piano orizzontale passante per O, si chiama *angolo di tiro*. Senza la gravità, il proiettile percorrerebbe la r con moto uniforme, e con la velocità iniziale u_0 che ha all'uscita dall'arma da cui è lanciato; in successivi tempi uguali, percorrerebbe successivi tratti uguali: $OA_1 = A_1A_2 = A_2A_3$.... Ma per la gravità, contemporaneamente il proiettile cade verso terra, e percorre negli stessi intervalli eguali di tempo, i tratti:

A_1B_1, $A_2B_2 = 4A_1B_1$,
$A_3B_3 = 9A_1B_1$...., (§ 29).

Quindi, per il postulato di Galileo (§ 32), il proiettile occuperà successivamente le posizioni O - B_1 - B_2 - B_3.... Abbiamo accennato nel § 46, che la traiettoria risultante è *una parabola*, con la concavità rivolta verso terra.

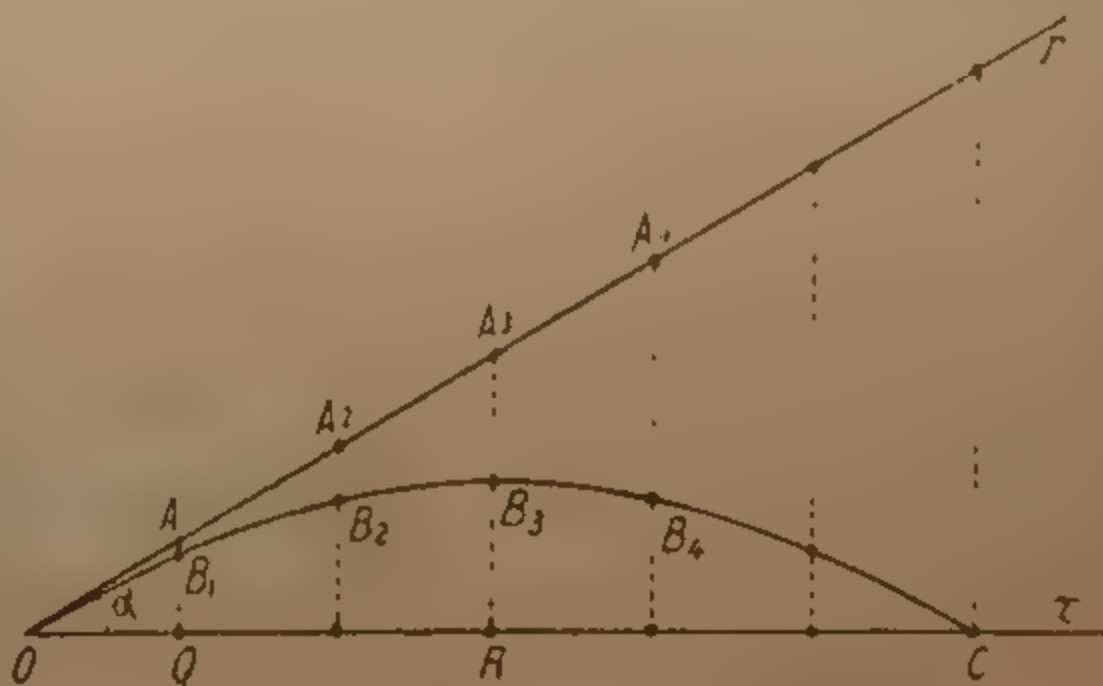



Fig. 175.

Una facile esperienza illustrativa, è quella di far uscire un getto d'acqua, spinta a pressione, da un tubo il cui asse è diretto nella direzione voluta r; la vena liquida assume la forma della parabola.

Il proiettile, tornando in basso, finirà per colpire il terreno in un punto C; la distanza di C da O si chiama la gittata del tiro.

Sia B_1 un punto qualunque della traiettoria, e sia t il tempo in cui il proiettile ha percorso l'arco OB_1, corrispondente al tratto OA_1. Dal triangolo rettangolo OQA_1 si ha (1):

$$(OQ) = (OA_1) \cos \alpha \qquad (A_1Q) = (OA_1) \operatorname{sen} \alpha .$$

---

(1) Per questo argomento, voluto dal programma, è indispensabile ricorrere alla Trigonometria.

Per la seconda delle 1) del § 108, è:

$$(A_1 B_1) = \frac{1}{2} g t^2; \quad \text{e per la 1) del § 25 è:} \quad (O A_1) = u_0 t; \quad \text{quindi}$$

$(Q B_1) = (A_1 Q) - (A_1 B_1) = (O A_1) \operatorname{sen} \alpha - \frac{1}{2} g t^2$, e sostituendo a $(O A_1)$ il suo valore:

$$12) \qquad (O Q) = u_0 t \cos \alpha \qquad (Q B_1) = u_0 t \operatorname{sen} \alpha - \frac{1}{2} g t^2.$$

Otteniamo in tal modo i valori delle coordinate del punto B_1 della traiettoria, che ci permettono di individuare in qualunque istante la posizione del proiettile.

Si troverà la lunghezza della gittata, facendo nelle 12) $(Q B_1) = 0$; cioè:

$$u_0 t \operatorname{sen} \alpha - \frac{1}{2} g t^2 = 0; \quad \text{che si può scrivere:} \quad t\left(u_0 \operatorname{sen} \alpha - \frac{1}{2} g t\right) = 0$$

Questa si spezza nelle due equazioni: $t = 0$ e $u_0 \operatorname{sen} \alpha - \frac{1}{2} g t = 0$.

La prima soluzione è ovvia, perchè corrisponde all'istante della partenza, allorchè il proiettile è in O; dalla seconda equazione ricaviamo:

$$13) \qquad t = \frac{2 u_0 \operatorname{sen} \alpha}{g}, \quad \text{che dà il tempo in cui il proiettile colpisce } C.$$

Sostituendo tale valore nella prima delle 12), OQ diventa la gittata OC, e sarà:

$$14) \qquad (O C) = u_0 \cdot \frac{2 u_0 \operatorname{sen} \alpha}{g} \cdot \cos \alpha = \frac{u_0^2}{g} \cdot 2 \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha.$$

Si sa dalla trigonometria che: $2 \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha = \operatorname{sen} 2\alpha$; sostituendo:

$$15) \qquad (O C) = \frac{u_0^2}{g} \operatorname{sen} 2\alpha; \quad \text{che dà } \textit{il valore della gittata.}$$

Il valore massimo di (OC), per un dato valore di u_0, si ha per il valore massimo di sen 2α. Sappiamo che il valore massimo del *seno* è $+1$, corrispondente al valore dell'arco di 90°; otterremo perciò la gittata massima, facendo nella 15): $2\alpha = 90°$, cioè se l'angolo di tiro è: $\alpha = 45°$, nel qual caso è:

$$16) \qquad (O C) = \frac{u_0^2}{g}. \qquad \text{Ricordando la 4) del § 109, si ottiene che:}$$

La gittata massima è il doppio dell'altezza massima che il proiettile raggiungerebbe verticalmente, con la stessa velocità iniziale.

Ciò in teoria; in pratica, per la resistenza dell'aria, la gittata massima si ha per $\alpha = 32°$ circa.

Notiamo, che se la direzione r del tiro è verticale, cioè $\alpha = 90°$, è:

$(O C) = \frac{u_0^2}{g} \operatorname{sen} 180° = 0$; ciò è evidente, perchè in tal caso il proiettile ricade al punto di partenza.

L'altezza massima RB_2 di cui si solleva il proiettile, chiamata l'altezza del tiro, si calcola in modo analogo:

Sia t_1 il tempo nel quale il proiettile ha raggiunto il culmine B_2 della traiettoria, sia τ un tempo piccolissimo a piacere; al tempo $t_1 - \tau$ l'altezza h_1 raggiunta sarà

por la seconda del [illegible]

$$h_1 = u_0 (t_1 - \tau) \operatorname{sen} \alpha - \frac{1}{2} g (t_1 - \tau)^2; \qquad \text{o al tempo } t_1 + \tau:$$

[illegible] La loro differenza è:

$$h_2 - h_1 = u_0 \operatorname{sen} \alpha \,.\, 2\tau - \frac{1}{2} g \,.\, 4 t_1 \tau = 2\tau (u_0 \operatorname{sen} \alpha - g t_1).$$

Ora, allorchè il pro[illegible] il culmine E_1, per un piccolo tratto attorno a E_3 si muove [illegible], in modo che h_2 [illegible] h_1 [illegible] 0. Quindi dobbiamo calcolare t_1 in modo che:

$$2\tau (u_0 \operatorname{sen} \alpha - g t_1) = 0, \qquad \text{che si spezza nelle due:}$$

$$2\tau = 0 \qquad \text{e} \qquad u_0 \operatorname{sen} \alpha - g t_1 = 0.$$

Il 1° caso si esclude, perchè indica che il proiettile non si muove; il 2° caso ci dà la soluzione cercata:

$$17) \qquad t_1 = \frac{u_0}{g} \operatorname{sen} \alpha \,.$$

Confrontando col valore di t della 13), in cui il proiettile arriva al termine della gittata, si trova: $t_1 = \frac{t}{2}$; cioè:

Il tempo in cui il proiettile sale alla massima altezza, è la metà di quello che impiega a compiere l'intera gittata.

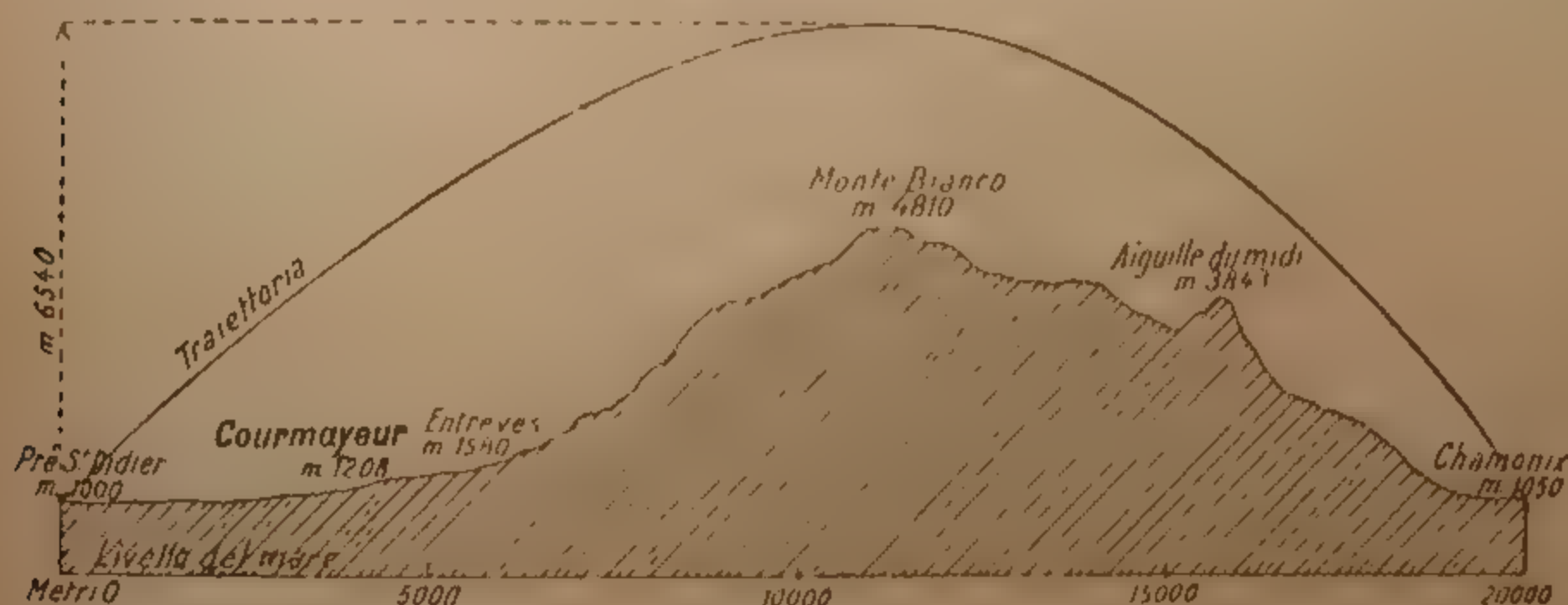



Fig. 176.

Questo risultato era facilmente intuibile; ma è stato bene averlo dedotto col ragionamento.

Sostituendo il valore trovato di t_1 nella seconda delle 12), si troverà l'altezza del tiro h cercata:

$$18) \qquad h = u_0 \,.\, \frac{u_0}{g} \operatorname{sen}^2 \alpha - \frac{1}{2} g \,.\, \frac{u_0^2}{g^2} \operatorname{sen}^2 \alpha = \frac{u_0^2}{2g} \operatorname{sen}^2 \alpha \,.$$

Per la gittata massima, cioè per $\alpha = 45°$ e quindi $\operatorname{sen} 45° = \sqrt{\frac{1}{2}}$, si ricava l'altezza massima H del tiro:

$$19) \qquad H = \frac{u_0^2}{4g} \,.$$

Con la 3) del § 109 avevamo trovato che l'altezza massima raggiunta dal proiettile, se fosse stato lanciato verticalmente in alto, sarebbe stata:

$$H_1 = \frac{u_0^2}{2g}; \qquad \text{troviamo quindi:} \qquad H = \frac{H_1}{2}, \quad \text{cioè:}$$

L'altezza massima di tiro è metà dell'altezza massima che il proiettile raggiungerebbe verticalmente, con la stessa velocità iniziale.

Dal triangolo rettangolo ORA_3 si ricava: [illegible] la 14):

$$(OR) = \frac{(OC)}{2} = \frac{u_0^2}{g} \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha,$$ [illegible]

$$(RA_3) = \frac{u_0^2}{g} \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha \operatorname{tag} \alpha = \frac{u_0^2}{g} \operatorname{sen}^2 \alpha; \quad \text{e per la 18): } (RA_3) = 2h = H$$

Quindi RA_3 è l'altezza massima che raggiungerebbe il proiettile spinto verticalmente; essendo $(RB_3) = h$, sarà anche: $RB_3 = B_3A_3$.

Riassumendo abbiamo nel moto dei proiettili:

gittata del tiro:	15)	$(OC) = \frac{u_0^2}{g} \operatorname{sen} 2\alpha$
gittata massima, per $\alpha = 45^\circ$:	16)	$(OC) = \frac{u_0^2}{g}$
altezza del tiro:	18)	$h = \frac{u_0^2}{2g} \operatorname{sen} 2\alpha$
altezza massima del tiro, per $\alpha = 45^\circ$:	19)	$H = \frac{u_0^2}{4g}$

Osserviamo nuovamente che tutti questi risultati teorici, vengono in pratica notevolmente modificati per la resistenza dell'aria.

La forma della traiettoria e il valore rilevante dell'altezza massima del tiro, che può essere di parecchi chilometri, spiegano come si possa colpire un bersaglio anche non visibile, al di là di una montagna. La Fig. 176 indica, ad es., come con le grosse artiglierie moderne, si potrebbe facilmente bombardare Chamonix da Pré-Saint-Didier, al di sopra del Monte Bianco.

La famosa *Berta*, con cui i tedeschi bombardarono Parigi, nella guerra mondiale del 1914-18, tirava alla distanza di *km* 120, e il nostro *cannonissimo Ansaldo* può lanciare proiettili di *kg* 105 a *km* 140 di distanza!

112. Problemi sul moto verticale dei gravi.

a) Problemi risoluti. (Si trascuri la resistenza dell'aria).

1. *Calcolare la profondità del pozzo della foresta di Konigstein, sapendo che facendovi cadere una pietra dalla bocca, se ne sente il colpo al fondo dopo 9^s.*

Risoluzione. — Sia x la profondità del pozzo, t_1 il tempo in cui la pietra arriva al fondo, e t_2 il tempo che mette il suono per arrivare dal fondo alla bocca del pozzo. È per ipotesi:

5) $t_1 + t_2 = 9^s$. Per la 6) del § 29 è, ponendo $g = m\ 9{,}8$:

6) $x = 4{,}9\, t_1^2$. Per la 1) del § 25, essendo $v = m\ 340$ al s la velocità del suono, è:

$x = 340\, t_2$. Confrontando con la 6), si ottiene:

7) $4{,}9\, t_1^2 = 340\, t_2$. La 5) e la 7) formano un sistema, da cui ricaveremo t_1 e t_2. Si ha dalla 5): $t_2 = 9 - t_1$, e sostituendo nella 7): $4{,}9\, t_1^2 - 340\,(9 - t_1) = 0$; sviluppando e ordinando: $4{,}9\, t_1^2 + 340\, t_1 - 3060 = 0$.

Quest'equazione ha radici, perchè il 3° coeff. è negativo; esse hanno segno contrario; trascurando la radice negativa, perchè non soddisfa al problema, si ha:

$$t_1 = \frac{-340 + \sqrt{115600 + 59976}}{9{,}8} = 8{,}06\ s.$$

Sostituiamo nella 5): si ottiene:

$$m\ 4{,}9 \times (8{,}06)^2 = m\ 318{,}5 .$$

2. *Un grave è lanciato dal basso in alto verticalmente, con velocità iniziale* u_0; *un altro grave, dopo il tempo* t *è lanciato dallo stesso punto, lungo la stessa verticale, in alto pure, con la stessa velocità iniziale. A che altezza i due gravi s'incontrano?*

Risoluzione. — L'incontro evidentemente avverrà allorchè il 1º grave, raggiunta l'altezza massima, ritorna in giù. Sia t_1 il tempo dopo cui avviene l'incontro, contato dalla partenza del 1º grave. Questo è salito per il tempo $t_2 = \frac{u_0}{g}$, (§ 109 - 3), percorrendo l'altezza massima $h = \frac{u_0^2}{2g}$, (§ 109 - 4). Incontrerà il 2º grave dopo il tempo t_1 dalla partenza, cioè dopo esser disceso per un tempo $t_3 = t_1 - t_2 = t_1 - \frac{u_0}{g}$. In questo tempo percorrerà lo spazio, (§ 108 - 1): $h_1 = \frac{1}{2} g t_3^2 = \frac{1}{2} g \left(t_1 - \frac{u_0}{g}\right)^2$.

Il 2º grave sale con moto uniformemente ritardato, e incontrerà il 1º dopo il tempo $t_1 - t$ da che è partito, percorrendo lo spazio, (§ 109 - 2):

$$x = u_0 (t_1 - t) - \frac{1}{2} g (t_1 - t)^2. \qquad \text{Ma è anche:}$$

$$8) \qquad x = h - h_1 = \frac{u_0^2}{2g} - \frac{1}{2} g \left(t_1 - \frac{u_0}{g}\right)^2 = u_0 t_1 - \frac{1}{2} g t_1^2.$$

Eguagliando questi due valori di x, sviluppando e riducendo, si ha:

$$g t t_1 = u_0 t + \frac{1}{2} g t^2 ; \qquad \text{ossia dividendo per } t \text{ che è diverso da zero:}$$

$$g t_1 = u_0 + \frac{1}{2} g t, \quad \text{da cui:} \quad t_1 = \frac{u_0}{g} + \frac{t}{2} . \quad \text{Sostituendo nella 8) si ha:}$$

$$x = \frac{u_0^2}{2g} - \frac{1}{2} g \left(\frac{u_0}{g} + \frac{t}{2} - \frac{u_0}{g}\right)^2 = \frac{u_0^2}{2g} - \frac{g t^2}{8} .$$

Perchè l'incontro avvenga sopra il punto di partenza, cioè per $x > 0$, deve essere $\frac{u_0^2}{2g} > \frac{g t^2}{8}$; da cui si ricava: $t < \frac{2 u_0}{g}$. Ciò è evidente, perchè il 2º membro è il tempo totale che il 1º grave impiega a salire e scendere, (§ 109).

b) **Problemi da risolvere.** (Si trascuri la resistenza dell'aria).

1. Con che velocità arriva a terra, e dopo quanti secondi, un grave lanciato da un aeroplano, da 4000 *m* d'altezza?

2. Lungo la stessa verticale si lancia dal basso un grave con velocità iniziale di *m* 80 al *s*, e si lascia libero contemporaneamente dall'alto un altro grave. Da che altezza deve partire il secondo grave, perchè incontri il primo nel momento in cui raggiunge la sua massima altezza?

3. Dall'altezza h si lascia cadere un grave; dopo quanto tempo dallo stesso punto, si deve lasciar cadere un altro grave, con velocità iniziale u_0, affinchè i due corpi arrivino contemporaneamente al suolo?

4. Un cannone lancia verticalmente dal basso in alto una palla, che esce dall'arma con la velocità di *m* 406,7 al *s*. Nell'istante in cui questa palla ha raggiunto la sua massima altezza, si lancia una seconda palla, con la stessa velocità iniziale. Quanto tempo dopo il secondo colpo di cannone s'incontrano le due palle, e a quale altezza?

5. Dalla navicella di un pallone, all'altezza h dal suolo, si lascia cadere un grave;

nello stesso istante si lancia [illegible] grave, con la velocità iniziale u_0. Dopo quanto tempo [illegible] corpi?

113. Problemi sul moto lungo un piano inclinato.

a) Problemi risoluti. (Si trascurino gli attriti e la resistenza dell'aria)

1. *Un mobile è lanciato dal basso in alto sopra un piano inclinato a 60° sull'orizzonte, con una velocità iniziale di m 50 al s. Quale sarà lo spazio percorso fino al momento **in cui si fermerà?***

Risoluzione. — Per la seconda delle 10), l'accelerazione lungo il piano è in questo caso: $g' = g \operatorname{sen} 60^\circ = m\ 9{,}8 \times 0{,}866 = m\ 8.49$.

Per la prima delle 11), la velocità dopo t^s, è: $v = u_0 - g't$; essa si annulla se: $u_0 - g't = 0$, cioè per: $t = \frac{u_0}{g'}$; nel caso nostro per: $t = \left(\frac{50}{8{,}49}\right)^s = 5{,}9^s$.

Il mobile si fermerà portanto dopo tale tempo; per la seconda delle 11) lo spazio percorso sarà allora:

$$s = u_0 t - \frac{1}{2} g' t^2 = \text{m} \left[50 \times 5{,}9 - \frac{1}{2}\, 8{,}49 \times (5{,}9)^2\right] = \text{m } \mathbf{117{,}3} \text{ circa.}$$

2. *Un mobile è lanciato dal basso in alto sopra un piano inclinato di 30° sull'orizzonte, con la velocità iniziale* u_0. *Dopo quanto tempo la velocità sarà ridotta a metà del valore iniziale, e quale sarà allora lo spazio percorso?* (Caso particolare: $u_0 =$ m 200 al s.).

Risoluzione. — Per $a = 30^\circ$, l'altezza del piano è metà della lunghezza; quindi, per la prima della 10) è: $g' = g\frac{a}{l} = \frac{g}{2}$.

La velocità del mobile dopo il tempo t, per la prima delle 11) è: $v = u_0 - \frac{g}{2} t$; per la condizione del problema, dobbiamo calcolare t per $v = \frac{u_0}{2}$, cioè:

$$u_0 - \frac{g}{2} t = \frac{u_0}{2}; \quad \text{da cui ricaviamo:} \quad t = \frac{u_0}{g}.$$

Lo spazio percorso in tale tempo, per la seconda delle 11) è:

$$s = u_0 t - \frac{1}{2} g' t^2 = \frac{u_0^2}{g} - \frac{u_0^2}{4g} = \frac{3}{4}\,\frac{u_0^2}{g}.$$

Per $u_0 =$ m 200 al s, viene:

$$t = \left(\frac{200}{9{,}8}\right)^s = \mathbf{20{,}4^s} \qquad \text{ed:} \qquad s = \text{m } \frac{3 \times 200^2}{4 \times 9{,}8} = \text{m } \mathbf{3061} \text{ circa.}$$

b) Problemi da risolvere. (Si trascurino gli attriti e la resistenza dell'aria)

1. Un corpo rotola su un piano inclinato, la cui altezza è metà della base. Calcolare che velocità acquista dopo aver percorso m 100.

2. Un corpo è lanciato su per un piano inclinato, la cui inclinazione è di 60°, con velocità iniziale metà di quella che acquisterebbe cadendo per m 8 lungo la verticale, ed appena sufficiente per arrivare alla sommità del piano. Calcolare l'altezza del piano.

3. Due mobili cadono contemporaneamente dalla sommità di un piano inclinato, l'uno lungo la verticale, l'altro lungo il piano. Calcolare il rapporto tra gli spazi percorsi dai due mobili, dopo lo stesso tempo t. (Caso particolare: $a = 30^\circ$).

4. Dagli estremi della base di un piano inclinato, di altezza a e lunghezza l, sono lanciati contemporaneamente due gravi; l'uno percorre la lunghezza del piano con velocità iniziale u_0, l'altro percorre l'altezza. Che velocità iniziale si deve imprimere al secondo grave, perchè arrivi alla sommità del piano contemporaneamente al primo?

5. Dimostrare che: un grave impiega eguale tempo a cadere lungo il diametro verticale di un cerchio (il cui piano è verticale) e lungo qualunque corda che ha un estremo in comune con quello più alto di tale diametro.

114. Problemi sul moto dei proiettili.

a) **Problemi risoluti.** (Si suppone il moto nel vuoto).

1. *C[illegible]ale deve esser lanciato il proiettile di un cannone, per colpire un bersaglio, in piano orizzontale, alla distanza di* km *120?*

[illegible] [illegible] per (OC) = m 120000, g = 9,8. Si ha:

$$120\,000 = \frac{x^2}{9{,}8}, \qquad \text{da cui:} \qquad x = \text{m}\sqrt{9{,}8 \times 120\,000} = \textbf{m 1084 al } s.$$

In pratica si richiede una velocità iniziale di circa 1300 $^m/_s$; tale era quella dei proiettili della famosa «Berta», con cui i tedeschi nell'ultima guerra bombardavano Parigi, a 120 *km* di distanza.

2. *Dallo stesso punto partono contemporaneamente, nello stesso piano verticale, due proiettili, l'uno con un angolo di tiro di 60° e la velocità iniziale* u_0. *Quale dev'essere la velocità iniziale dell'altro, perchè, con l'angolo di tiro di 30°, incontri il primo proiettile?*

Risoluzione. — Il punto d'incontro C deve avere eguale ordinata, rispetto ad entrambe le traettorie. Chiamando t il tempo in cui avviene l'incontro, ed x la velocità iniziale richiesta, calcoliamo con la 2ª delle 12) le due ordinate, ed eguagliamone i valori; si ottiene:

$$u_0\, t \operatorname{sen} 60^\circ - \frac{1}{2} g t^2 = x\, t \operatorname{sen} 30^\circ - \frac{1}{2} g t^2.$$

Riducendo e dividendo per t ($\neq 0$), si ricava:

$$u_0 \operatorname{sen} 60^\circ = x \operatorname{sen} 30^\circ, \qquad \text{da cui:} \qquad x = u_0 \frac{\operatorname{sen} 60^\circ}{\operatorname{sen} 30^\circ} = \frac{0{,}866}{0{,}5} u_0 = 1{,}732\, u_0.$$

b) **Problemi da risolvere.** (Si suppone il moto nel vuoto).

1. Un proiettile parte con la velocità iniziale di 750 $^m/_s$ e con l'angolo di tiro di 30°, su un piano orizzontale. Da che altezza devesi lasciar cadere contemporaneamente un grave, sulla verticale passante per il punto colpito dal proiettile, perchè arrivi contemporaneamente a questo?

2. Qual'è l'angolo di tiro richiesto, perchè un proiettile, con la velocità iniziale di 700 $^m/_s$, colpisca un bersaglio all'altezza di *m* 500 e alla distanza di *km* 18 dal cannone?

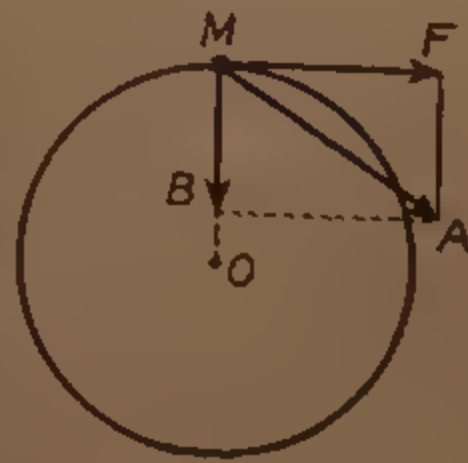
(Nota. - Applicare le 12); eliminare t; esprimere le funzioni che compariscono nell'equazione trigonometrica risultante, per mezzo di *tang.*).

Forza centrifuga.

115. Moto rotatorio - Forza centrifuga. — Dopo la caduta dei gravi, il moto che più frequentemente osserviamo è quello rotatorio. Chiamiamo *moto rotatorio* o *centrale quello di un punto che si muova su una circonferenza, con moto uniforme*, (§ 47).

Fig. 177.

Sia M (Fig. 177 il punto mobile. Sebbene uniforme, il moto non può avvenire per sola legge di inerzia, cioè senza intervento di forze, perchè allora il moto dovrebbe essere anche rettilineo (§ 99); una forza quindi deve agire su M.

Questa forza non può essere secondo la tangente MF, cioè nella direzione

del moto (§ 23); perchè per il 2° p[illegible] produrrebbe accelerazione, e il moto non sarebbe [illegible]. Non può essere neanche obliqua, come [illegible] MA, perchè questa forza scomposta in due MF e MB, [illegible] una componente MF nella direzione della tangente, e si ricadrebbe nel caso precedente.

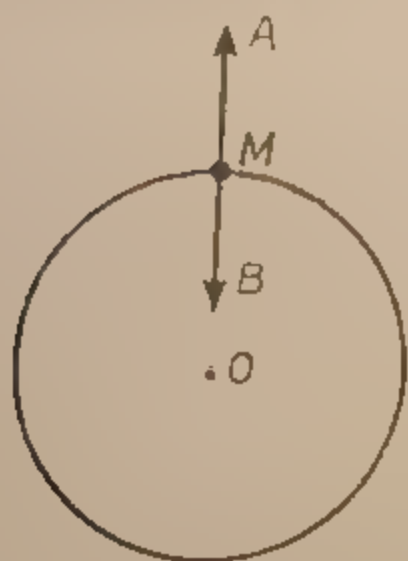



Fig. 178.

La forza agente su M non può essere pertanto che nella direzione del raggio, diretta verso il centro, come ad es. quella rappresentata da MB, (Fig. 178). Essa si chiama la **forza centripeta**; e non agisce sulla velocità del corpo mobile, ma unicamente sulla direzione; ed è quella che inflette in modo continuo la traiettoria, cambiandola da rettilinea in circolare.

Fig. 179.

Esempi: Nella *fionda* (Fig. 179) la forza centripeta è data dal filo che tiene la pietra; nelle ruote è data dai raggi che sostengono il cerchione; nel moto dei pianeti, dalla forza attrattiva del Sole, ecc.

Ma per il 3° principio della dinamica (§ 106) alla forza centripeta MB come azione, deve corrispondere una reazione contraria MA, (Fig. 178). Sul punto mobile deve cioè agire un'altra forza anche essa nella

direzione del raggio, ma di verso opposto alla forza centripeta; cioè tendente ad allontanare il mobile dal centro. Si chiama **la forza centrifuga.**

Fig. 180.

Esempi: Nella fionda il filo rimane teso, per la forza centrifuga. Facendo ruotare velocemente un secchiello pieno d'acqua (Fig. 180) questa non cade, quando il secchiello è in alto; perchè viene spinta dalla forza centrifuga, contro il fondo. Anzi, se nel fondo vi è un forellino, l'acqua zampilla verso l'alto; cioè *la forza centrifuga supera la gravità.*

Forza centripeta e centrifuga essendo azione e reazione, sono una conseguenza dell'altra; cioè *non può sussistere l'una indipendentemente dall'altra.* Cessando la forza centripeta, deve cessare nel medesimo istante anche la centrifuga; e allora il corpo, non soggetto più ad alcuna forza, si muoverà per inerzia, in linea retta, nella direzione del moto all'ultimo istante; cioè secondo la tangente alla circonferenza nel punto in cui le forze sono cessate. Così, quando nella fionda si lascia andare il filo, e cessa perciò la forza centripeta, la pietra non obbedisce alla forza centrifuga anch'essa cessata, cioè non si allontana secondo il raggio; ma va secondo la tangente. Si noti bene che la pietra non si allontana per la forza centrifuga, come talora si sente dire; ma per mancanza della forza centripeta e *per legge di inerzia.*

Lanciando una palla con un fucile, la cui canna è piegata a forma di arco circolare, la palla ruota secondo tale arco finchè percorre la canna; uscendo dalla bocca non continua il moto circolare, ma si allontana in linea retta, secondo la tangente a tale arco nel suo estremo.

116. Leggi della forza centrifuga. — Le quantità variabili in questo moto sono:

La massa m del corpo rotante, il raggio R della circonferenza su cui ruota, il periodo T, cioè il tempo in cui si compie un giro; e con esse varia **la forza centrifuga** F.

Essendo la forza centrifuga di eguale intensità della centripeta, basta calcolare questa. Ora, della forza centripeta conosciamo già l'accelerazione da essa impressa (§ 50); cioè:

$a = \frac{V^2}{R}$, dove V è la velocità tangenziale del punto mobile.

Per la nota formula: $F = ma$ (§ 103 - 3), sarà perciò:

1) $F = \frac{mV^2}{R}$: o anche, sostituendo a V il suo valore in funzione del periodo, (§ 47 - 1):

$$2) \qquad F = 4\pi^2 \frac{mR}{T^2}; \quad \text{che esprime le leggi cercate.}$$

Cioè essendo $\pi = 3,14$, e quindi $4\pi^2$ è una costante, le leggi sono:

La forza centrifuga è direttamente proporzionale alla massa del corpo rotante ed al raggio della circonferenza su cui si muove; è inversamente proporzionale al quadrato del periodo.

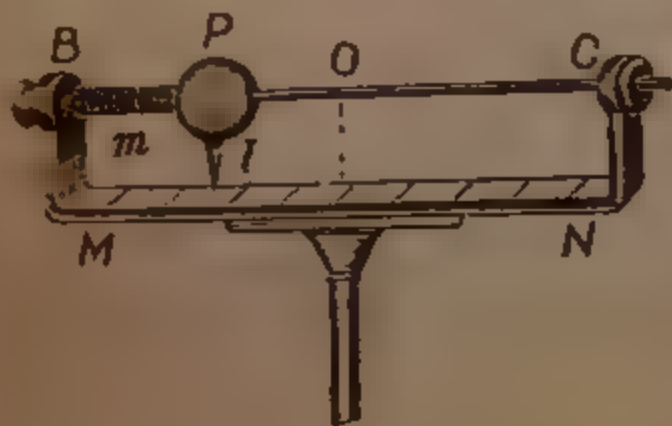
Verificheremo queste leggi con l'esperienza.

Per questo faremo uso della *macchina della forza centrifuga* (Fig. 181), con la quale si può ottenere la rapida rotazione di un perno AA, per mezzo di una ruota S. Sul perno A adattiamo un sostegno MN (Fig. 182), su cui è tesa un'asticella BC di acciaio, che serve da guida ad una sferetta P, la quale si appoggia contro una molla m, fissa all'altro estremo sulla branca B del sostegno MN. Facendo girare tutto il sostegno, il corpo P ruota attorno al centro O con raggio OP, e acquista una forza centrifuga; onde schiaccia la molla m, che perciò si accorcia alquanto. Questa deformazione della molla può leggersi dalla posizione di una punta i su una graduazione del sostegno MN; e serve a darci il valore della forza centrifuga. In altre parole, tale molla funziona da dinamometro (§ 53). Con questo apparecchio faremo le seguenti esperienze:

Fig. 181.

Fig. 182.

1. Manteniamo costante la velocità di rotazione e la distanza OP; ma ogni volta cambiamo la sferetta P. Se con una sferetta di g 50 la molla m si accorcia di cm 1, con sferette di g 100, 150..., si accorcia di cm 2, 3...; cioè:

La forza centrifuga è direttamente proporzionale alla massa del corpo rotante.

2. Se la stessa sferetta la poniamo [illegible] OP doppia, tripla... da O, la molla si accorcia il doppio, il triplo...; cioè [illegible]

La forza centrifuga è direttamente propor[illegible] raggio della circonferenza su cui gira il corpo.

3. Se la sferetta rotando con la velocità di [illegible] al secondo, schiaccia la molla di *mm* 2, portando la velocità a 10, 1[illegible] al secondo, la molla si schiaccia di *mm* 8, 18...; cioè se il periodo diventa [illegible] la forza centrifuga diventa 4, 9... volte maggiore; quindi:

La forza centrifuga è inversamente proporzionale al quadrato del periodo.

4. Poniamo ora sull'asticella due sfere; l'una P di peso doppio dell'altra Q (Fig. 183), e colleghiamole insieme con fili. Sia il raggio OP su cui ruota la sfera P, metà del raggio OQ dell'altra. Facendo ruotare il sistema, le due sferette restano in equilibrio, poichè le forze centrifughe da esse risentite, sono di intensità eguale ma di verso contrario. Ciò avviene perchè pur avendo la sfera P massa doppia di Q, ruota in compenso con raggio metà.

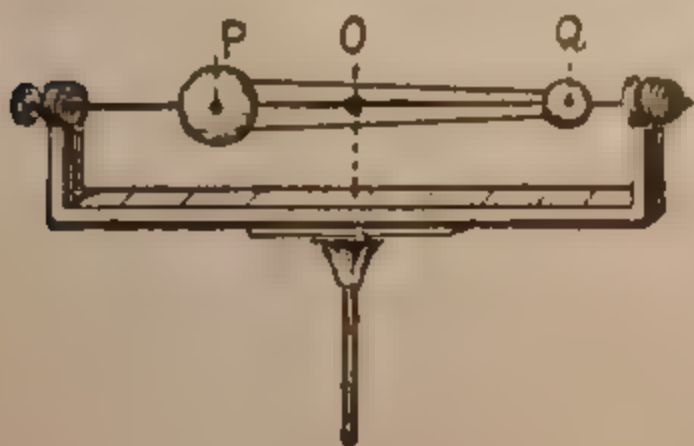



Fig. 183.

5. Sull'apparecchio della forza centrifuga disponiamo degli anelli di nastro flessibile di acciaio (Fig. 184), scorrevoli su un'asticella PP che fa da asse di rotazione. Gli anelli, allo stato di riposo, hanno forma circolare; facendo rotare il sistema, essi si schiacciano alle estremità P dell'asse. Ciò perchè i punti A ruotano con raggio maggiore di quello dei punti vicino a P; i punti A quindi risentono maggiore forza centrifuga, ed il sistema si schiaccia. Aumentando la velocità di rotazione, cresce lo schiacciamento.

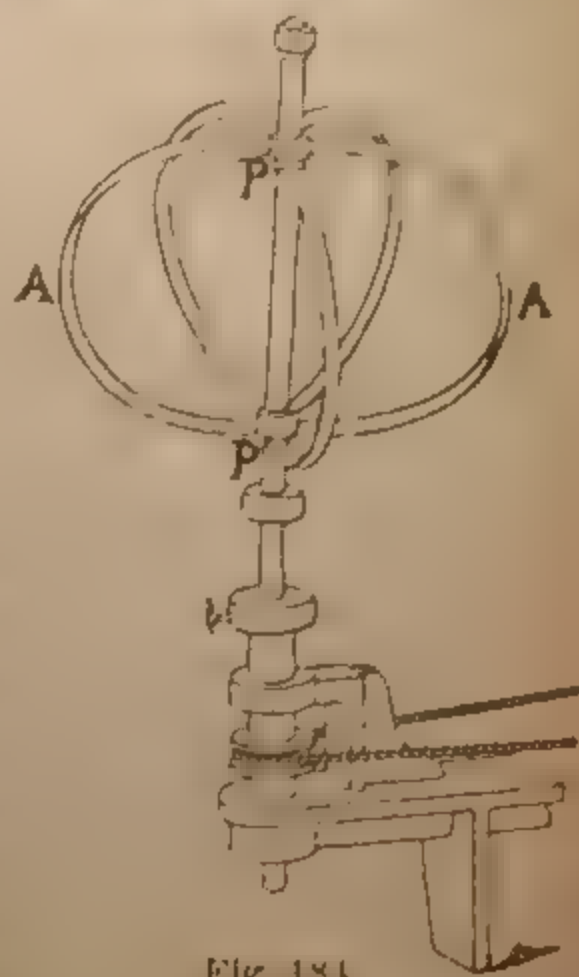



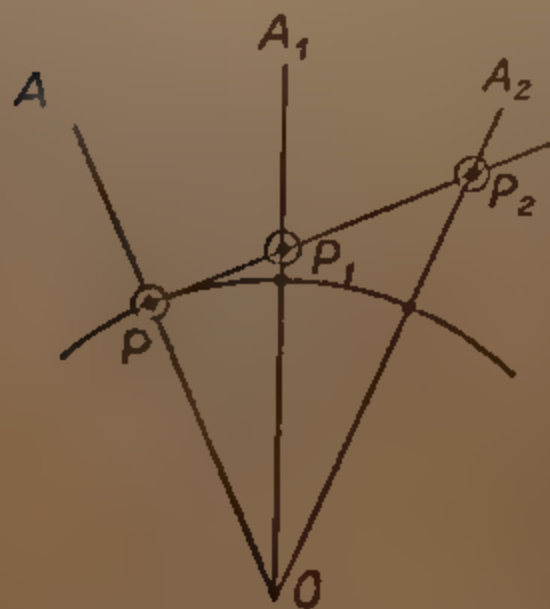
Fig. 184.

Questa esperienza spiega lo schiacciamento della Terra ai poli, avvenuto quando essa era ancora fluida; e poichè il calcolo dimostra che questo schiacciamento è quale dev'essere se la Terra compie un giro in 24 ore, questo fatto è una delle prove della rotazione della Terra attorno al suo asse.

Fig. 185.

Osservazione. — Sia P un corpo che possa scorrere liberamente lungo un'asticella OA, che gli fa da guida, (Fig. 185). Se l'asticella ruota attorno ad O, il corpo P si muove anch'esso. Non essendo P legato ad OA, la forza centripeta è nulla ed è perciò anche nulla la forza centrifuga; P allora si muove solo per inerzia e descrive una traiettoria rettilinea, acquistando successivamente le posizioni P_1 P_2... Ma per questo deve scorrere sull'asticella, allontanandosi da O, *come se su di esso agisse una forza centrifuga*. Dovremmo in tal caso dire che P si allontana dal centro per inerzia; si suole invece dire, sebbene impropriamente, che *P si allontana per forza centrifuga*. Si tenga conto di questa osservazione, nella interpretazione delle applicazioni citate nel paragrafo seguente.

117. Applicazioni della forza centrifuga. — Ne citiamo alcune fra le più comuni.

1. Idroestrattori centrifughi, che sono usati nelle grandi lavanderie, per spremere rapidamente i panni bagnati. Sono formati di cilindri di lamiera, bucherellati, che possono ruotare intorno ad un asse verticale; in essi si mettono i panni bagnati, e si fanno girare rapidamente. Per forza centrifuga i panni si portano alla superficie laterale interna del cilindro, e vi si premono con forza, mentre l'acqua spremuta esce dai buchi del cilindro.

Si adoperano anche per la spremitura delle torbe, ecc.

2. **Estrazione del miele.** — Anticamente si estraeva il miele dai favi con la spremitura; con ciò oltre ad ottenere un prodotto più grezzo, si rovinava il favo, e si otteneva perciò un raccolto più scarso. Oggi si dispone il favo su una macchina che lo faccia ruotare; il miele esce dalle celle per forza centrifuga. Esce così la parte più fluida e migliore, ed il favo non si distrugge; si possono quindi ottenere più raccolti.

3. **Scrematrici centrifughe.** – La separazione della crema dal latte può avvenire rapidamente, mettendo il latte in appositi recipienti, che si fanno ruotare velocemente su un asse verticale. La crema, formata dai grassi del latte, è più leggera, cioè ha massa minore del resto, che è principalmente acqua. Essa quindi acquista una forza centrifuga minore; cioè si raccoglie al centro del recipiente; da cui, per un tubo centrale può essere condotta all'esterno.

4. **Ventilatori e pompe centrifughe.** – Servono a mettere in movimento i primi l'aria, i secondi l'acqua, per ottenerne un efflusso. Non li descriviamo dettagliatamente; la Fig. 186 mostra un ventilatore per fucina, mosso da un motore elettrico.

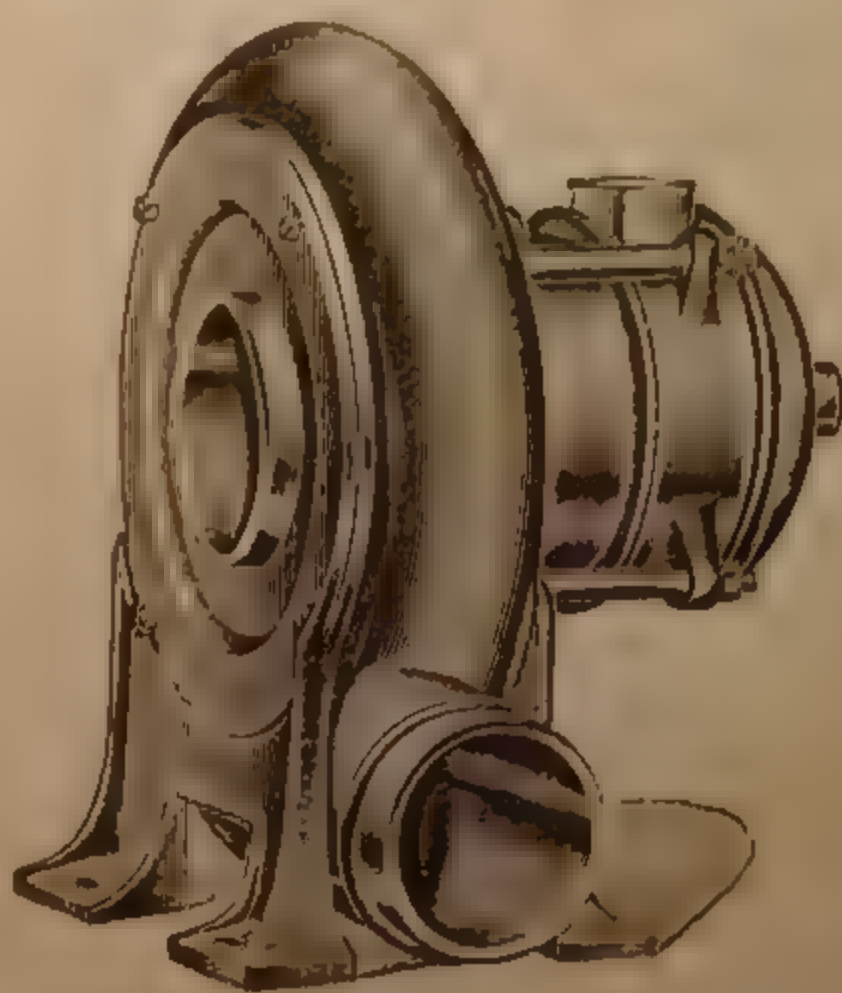



Fig. 186.

5. **I veicoli nelle voltate devono rallentare,** perchè altrimenti ribalterebbero dalla parte esterna della curva. Per evitare tale rallentamento le piste velocipedistiche ed automobilistiche nelle voltate sono inclinate. Infatti, in una strada orizzontale (Fig. 187) nel girare il veicolo è soggetto a due forze: GP che è quella della gravità (il suo peso) e GF che deriva dalla rotazione, (vedasi osservazione, al § 116). La loro risultante GR può avere direzione tale da incontrare il piano della strada fuori del punto O di appoggio della ruota, e la vettura ribalta.

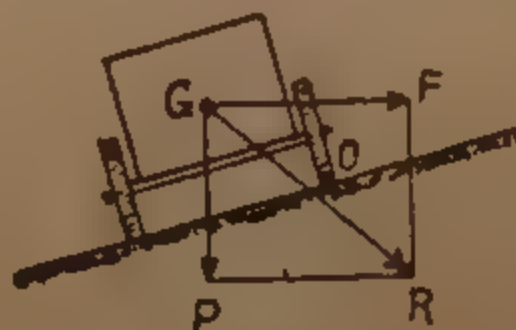



Fig. 187. Fig. 188.

Se invece il piano della strada è inclinato trasversalmente (Fig. 188), la risultante GR lo incontra fra le ruote, cioè dentro la base di appoggio, e la vettura non ribalta.

6. **Nel cerchio della morte** (Fig. 189) un veicolo, spinto velocemente su una pista di forma opportuna, può fare il giro completo senza cadere, perchè la forza centrifuga lo spinge in alto contro la rotaia su cui si muove.

Fig. 189.

In modo simile funzionano gli odierni *muri* o *globi della morte*, dentro cui volteggia un motociclista, nelle fiere e baracconi da divertimento.

118. Problemi sulla forza centrifuga.

a) Problemi risoluti.

1. *Una pallina P di massa m è sospesa ad un punto fisso O con un filo lungo m 0,25. Con che velocità deve essa ruotare, intorno ad un asse verticale x passante per O, perchè il filo OP si disponga a 45° con la verticale?* (Fig. 199).

Risoluzione. — Nella posizione di equilibrio la risultante PR della forza centrifuga PF e del peso della pallina PQ, dev'essere a 45° con la verticale, cioè con PQ. Essendo PQ perpendicolare a PF, dev'essere per ciò $PF = PQ$. Il raggio CP attorno a cui ruota P, pel teorema di Pitagora è:

Fig. 190.

$$(CP) = (OP) : \sqrt{2} = \text{cm}\ (25 : \sqrt{2}) = \text{cm}\ 17{,}68.$$

Per la 2) del § 116, ricordando che è $(PQ) = mg$ (§ 102), si ha:

$$m \times 980 = \frac{4 \times (3{,}14)^2 \times m \times 17{,}68}{T^2} \quad \text{da cui:}$$

$$T = \sqrt{\frac{4 \times (3{,}14)^2 \times 17{,}68}{980}} = 0{,}71 \text{ secondi.}$$

La velocità di P sarà perciò di $(1 : 0{,}71)$ giri $= 1{,}41$ giri al secondo; come si vede, essa è indipendente dalla massa del corpo rotante.

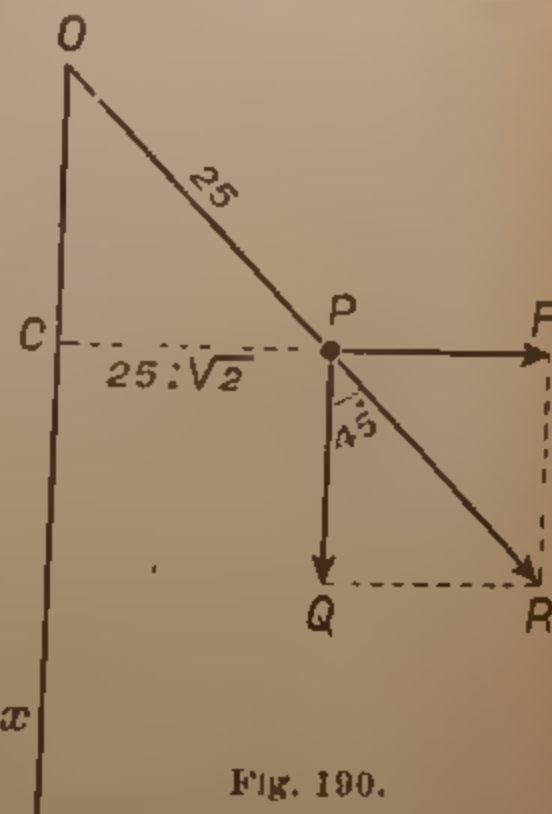
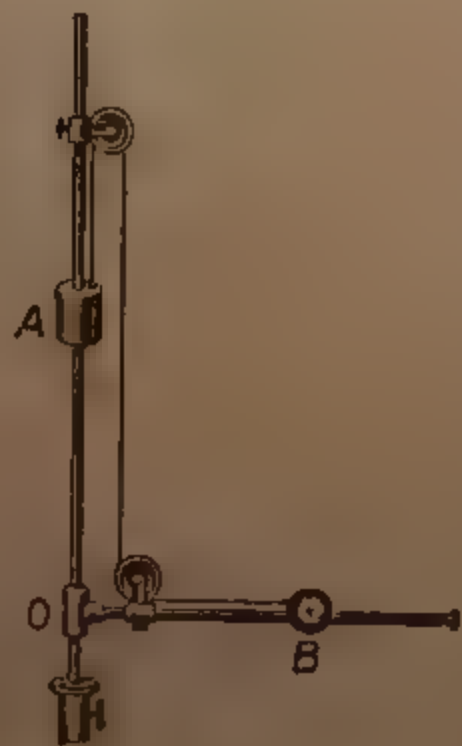



Fig. 191.

2. *Un'asticella rigida è ripiegata a squadra, e può ruotare in modo che una branca sia verticale. Su questa può scorrere un corpo A di peso P; sull'altra branca (orizzontale) può scorrere un altro corpo B di massa m. I due corpi sono collegati con un filo, passante per due carrucole, com'è indicato in Fig. 191. Con che velocità deve girare il sistema, attorno all'asse OA, perchè il corpo B, ruotando su un raggio r, tenga sollevato il corpo A.* (Trascurare gli attriti).

Risoluzione. — Sia A il corpo di peso P, e B il centro del corpo di massa m; questo, ruotando con raggio $(OB) = r$, acquista una forza centrifuga F, che per la 2) del § 116 è:

$$F = \frac{4\pi^2 m r}{x^2}; \quad \text{avendo chiamato } x \text{ il periodo cercato.}$$

Ora, noi vogliamo che $F = F'$; quindi dev'essere

[illegible]

b) **Problemi da risolvere.**

1. [illegible] 10 *cm* di lunghezza, [illegible] che tende il filo.

2. [illegible] deve ruotare il secchiello [illegible] di *cm* 80. (L'acqua riempie il secchiello fino a *cm* 16 di altezza).

3. Il [illegible] per *cm*² Con che velocità deve [illegible] di diametro, lungo *m* 1,50, perchè il filo si rompa per la forza centrifuga?

4. Ad un'asta [illegible] rispetto alla verticale passante per [illegible], che vi scorre senza attrito. Supposto che [illegible] uniforme, descrivendo la superficie laterale di un cono retto, [illegible] dovrà compiere, perchè l'anello sia in equilibrio a metà di essa?

5. All'estremità inferiore di un [illegible], mentre l'altra estremità è fissa ad un punto. [illegible] descrive la superficie laterale di un cono retto, mentre la pallina [illegible] lunghezza del filo è di *cm* 46,8. Determinare l'angolo di apertura del [illegible] condizioni di equilibrio.

Pendolo.

119. Pendolo semplice. — Dopo il moto rotatorio, il più frequente in natura è il *moto oscillatorio o pendolare*.

Chiamasi pendolo semplice, *un punto materiale sospeso ad un punto fisso per mezzo di un filo flessibile, inestendibile e senza peso.*

Sia M il punto materiale e C il punto fisso (Fig. 192); la posizione d'equilibrio è quando il filo CM è verticale (§ 85). Spostato il punto da tale posizione e portato in M_1 non può rimanervi, ma ritorna verso M; quivi giungendo con una certa velocità non può fermarsi, ma per inerzia prosegue dall'altra parte fino in M_2, in modo che (teoricamente, nel vuoto e se il filo non fa resistenza al moto) $M_1CM = MCM_2$. Da M_2 il punto ritorna in M_1, e così indefinitamente. Questo moto si chiama oscillazione: oscillazione *completa* da M_1 a M_2 e viceversa; *semplice* solo da M_1 a M_2 o da M_2 a M_1. Si chiama perjodo (semplice o completo) *la durata dell'oscillazione* (semplice o completa); lunghezza del pendolo la distanza CM del punto mobile dal centro di sospensione, ossia la lunghezza del filo; **ampiezza della oscillazione** l'angolo $M_1\widehat{C}M_2$.

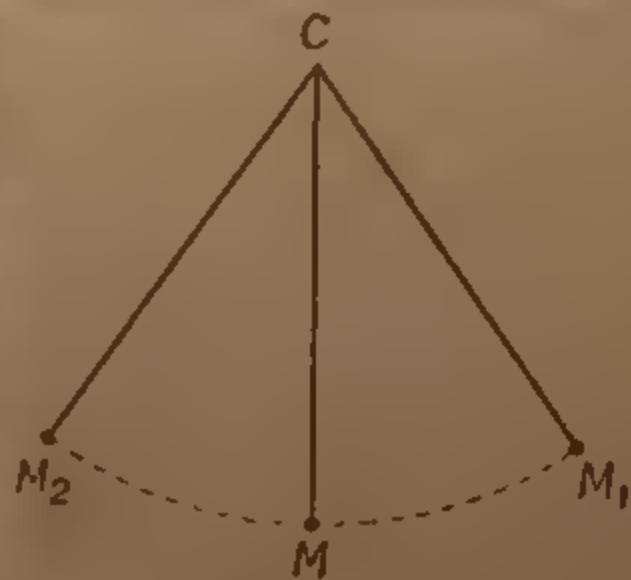



Fig. 192.

Per avere un'idea del moto di M, cerchiamo qual'è la causa che lo produce. Sul punto mobile non agisce che la gravità, rappresentata dal segmento verticale M_1P (Fig. 193). Scomponiamo questa forza in due componenti:

l'una M_1A nella direzione del filo, l'altra M_1B [illegible] perpendicolare al filo. La M_1A non ha influenza sul moto del punto, [illegible] del filo; il punto M_1 pertanto si mantiene sempre alla stessa distanza da C, e descrive un arco di circonferenza. La componente M_1B allora, perpendicolare al raggio CM_1, è nella direzione della tangente, cioè nella direzione del moto; essa è perciò la forza che produce il moto. Tale forza non è costante; essa diminuisce man mano che M_1 si avvicina ad M; in M_3 è già piccola, ed in M è zero; diventa poi di verso contrario al moto da M ad M_2. Concludiamo perciò (§ 104) che il moto di M è vario ma non uniformemente; ed è accelerato da M_1 ad M, ritardato da M a M_2, per tornare ad accelerare da M_2 a M e ritardare da M a M_1; e così via.

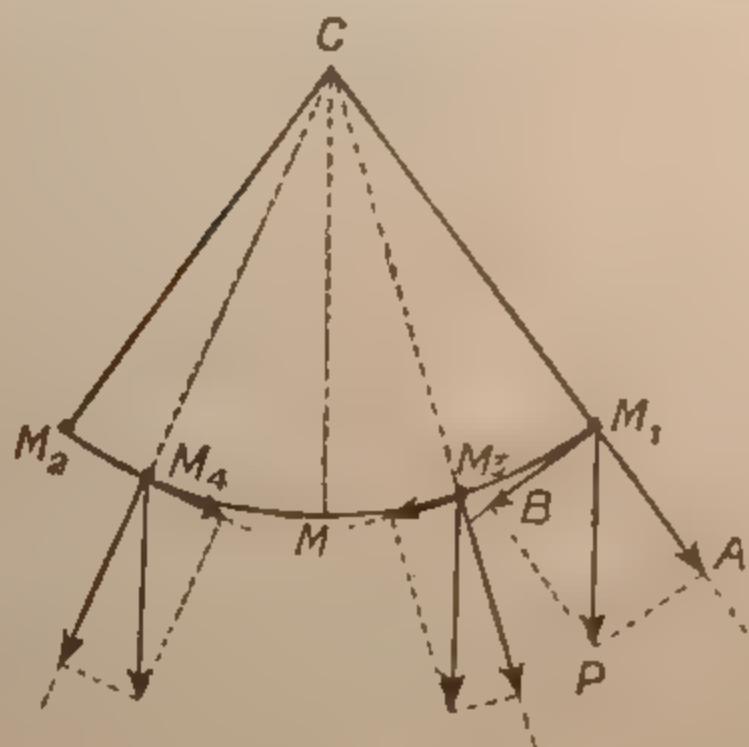



Fig. 193.

Supponiamo l'arco M_1M così piccolo, che si possa considerare rettilineo e coincidente con la tangente M_1B; si può considerare allora MCM_1 come un triangolo rettangolo in M_1. I triangoli MCM_1 e M_1PB sono simili; per essere entrambi rettangoli, ed avere $\widehat{BPM_1} = \widehat{M_1CM}$ perchè hanno i lati paralleli ed entrambi discordi. Quindi si può scrivere la proporzione:

$$M_1B : M_1P = M_1M : CM.$$

Ponendo: $(M_1B) = F$; $(M_1P) = P$; $(M_1M) = x$, $(CM) = l$,
si ha:

1) $F : P = x : l$. Per il 2° princ. della Dinamica (§ 100), le forze sono proporzionali alle accelerazioni; quindi, chiamando a l'accelerazione di M_1 e g quella della gravità, sarà:

2) $F : P = a : g$. Confrontando con la 1) si ricava:

3) $a : g = x : l$, da cui: $a = \frac{g}{l} x$.

Essendo g ed l costanti, e chiamando **spostamento** di M_1 la sua distanza x da M, l'ultima formula dice che:

l'accelerazione di M_1 *è ad ogni istante proporzionale al suo spostamento* x.

Vedemmo (§ 49), che tale era la proprietà caratteristica del *moto armonico*; quindi il moto di M_1, supposta la traiettoria M_1M_2 rettilinea e coincidente col diametro AA_1 della Fig. 47, è un moto armonico. Varranno perciò le leggi allora trovate, e in particolare la 11), che dà il periodo dell'oscillazione completa:

$T = 2\pi \sqrt{\frac{x}{a}}$. Sostituendo in essa il valore di $\frac{x}{a}$ ricavato dalla 3), si ottiene:

4) $$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}};$$

che è la formula che si voleva ricavare.

Dall'identità del moto pendolare col moto armonico, risulta anche manifesto che il punto M_1 si fermerà per tornare indietro, cioè annullerà la sua velocità, allorchè avrà descritto il tratto $MM_2 = M_1M$; cioè allorchè $\widehat{M_1CM} = \widehat{MCM_2}$; il che a principio avevamo solo asserito.

120. Leggi del pendolo. — La 4) è chiamata la *formula del pendolo semplice*; essendo in essa 2π una quantità costante, potremo enunciare le seguenti leggi, dovute a Galileo:

1. Legge dell'isocronismo [1]: *Le piccole oscillazioni sono isocrone.* Cioè, le oscillazioni la cui ampiezza è tanto piccola, che l'arco $\widehat{M_1 M_2}$ si possa confondere con la corda sottesa, (praticamente se l'ampiezza non supera i 4°), si compiono nello stesso tempo anche se di ampiezza diversa. Questa legge nella formula 4) si deduce dal fatto che l'angolo $\widehat{M_1 C M_2}$, cioè il valore dell'ampiezza, non compare nel secondo membro; cioè T è indipendente da tale ampiezza. D'altra parte la 4) è stata dedotta nell'ipotesi che tale angolo fosse piccolissimo.

2. La durata delle oscillazioni è indipendente dalla forma, massa e natura del corpo mobile. Ciò perchè la gravità *nello stesso luogo* agisce egualmente su tutti i corpi (§ 108), e g non varia col variare del punto mobile.

3. La durata delle oscillazioni è direttamente proporzionale alla radice quadrata della lunghezza; cioè per raddoppiare, triplicare, ecc., la durata delle oscillazioni, occorre quadruplicare ($2 = \sqrt{4}$), nonuplicare ($3 = \sqrt{9}$), ecc., la lunghezza del pendolo. Questa legge è esplicita nella 4), che mostra appunto T proporzionale a $\sqrt{l}$.

4. In luoghi diversi la *durata delle oscillazioni* dello stesso pendolo, *è inversamente proporzionale alla radice quadrata della gravità.* Anche questa legge è esplicita nella 4).

5. Il piano d'oscillazione del pendolo è invariabile. Infatti, la forza di gravità che produce il moto del pendolo, agisce verticalmente, cioè nel piano di oscillazione. Perciò su questo piano non agisce alcuna forza per spostarlo, ed esso è invariabile.

121. Verifica sperimentale. — Le leggi precedenti si possono verificare nel modo seguente. Premettiamo che non è possibile in pratica costruire un pendolo semplice, che dobbiamo considerare come una concezione matematica. Ma ricordando che la gravità agisce su un corpo come se esso fosse ridotto al suo centro di gravità, possiamo prendere anzichè un punto materiale una sferetta di metallo, che agisce come se fosse ridotta al suo centro; sospendendola con un filo sottile di seta, di cui possiamo trascurare il peso, e che è sufficientemente flessibile, ci avviciniamo assai alla definizione del pendolo semplice teorico.

Ciò posto, facciamo oscillare un pendolo cosifatto con una data ampiezza, e contiamo, con un contasecondi (§ 21), in quanti secondi si compiono, ad es., 20 oscillazioni; poi contiamo la durata di altre 20 oscillazioni, che si compiano però con ampiezza diversa; nei due casi troveremo la stessa durata. Ciò dimostra la legge dell'isocronismo.

Prendiamo ora dei pendoli C, D, E (Fig. 194) aventi il filo della stessa lunghezza, ma con palline diverse, (ad es. avorio, piombo, ferro, ecc.). Facendoli partire contemporaneamente, si vede che si mantengono sempre

(1) È noto che questa legge è stata scoperta da Galileo, osservando le oscillazioni di un lampadario ancora oggi esistente nel Duomo di Pisa.

nella stessa fase di oscillazione; cioè il periodo è eguale per tutti. Ciò dimostra la 2ª legge.

Prendiamo ora tre pendoli A, B, C, le cui lu[illegible]mente, ad es., *dm* 1-4-9 (Fig. 195); facendoli partire [illegible]ente, vedremo

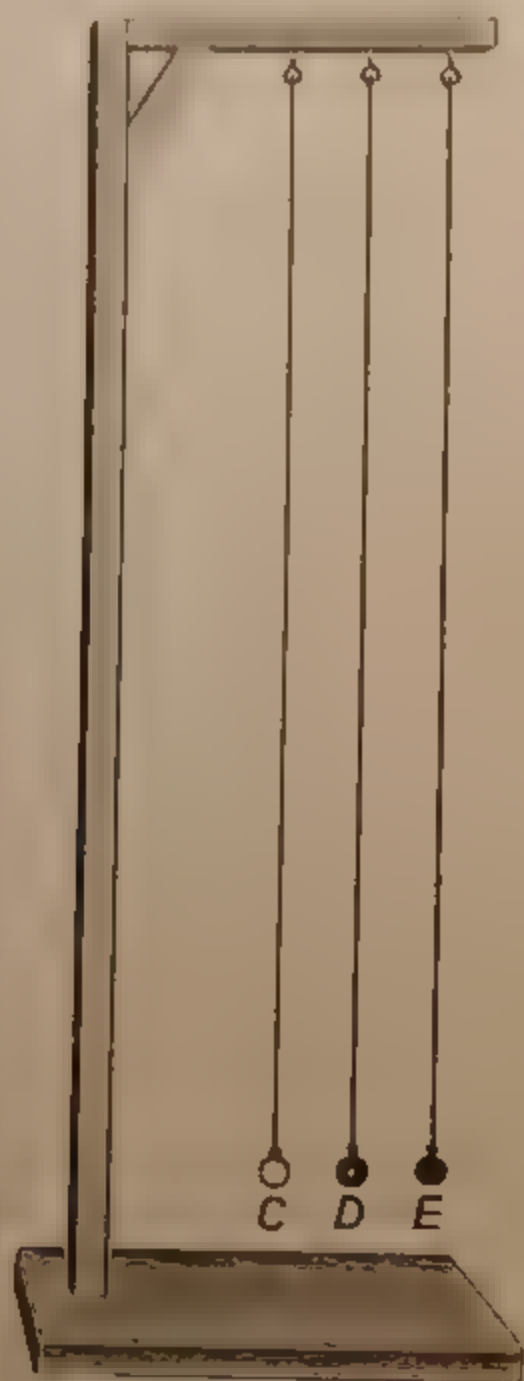



Fig. 194.

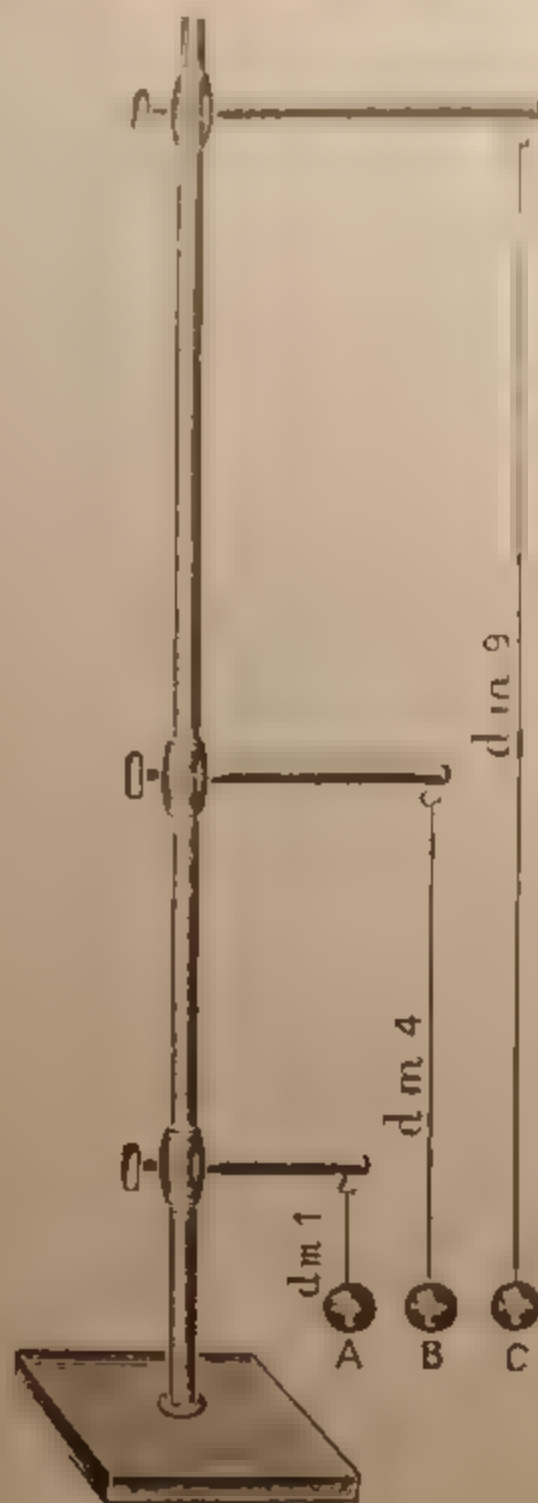



Fig. 195.

Fig. 196.

che nel tempo che B compie una oscillazione, A ne compie 2; e mentre C compie un'oscillazione, A ne fa 3. Ciò dimostra la 3ª legge.

Per verificare la 4ª legge, non potendo far variare la gravità, faremo una esperienza *qualitativa*; cioè faremo vedere l'influenza sulla durata dell'oscillazione, di una forza che attiri il corpo mobile più fortemente verso il basso. Per ciò adoperiamo una pallina di ferro A (Fig. 196) e sospendiamola al di sopra di un'*elettrocalamita* E. Questa, come studieremo in seguito, attira fortemente il ferro, allorchè riceve una corrente elettrica. Ciò posto, se A oscilla quando in E non passa elettricità, cioè quando l'elettrocalamita non esercita attrazione, l'oscillazione avverrà con un dato periodo. Appena in E passa la corrente elettrica, si vedrà la pallina A accelerare assai il suo movimento; perchè oltre che all'azione della gravità è soggetta all'attrazione dell'elettrocalamita.

Fig. 197.

Per la verifica della 5ª legge, applichiamo al perno della macchina della forza centrifuga (§ 116, Fig. 181), un apparecchio costituito da un disco A

(Fig. 19[illegible] [illegible] e sospendiamo un peso in B un pendolo BP [illegible] P [illegible] fermo, e traguardiamo la direzione del p[illegible] di P, rispetto alla parete della stanza in cui sta [illegible] rotazione A e con esso tutto il sostegno soprastante [illegible], rispetto alla stanza, mantiene la stessa direzione di prima. Naturalmente osserveremo una rotazione di tal piano, rispetto al disco A.

122. **Esperienza di Foucault sulla rotazione terrestre.** — Per un pendolo oscillante, sospeso a un sostegno qualsiasi solidale con la terra, il disco A della Fig. 197, è costituito dalla Terra medesima, dotata di un moto di rotazione. Il piano di oscillazione del pendolo rimarrà invariato rispetto allo spazio che contiene la Terra; ma a noi che partecipiamo della rotazione terrestre, sembrerà apparentemente che la Terra sia ferma e che viceversa il piano d'oscillazione del pendolo ruoti rispetto ad essa. Se il pendolo oscillasse al polo, questa rotazione apparente del piano d'oscillazione, sarebbe di un giro in 24 ore; se oscillasse all'equatore, tale rotazione sarebbe nulla; a latitudini intermedie, il piano d'oscillazione ruoterà con velocità intermedie. Così, alla latitudine di 45°, tale velocità sarebbe di circa 10° 36′ all'ora.

L'esperienza fu fatta da Foucault [1] a Parigi, nel 1851. Egli sospese al centro della cupola del Pantheon una grossa sfera di metallo, pesante parecchie decine di *kg*, per mezzo di una funicella lunga *m* 68. Ciò era necessario, perchè una volta lasciato libero il pendolo, continuasse ad oscillare per molte ore, senza essere più toccato. Nell'esperienza eseguita, il Foucault trovò che in 8 ore, il piano di oscillazione aveva rotato apparentemente di circa 90°; cioè il valore assegnato dal calcolo per la latitudine di Parigi.

Questa esperienza costituiva la prova più bella della rotazione terrestre.

123. **Lunghezza del pendolo che batte il secondo.** — Il *pendolo che batte il secondo* è quello la cui oscillazione semplice si compie in un secondo. La durata dell'oscillazione semplice è metà di quella completa; cioè:

$$T = \pi \sqrt{\frac{l}{g}}, \quad \text{che per } T = 1^s \text{ diventa:} \quad 1 = \pi \sqrt{\frac{l}{g}}; \quad \text{da cui:}$$

$$l = \frac{g}{\pi^2}. \tag{5}$$

Per: $g = \text{cm } 980{,}38$ (a Roma); $\pi = 3{,}1416$; risulta:

$$l = \text{cm } \frac{980{,}38}{(3{,}1416)^2} = \text{cm } 99{,}33.$$

124. **Pendolo composto.** — *Pendolo composto è qualunque corpo pesante, che oscilli attorno ad un asse orizzontale.* Qualunque pendolo che possiamo costruire in pratica, come una pallina sospesa ad un filo, il pendolo di un orologio, ecc., è un pendolo composto.

---

(1) Foucault Jean Bernard; n. a Parigi il 1819, m. ivi nel 1868.

Sia in sezione M un corpo qualunque [illegible] ad O [illegible] Il corpo è formato di innumerevoli molecole, [illegible] un pendolo semplice. Se fossero indipendenti l'una dall'altra, ciascuna oscillerebbe attorno ad O con un periodo diverso: più presto le molecole come A, più vicine ad O; più lentamente, quelle più lontane come B. [illegible] tutte le molecole collegate insieme, oscilleranno tutte con lo stesso periodo. Quindi le molecole più vicine ad O dovranno rallentare il loro moto, le più lontane dovranno invece accelerare; tra di esse ve ne saranno di quelle che oscilleranno con lo stesso periodo sia libere che legate alle altre. Tra queste, quella C che si trova sulla retta che congiunge O col centro G di gravità, si chiama **centro di oscillazione** (*che è un punto diverso dal centro di gravità*). Si deduce così che:

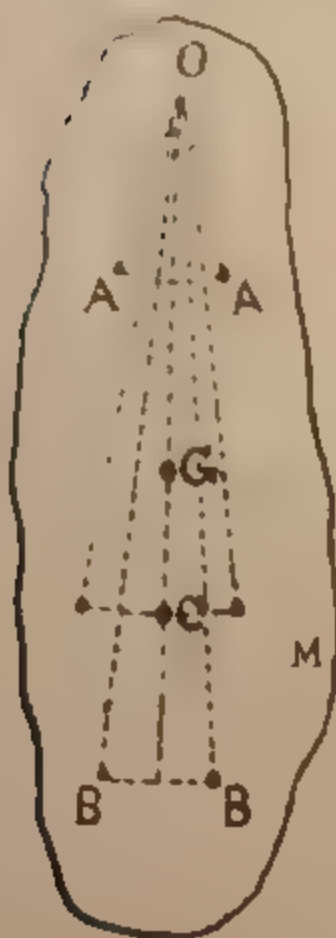



Fig. 198.

Un pendolo composto equivale ad un pendolo semplice, la cui lunghezza è la distanza dal centro di oscillazione all'asse di rotazione.

Si estendono in tal modo al pendolo composto, tutte le leggi del pendolo semplice. Per trovare la posizione del centro di oscillazione, vale la seguente proprietà:

Un pendolo composto oscilla con lo stesso periodo, sia intorno al proprio asse, sia intorno ad un altro asse passante per il centro di oscillazione.

Pertanto, con l'esperienza, per tentativi, si cerca un nuovo asse attorno a cui il pendolo oscilla con lo stesso periodo che attorno ad O; quest'asse passa per il centro di oscillazione.

Concludendo:

Se un corpo può oscillare indifferentemente attorno a due assi tra loro paralleli, con lo stesso periodo, esso equivale ad un pendolo semplice, la cui lunghezza è la distanza tra i due assi.

125. Misura di g; pendolo geodetico. — Un'applicazione del pendolo composto, si ha per la misura dell'accelerazione g della gravità. Questo valore si potrebbe ricavare dalle leggi della caduta dei gravi. Infatti per la 1) del § 108, è:

$$s = \frac{1}{2} g t^2 , \qquad \text{che per } t = 1 \text{ diventa:}$$

$$s_1 = \frac{1}{2} g \quad ; \qquad \text{da cui:} \qquad g = 2 s_1 .$$

Cioè l'accelerazione della gravità è il doppio dello spazio percorso da un grave cadendo, durante il primo minuto secondo.

Ma questo metodo non permette di trovare un valore troppo approssimato; si pensi alla difficoltà di misurare con precisione lo spazio percorso dal grave nel primo minuto secondo, e si pensi all'influenza dell'aria che agisce notevolmente, per la rilevante velocità acquistata dal corpo cadendo.

È assai se [illegible] metodo. si riuscirebbe a calcolare g sino alla 2ª cifra decimale [illegible] il valore con sei cifre decimali.

Il pendolo permette di raggiungere tale approssimazione.

Dalla nota formula del pendolo:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\,, \quad \text{si ottiene elevando a quadrato:}$$

$$T^2 = 4\pi^2\frac{l}{g}\quad ; \quad \text{da cui risolvendo rispetto a } g:$$

$$6) \qquad g = \frac{4\pi^2 l}{T^2}\,.$$

Fig. 199.

Cioè si può ricavare g, misurando la lunghezza l del pendolo e il tempo T in cui si compie l'oscillazione. E poichè l si può misurare fino al millesimo di millimetro, e T fino al centesimo di secondo, e anche meno, e poichè l'influenza dell'aria è risentita meno per la piccola velocità con cui si muove il pendolo, si può ottenere per g un valore assai approssimato.

Per misurare l si ricorre al **pendolo geodetico.** Esso è formato da un regolo di acciaio, su cui sono fissati alle estremità due *coltelli* a e b, come quelli del giogo della bilancia (§ 97), con gli spigoli paralleli, (Fig. 199). Ad un'estremità dell'asta è fissa una massa M a forma di lente, la quale fende più facilmente l'aria e vi incontra meno resistenza. Due altre masse V e W, possono scorrere fra i due coltelli. Il pendolo può oscillare attorno all'uno o all'altro dei coltelli, poggiato su un ripiano di agata portato da apposito sostegno. Si spostano per tentativi le masse V e W finchè il pendolo oscilli esattamente con lo stesso periodo, sia attorno all'asse a, sia attorno all'asse b (capovolgendolo); allora, per la proprietà del § 124, la distanza tra gli spigoli dei due coltelli è la lunghezza l del pendolo, da sostituire nella 6) per il calcolo di g.

126. **Variazione della gravità.** — I valori di g variano con la latitudine da $^m/_s$ 9,7807 all'equatore a $^m/_s$ 9,8315 al polo; a Roma è $g = {}^m/_s$ 9,8038. Su tale variazione, oltre allo schiacciamento della Terra ai poli, ha influenza la forza centrifuga, che contrasta l'azione della gravità, e che varia da un valore massimo all'equatore, a zero al polo.

Sul valore di g hanno influenza anche condizioni locali della conformazione della terra; così, la presenza di una montagna non solo influisce sul valore di g, ma ha anche influenza sulla direzione del filo a piombo; così, p. es., in vicinanza del Chimborazo il filo a piombo è deviato di circa 7′ dalla direzione della verticale.

Infine, nello stesso luogo, secondo gli ultimi risultati della Fisica moderna, la gravità varia leggermente col tempo.

127. Applicazione del pendolo agli orologi. — Per la legge dell'isocronismo, il pendolo è stato applicato a regolare il movimento delle lancette di un orologio, facendo dipendere questo movimento da quello oscillatorio del pendolo.

La prima applicazione fu preconizzata da Galileo; ma fatta praticamente da suo figlio, nel 1649, poco dopo la morte di lui. Il congegno meccanico che collega il rotismo dell'orologio alle oscillazioni del pendolo, si chiama lo **scappamento.**

Il più usato è lo *scappamento ad ancora*; è formato da una ruota dentata R (Fig. 200) mossa da un sistema di ruote ad ingranaggi per azione di una molla o di un peso.

I denti di tale ruota sono inclinati come quelli di una sega, e sono impegnati con le estremità delle due branche di un'*ancora*, collegata al pendolo con una *forchetta*, in modo che le oscillazioni del pendolo si comunicano all'ancora. Questa oscillando, libera alternativamente ora l'una o l'altra estremità dai denti di R, la quale così scatta di un dente ad ogni oscillazione completa del pendolo. Se la ruota di scappamento ha 30 denti, ed il pendolo batte il secondo (§ 123), la ruota compie un giro in 60 secondi; quindi al suo asse può essere calettato senz'altro l'indice dei secondi; il movimento di questo si riduce con ingranaggi e si trasmette agli altri indici dei minuti e delle ore. Perchè le oscillazioni del pendolo non si smorzino in poco tempo, serve la forma inclinata dei denti della ruota di scappamento. Nella rotazione di questa, ciascun dente striscia contro la branca dell'ancora, e le imprime una leggera spinta, che trasmessa al pendolo ne mantiene l'oscillazione. Per regolare la durata delle oscillazioni, e quindi il movimento dell'orologio, occorre variare leggermente la lunghezza del pendolo, alzando o abbassando la massa lenticolare A; ciò si fa avvitando o svitando il dado D. Se l'orologio ritarda, occorre accorciare il pendolo, cioè *avvitare* D (di uno o due giri appena); se l'orologio avanza, occorre invece *svitare* D.

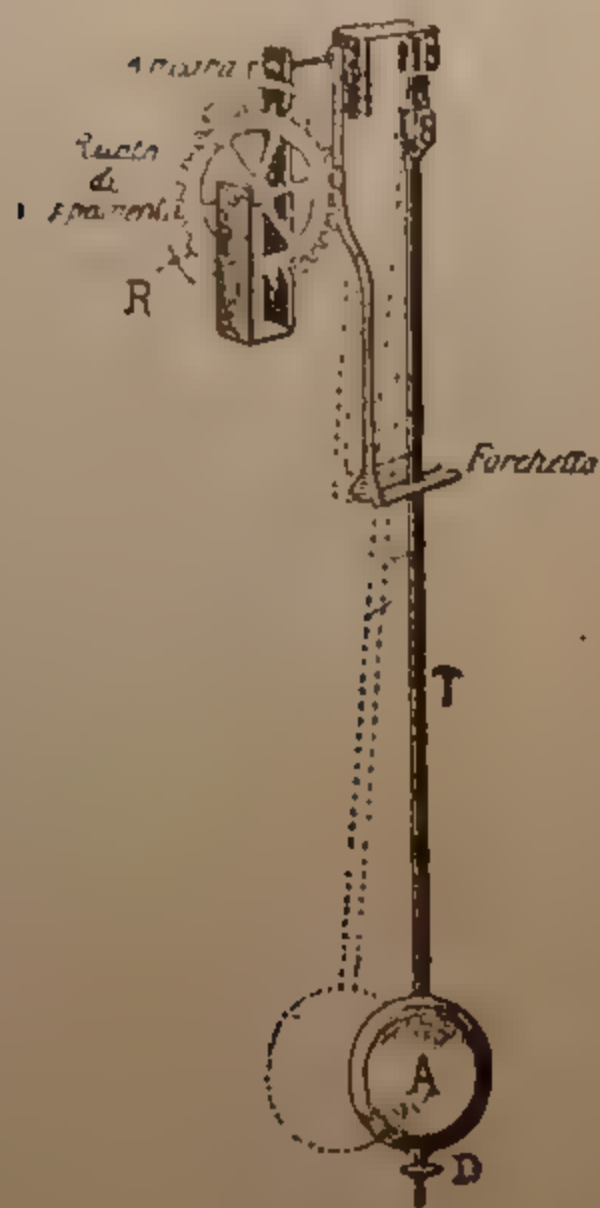



Fig. 200.

Abbiamo visto (§ 16) che i corpi si dilatano col calore; quindi l'asta del pendolo si allunga d'estate, e l'orologio ritarda; si contrae d'inverno e l'orologio avanza. Ad evitare tali variazioni, si costruisce l'asta del pendolo con un metallo detto *invar* (lega di acciaio, nichel, e altri metalli), che si dilata in modo trascurabile col riscaldamento; oppure con legno, anch'esso di dilatazione trascurabile; purchè sia imbevuto di paraffina, per evitare l'influenza dell'umidità, che produrrebbe allungamenti del legno maggiori che per il riscaldamento.

128. Problemi sul pendolo.

a) Problemi risoluti.

1. *[illegible] del pendolo con cui Foucault dimostrò la rotazione terrestre.* (§ 1[illegible])

Ris[illegible] Intendiamo il periodo dell'oscillazione semplice. Quindi la formula d'applicazione è:

$$[illegible]\sqrt{\frac{l}{g}}\ [illegible]\ 3{,}1416;\quad l = \text{m } 68;\quad g = 9{,}8096 \text{ (a Parigi)};\quad \text{quindi:}$$

$$x = \left(3{,}1416\sqrt{\frac{68}{9{,}8096}}\right)^s = 8{,}271^s.$$

2. *Un pendolo, che a livello del mare batte il secondo, è portato sul Monte Bianco (m 4800 sul mare). Di quanto ritarda in 24 ore, supponendo che la sua lunghezza non varii per la diversa temperatura?*

Risoluzione. — Come abbiamo visto al § 123, la lunghezza del pendolo che batte il secondo è: $l = \frac{g}{\pi^2}$. Sul Monte Bianco la gravità assume un valore g' minore che al livello del mare. Vedremo in seguito che per la legge di Newton sull'attrazione universale (§ 181), le forze con cui i corpi si attirano nello spazio, sono inversamente proporzionali ai quadrati delle loro distanze. Poichè per il 2° principio della Dinamica (§ 100) le accelerazioni sono proporzionali alle forze, anche le accelerazioni di gravità saranno inversamente proporzionali ai quadrati delle distanze (tra il corpo e il centro della Terra). Allora, chiamando R il raggio terrestre, g la gravità a livello del mare, g' la gravità sul Monte Bianco, h l'altezza di questo, dev'essere:

$$g' : g = R^2 : (R+h)^2, \qquad \text{da cui:} \qquad g' = \frac{R^2}{(R+h)^2}\,g.$$

Il periodo del pendolo dato, sul Monte Bianco, sarà per la nota formula del pendolo:

$$T = \pi\sqrt{\frac{l}{g'}}, \qquad \text{e sostituendo ad } l \text{ e } g' \text{ i valori calcolati:}$$

$$T = \pi\sqrt{\frac{g(R+h)^2}{\pi^2 R^2 g}} = \frac{R+h}{R}.$$

Ponendo: $R = \text{km } 6370$; $h = \text{m } 4800$; avremo:

$$T = \left(\frac{6374{,}8}{6370}\right)^s = 1{,}000\,75^s.$$ Cioè il pendolo ritarda per ogni oscillazione di:

$$\tau = (T-1)^s = 0{,}000\,75^s \quad \text{ed in 24 ore} = 86\,400^s, \text{ di:}$$

$$t = (0{,}000\,75 \times 86\,400)^s = (64{,}8^s) = 1^m\,5^s.$$

b) Problemi da risolvere.

1. Un pendolo batte esattamente il secondo a Roma, ($g = 980{,}38$); di quanto esso avanza in 24 ore trasportato a Torino, ($g = 980{,}52$)?

2. Calcolare la lunghezza del pendolo, la cui oscillazione si compie in 5^s.

3. In un luogo in cui la gravità è: $g = cm\ 980{,}47$, un pendolo oscilla col periodo di $2^s{,}57$. Qual'è il valore della gravità in un altro luogo, in cui lo stesso pendolo oscilla col periodo di $2^s{,}58$?

4. Il pendolo di un orologio che batteva il secondo, ritarda di 52^s al giorno. Di quanti giri bisogna avvitare il dado che sposta la sua massa pendolare, perchè l'orologio sia esatto, supponendo che il passo della vite sia di *mm* 0,8?

Lavoro ed energia.

129. Lavoro meccanico. — Allorchè una forza sposta il punto a cui è applicata, si dice che *compie un lavoro.* Non vi è dunque lavoro, se non vi è spostamento: una forza in equilibrio, non compie alcun lavoro.

Così, ad es., un manovale, con un carico sulle spalle, se rimane fermo, eserciterà uno sforzo a sostenere il carico, ma non farà alcun lavoro, e non riceverà alcun compenso. Il lavoro sarà compiuto se trasporterà quel carico ad una certa altezza; egli riceverà allora una paga: in proporzione del carico che avrà trasportato, cioè della forza impiegata, e in proporzione dell'altezza a cui lo trasporta, cioè dello spostamento prodotto. Il lavoro viene dunque computato dal prodotto del carico per l'altezza a cui si porta.

Chiamasi appunto lavoro meccanico o semplicemente lavoro di una forza costante, il prodotto dell'intensità della forza per la lunghezza dello spostamento, *se la forza agisce nella direzione dello spostamento.* Cioè:

$$L = Fs \tag{1}$$

nella quale L è il lavoro, F l'intensità della forza, s lo spostamento.

Supponiamo ora che la forza non agisca nella direzione dello spostamento. Sia, p. es., un cavallo che tiri una barca lungo un canale, per mezzo di una corda, dalla riva. Sia r (Fig. 201) la direzione della forza, e b quella del canale; rappresentiamo con O la barca, con OF la forza impiegata dal cavallo, con OS lo spostamento della barca. Allora, lungo OS non agisce integralmente la forza OF. Scomponiamo (§ 62) questa forza in due: una OH in direzione del canale; l'altra OM in direzione a questo perpendicolare. L'effetto della componente OM è annullato dall'azione del timone, che mantiene la barca nel centro del canale; OM quindi non compie lavoro. Questo è compiuto integralmente dalla componente OH, e per la 1) sarà misurato da:

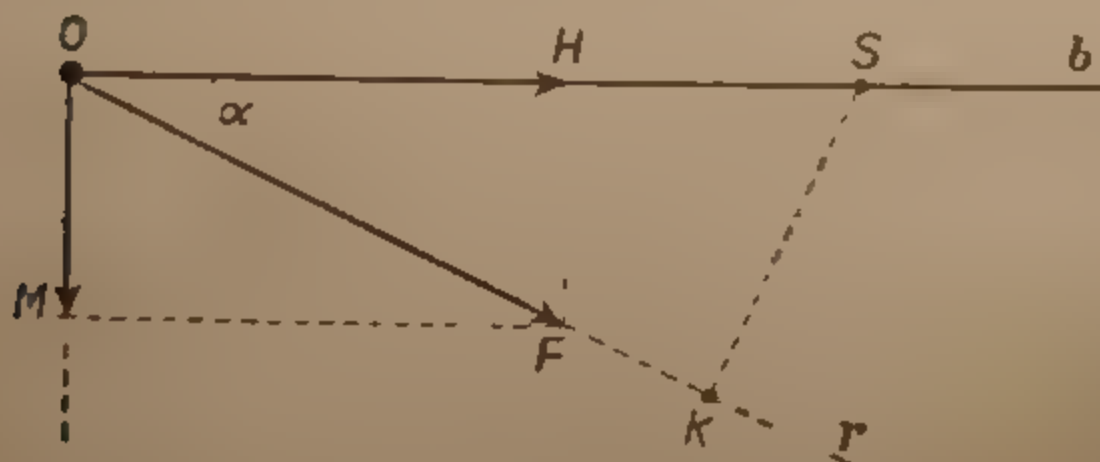



Fig. 201.

$$L' = (OH) \times (OS). \tag{2}$$

Ma OH è geometricamente la proiezione del segmento OF sulla retta b, quindi se forza e spostamento non hanno egual direzione:

Il lavoro di una forza costante, è uguale al prodotto della lunghezza dello spostamento, per la misura della proiezione del segmento che rappresenta la forza, nella direzione dello spostamento.

Se la forza è perpendicolare alla direzione dello spostamento, la proiezione della forza nella direzione dello spostamento è nulla, ed è quindi anche nullo il lavoro da essa compiuto; cioè:

Il lavoro di una forza in direzione ad essa perpendicolare, è nullo.

[illegible] ... OK [illegible] proiezione dello spostamento OS nella direzione della forza.

[illegible] rettangoli, ed hanno l'angolo α in comune; quindi sussiste la proporzione:

$(OF):(OH) = (OS):(OK)$; cioè, risolvendo;

$(OF)\times(OK) = (OH)\times(OS)$. Sostituendo nella 2) si ottiene:

3) $L' = (OF)\times(OK)$. Cioè:

Il lavoro di una forza costante è uguale al prodotto dell'intensità della forza per la misura della proiezione dello spostamento nella direzione della forza.

Chiamando α l'angolo $\widehat{HOF}$, si sa dalla Trigonometria che:

$(OH) = (OF)\cos\alpha$; quindi si può anche scrivere:

4) $L' = Fs\cos\alpha$; di cui la 1) è il caso particolare per $\alpha = 0$.

130. **Rappresentazione grafica del lavoro.** — In un sistema di assi ortogonali, prendiamo come ascisse le lunghezze degli spostamenti (o delle loro proiezioni nella direzione della forza), e come ordinate le intensità della forza nei varî punti dello spostamento. Sia $s = (OA_n)$ lo spostamento (o la sua proiezione), (Fig. 202); se la forza F è costante, essa sarà rappresentata nei varî punti di OA_n,

Fig. 202.

dalle ordinate eguali: $(OF) = (A_1F_1) = (A_2F_2) = \ldots = (A_nF_n)$. Il luogo dei punti estremi $F, F_1, \ldots F_n$ di tali ordinate, è il segmento FF_n, parallelo ad OA_n. La figura OFF_nA_n è un rettangolo, la cui area è:

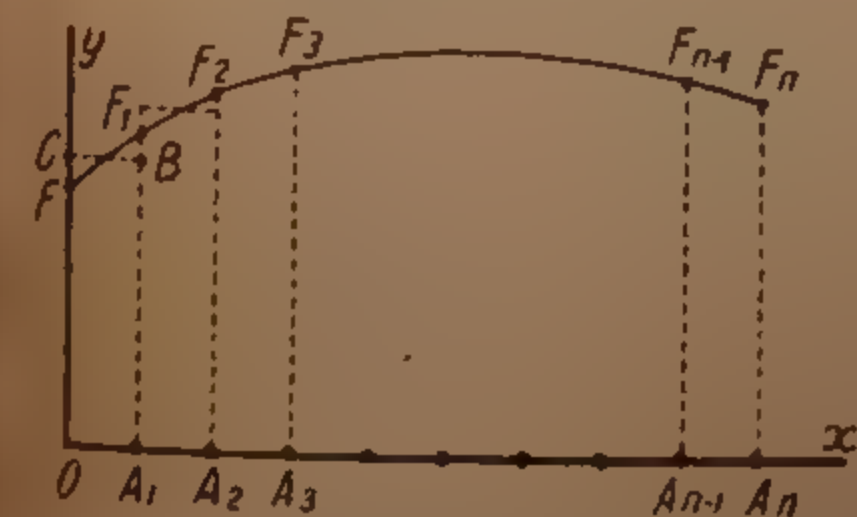
$S = (OF)\times(OA_n) = Fs$; cioè è uguale al lavoro della forza F. Quindi, in ogni caso si ha:

il lavoro di una forza costante è uguale all'area del rettangolo, che ha per dimensioni: l'intensità della forza e la proiezione dello spostamento nella direzione della forza.

Sia ora $s = (OA_n)$ lo spostamento (o la misura della sua proiezione nella direzione della forza), e lungo di esso agisca una forza di intensità variabile. Dividiamo l'intervallo OA_n in n intervalli elementari eguali:

Fig. 203.

$$(OA_1) = (A_1A_2) = \ldots = (A_{n-1}A_n) = \frac{n}{s},$$

(Fig. 203); e prendiamo n così grande che ciascun intervallo elementare sia tanto piccolo quanto si vuole. Consideriamo i segmenti OF, A_1F_1, A_2F_2, ... A_nF_n, che rappresentano le intensità $F, F_1, F_2 \ldots F_n$ della forza agli estremi di tali intervalli; uniamo con una spezzata $FF_1F_2 \ldots F_n$ gli estremi superiori di questi segmenti. Avendo preso gl'intervalli elementari piccolissimi, saranno pure piccolissimi i lati di tale spezzata; tanto da poter ritenere la spezzata coincidente con la curva FF_n, che è il *diagramma della forza assegnata.*

Il lavoro L_1 nell'intervallo OA_1, essendo piccolissima la variazione della forza in tale intervallo, si può [illegible] come [illegible] da una [illegible] d'intensità eguale alla media $\frac{F+F_1}{2}$ dei valori [illegible], esso è misurato dall'area del rettangolo OC [illegible] per dimensioni $(OA_1) = \frac{s}{n}$ ed $(OC) = \frac{F+F_1}{2}$; tale rettangolo è equivalente al trapezio OFF_1A_1 e scriveremo:

$L_1 = (OFF_1A_1) = \frac{F+F_1}{2} \cdot \frac{s}{n}$; parimenti, chiamando $L_2, L_3, \ldots L_n$ i lavori compiuti negli intervalli elementari successivi, avremo:

$$L_2 = (A_1 F_1 F_2 A_2) = \frac{F_1 + F_2}{2} \cdot \frac{s}{n}$$

$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$

$$L_n = (A_{n-1} F_{n-1} F_n A_n) = \frac{F_{n-1} + F_n}{2} \cdot \frac{s}{n}.$$

Il lavoro totale L sarà la somma di tutti questi lavori elementari, cioè:

$$L = L_1 + L_2 + \ldots + L_n = \text{area } (OFF_nA_n); \quad \text{quindi:}$$

il lavoro compiuto da una forza variabile è misurato dall'area della figura che ha per contorno: la proiezione dello spostamento, i segmenti delle ordinate che dànno i valori delle forze agli estremi dello spostamento e il diagramma della forza.

Si ha anche:

$$L = L_1 + L_2 + \ldots + L_n = \frac{F + F_1}{2} \cdot \frac{s}{n} + \frac{F_1 + F_2}{2} \cdot \frac{s}{n} + \ldots + \frac{F_{n-1} + F_n}{2} \cdot \frac{s}{n}$$

o anche:

$$L = s \cdot \frac{F + 2F_1 + 2F_2 + \ldots + 2F_{n-1} + F_n}{2n}.$$

La frazione di quest'espressione si chiama la **forza media nell'intervallo dato** OA_n; essa coincide con la media aritmetica dei valori della forza agli estremi degli intervalli elementari OA_1, $A_1A_2, \ldots$, solo se i valori estremi F ed F_n sono eguali; in ogni caso si calcola col calcolo integrale. Indicando con F_0 la forza media, l'ultima eguaglianza si può scrivere:

3) $$L = F_0 s$$ che coincide con la 1).

La formula 1) è in conclusione applicabile in ogni caso per il calcolo del lavoro, e la regola relativa del § 129 si può adoperare in ogni caso, quando s'intenda che F esprima l'intensità della forza media nell'intervallo ed s la lunghezza della proiezione dello spostamento nella direzione della forza.

131. Unità di lavoro: *Erg; joule; chilogrammetro.* — Dalla 1) si ricava che: $L = 1$, allorchè: $F = 1$ ed $s = 1$; cioè:

L'unità assoluta di lavoro è quello eseguito da una dine (§ 103) *per lo spostamento di un centimetro;* si chiama *erg:*

3) $$1\ erg = 1\ dine \times 1\ cm.$$

Essendo l'*erg* troppo piccolo, si usa più spesso quale unità pratica il *joule*, che equivale a 10 milioni di *erg:*

4) $$1\ joule = 10^7\ erg.$$

Industr[illegible] quale unità di lavoro il *chilogrammetro* (kgm.), *che è il lav*[illegible] *per innalzare 1* kg *all'altezza di 1 metro:*

5) $\quad 1\ kgm = 1\ kg \times 1\ m.$

Poichè: $\quad 1\ kg = 1000\ g$ e (§ 103): $\quad 1\ g = 980\ dine,$

sarà: $\quad 1\ kgm = (1000 \times 980)\ dine \times 100\ cm.$ cioè:

6) $\quad 1\ kgm = 98\,000\,000\ erg = 9{,}8\ joule.$

Si noti bene che il lavoro è indipendente dal tempo in cui si compie: per sollevare un sacchetto di frumento dal pavimento su un tavolo, il lavoro eseguito è lo stesso, sia che si sollevi tutto quanto d'un colpo in un secondo, sia che si sollevi un granello alla volta in una giornata.

Esempi: 1. *Per sollevare 2 q. all'altezza di 15 m,* occorre il lavoro di:

$$L = \text{kg } 200 \times \text{m } 15 = \text{kgm } 3000.$$

2. *Se in una cascata d'acqua cadono 5* m³ *d'acqua, dall'altezza di* m *50,* si compie un lavoro di:

$$L = \text{kg } 5000 \times \text{m } 50 = \text{kgm } 250000.$$

132. Lavoro compiuto dalla gravità.

Il lavoro compiuto da un grave di peso P lungo la verticale, cadendo da A a C (Fig. 204) per l'altezza di h metri, è:

$$L = P\,.\,h.$$

Fig. 204.

Lo stesso grave, scendendo lungo un piano inclinato AB, percorrendone la lunghezza l, compie il lavoro:

$$L' = F\,.\,l$$

nella quale F è la forza che trascina il grave sul piano. Essendo per la 2) del § 93:

$$F = P\,\frac{h}{l},$$ sostituendo si ottiene:

$$L' = P\,\frac{h}{l}\,l = P\,h = L;$$ quindi:

Il lavoro compiuto da un grave per scendere da un punto A ad un piano orizzontale sottostante, è lo stesso sia che segua la verticale, sia che percorra un'obliqua qualsiasi.

Si può generalizzare se la linea percorsa è una spezzata. Si ha infatti (Fig. 205):

$$L_{AF} = L_{AD} \qquad L_{FH} = L_{DE} \qquad L_{HB} = L_{EC};$$

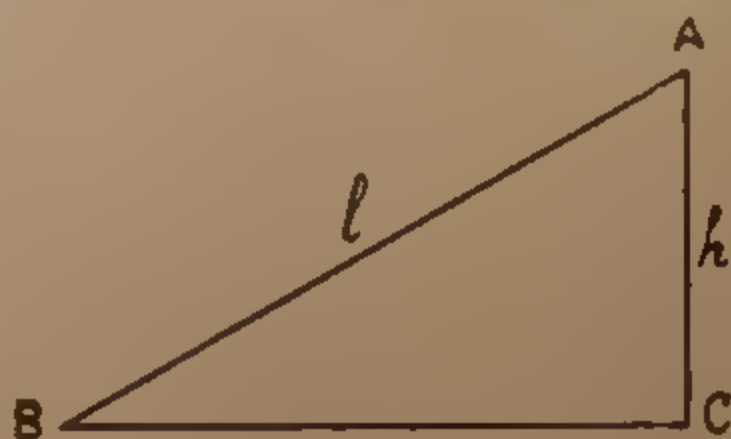
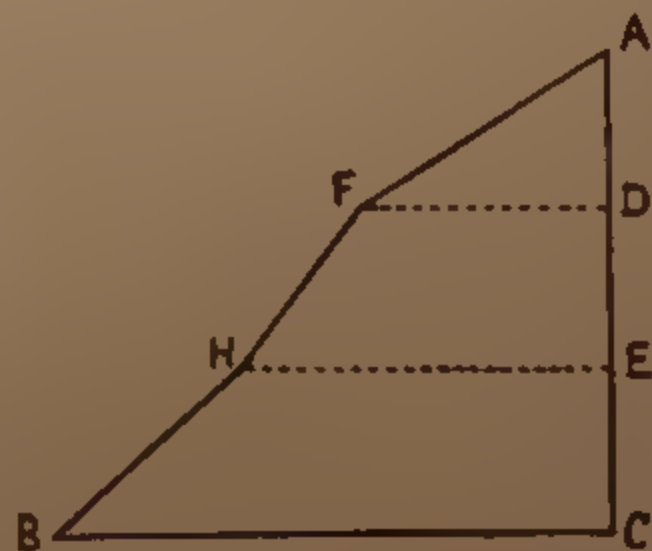
da cui, sommando membro a membro:

$$L_{AB} = L_{AC} = P\,.\,h.$$

Fig. 205.

Se invece di una spezzata il corpo segue una curva, poichè questa si può considerare come una spezzata i cui lati siano infinitamente piccoli, si ha in conclusione:

Il lavoro compiuto da un grave, scendendo da un punto qualsiasi di un piano orizzontale ad un altro punto qualsiasi di un altro piano orizzontale, è indipen-

dente dalla linea percorsa tra le due p[illegible] *eguale a lavoro compiuto dallo stesso grave, cadendo* [illegible] *verticale compreso fra i due piani.*

133. Principio delle velocità virtuali. — Nella Statica studiammo le macchine in quiete e vedemmo la relazione fra la potenza e la resistenza, per raggiungere l'equilibrio. Se invece la macchina è in moto, tanto la potenza che la resistenza si spostano e quindi compiono lavoro. Quello compiuto dalla potenza si chiama **lavoro motore**; e quello compiuto dalla resistenza, **lavoro resistente.**

Ora, in ogni macchina in moto (uniforme) si può verificare che: **il lavoro motore è uguale al lavoro resistente.** Così, ad es., nella puleggia mobile la potenza è metà della resistenza (§ 90); ma se si vuole alzare di 1 metro la resistenza, bisogna tirare 2 metri di fune; cioè lo spazio percorso dalla potenza è doppio di quello della resistenza, e quindi il lavoro della potenza eguaglia quello della resistenza.

Parimenti nell'asse della ruota (§ 92), ad ogni giro della macchina, la potenza P si sposta della circonferenza $2\pi r_1$ della ruota, e la resistenza R si sposta della circonferenza $2\pi r_2$ dell'asse; i lavori motore e resistente sono perciò:
$$L_P = P \cdot 2\pi r_1 \qquad L_R = R \cdot 2\pi r_2 .$$

Ora, per la condizione di equilibrio in questa macchina è, § 92:

$P : R = r_2 : r_1$ cioè risolvendo la proporzione:

$P \cdot r_1 = R \cdot r_2$ e moltiplicando ambo i membri per 2π;

$$P \cdot 2\pi r_1 = R \cdot 2\pi r_2; \qquad \text{cioè:} \qquad L_P = L_R .$$

Analogamente si potrebbe verificare il principio in qualunque altra macchina. Esso si chiama il **principio delle velocità virtuali**, che volgarmente si suole enunciare: *Ciò che si guadagna in forza si perde in velocità.* Difatti lo spostamento della potenza e quello della resistenza devono avvenire nello stesso tempo; se la potenza è minore della resistenza, viceversa, nello stesso tempo, la potenza deve compiere uno spostamento maggiore, e quindi deve muoversi con maggiore velocità.

134. Equilibrio dinamico. — Se è soddisfatto il principio delle velocità virtuali, la macchina si muove con moto uniforme. Si dice allora che si è raggiunto l'**equilibrio dinamico**, cioè l'equilibrio nel movimento; a differenza dell'**equilibrio statico**, studiato nella Statica, allorchè le forze erano in quiete.

Nella pratica, comunque un corpo si muova, deve vincere degli attriti, o la resistenza del mezzo in cui si muove, che si considerano come forze opposte al moto, cioè come forze che compiono anch'esse un lavoro. Per l'equilibrio occorrerà pertanto, che:

Il lavoro motore L_m sia eguale al lavoro resistente L_u (o lavoro utile) più il lavoro degli attriti L_p (o lavoro passivo):

$$L_m = L_u + L_p . \qquad (7)$$

Questo principio mostra l'assurdità del **moto perpetuo**, cioè un moto continuato indefinitamente, senza intervento di forze esterne. Infatti fornendo inizialmente alla macchina un dato lavoro motore per metterla in moto, non si potrà ricavarne integralmente altrettanto lavoro utile, dovendo

una parte del lavoro spendersi per vincere gli attriti; il lavoro utile ricavato [illegible] la macchina deve necessariamente rallentare sino a fermarsi.

135. **Rendimento.** — Si chiama rendimento *di una macchina, il rapporto tra il lavoro utile e quello motore:*

$$\varrho = \frac{L_u}{L_m}. \qquad 8)$$

Teoricamente, in una macchina senza attriti, cioè se $L_u = L_m$, il rendimento sarebbe l'unità: $\varrho = 1$. Praticamente il rendimento è una frazione propria; si riduce questa frazione in numero decimale, e si dirà, p. es.:

Rendimento = 0,80 oppure = 80%, che vuol dire che del lavoro impiegato dalla macchina, i $^4/_5$ sono utilizzati come lavoro utile e $^1/_5$ è perduto per vincere gli attriti.

Industrialmente una macchina è tanto più pregevole quanto più alto è il suo rendimento; occorre perciò nello studio di una macchina progettare i vari organi di essa in modo da rendere più piccole che si può le perdite per gli attriti e le altre resistenze passive.

136. **L'attrito.** — Se vogliamo smuovere un corpo pesante, p. es., un tavolo, trascinandolo sul pavimento, sappiamo che si deve impiegare un certo sforzo; perchè c'è *qualche cosa*, un qualche ostacolo, che si oppone al movimento di esso. Questo ostacolo si chiama la **resistenza d'attrito**; che dobbiamo perciò considerare come una forza nella stessa direzione del moto, ma in verso contrario ad esso.

L'attrito è tanto maggiore, quanto più ruvide sono le superfici di contatto del corpo mobile e di quello su cui si muove; sappiamo che la fatica con cui si pulisce un oggetto con la carta vetrata o smerigliata, aumenta col crescere del numero della carta. Viceversa comprendiamo facilmente che se potessimo avere superfici perfettamente levigate, l'attrito si ridurrebbe quasi a zero. Ciò non potrà avvenire mai nella pratica; ma sappiamo che se s'incontra rilevante difficoltà a trascinare un sacco pieno su un selciato, riesce molto più agevole muoverlo su un pavimento di legno, e sarebbe ancor più facile trascinarlo sul ghiaccio. Si pensi quanto sia agevole correre con le *slitte* sul ghiaccio, e che magnifiche volate si riesce a fare coi *pattini*.

Distinguiamo diverse forme di attrito:

L'attrito radente è quello di un solido che striscia su di un altro corpo fisso, appoggiandosi sempre sulla stessa superficie di contatto. Tale è, ad es., l'attrito di una slitta sul terreno, dello stantuffo entro il cilindro di una pompa, ecc. Esso:

1. È proporzionale alla forza con cui si premono, perpendicolarmente, le superfici di contatto; ordinariamente tale forza è il peso del corpo.

Cioè, a parità delle altre condizioni, per trascinare un sacco pieno del peso di *kg* 100, occorre una forza doppia che a trascinarne uno pesante *kg* 50.

2. Ha lo stesso valore qualunque sia l'estensione della superficie di contatto, purchè essa non si riduca ad una punta o ad un taglio.

Così, se vogliamo trascinare un grosso mattone su un tavolo, è la stessa la forza occorrente, sia che si appoggi sul tavolo per una faccia, sia di fianco.

3. *È [illegible] ...nte il movimento; ma [illegible] ...mpo.* Per questa ragione occorre uno [illegible] lo sviamento di un corpo che per mantenerlo, occorre [illegible] *attrito di primo distacco*, che è da 1,5 a 2 volte il valore dell[illegible] [illegible] seguito. Vediamo infatti giornalmente, nella vita pratica, [illegible] cavallo deve fare uno sforzo più grande puntando i piedi e buscandosi qualche frustata, allorchè deve smuovere il carro da fermo; mentre occorrerà uno sforzo minore in seguito allorchè il carro è già in moto.

4. *Dipende dalla natura dei corpi in contatto, ed è maggiore fra due corpi della stessa sostanza.* Perciò adoperiamo i *lubrificanti* per diminuire l'attrito. Negli orologi si ricorre ai *rubini* perforati, quali cuscinetti dei perni; diminuiscono l'attrito e durano di più.

L'attrito volvente è quello di un corpo rotondo che rotola su un altro corpo, cambiando ad ogni istante la superficie di contatto. Tale, ad es., è l'attrito della ruota di un carro sulla strada, di una palla sul bigliardo, ecc. Esso:

1. *È proporzionale alla forza con cui la ruota preme sul corpo su cui si muove.* Anche ora, ordinariamente, tale forza è il peso sostenuto dalla ruota;

2. *È inversamente proporzionale al raggio della ruota.* Così, un cavallo trascinerà un dato carico su un carro tanto più agevolmente, quanto maggiore è il diametro delle ruote; per questo i carri da trasporto di carichi hanno le ruote grandi.

L'attrito volvente è sempre minore di quello radente; quindi nella pratica, se si vuol trasportare un corpo, si cerca sempre di sostituire il rotolamento allo strisciamento. Così, per trasportare una macchina da un punto all'altro sul pavimento, è utile farla scorrere su dei rulli (Fig. 152, § 92).

L'attrito misto è quello in parte radente e in parte volvente; come, ad es., **l'attrito dei perni.**

L'attrito dei perni cresce anch'esso in proporzione del carico sostenuto dal perno; aumenta anche col crescere del diametro del perno e col numero dei giri da esso compiuto. Conviene quindi ridurre il diametro del perno al minimo compatibile con la resistenza al carico che deve sopportare; perciò è assai importante la scelta del materiale impiegato a costruirlo. Si diminuisce l'attrito dei perni, sostituendo a quelli comuni i *cuscinetti a sfere* (Fig. 206), cambiando così in massima parte l'attrito radente in attrito volvente, assai minore.

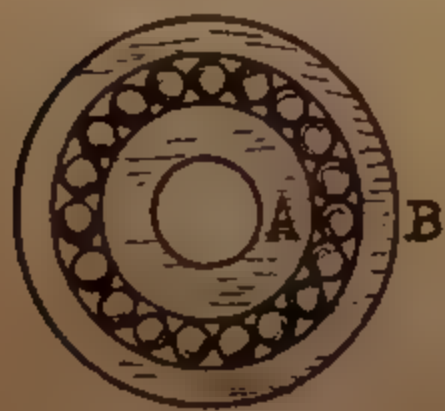



Fig. 206.

Si chiama **coefficiente d'attrito** il rapporto tra la forza d'attrito, e la forza premente; esso varia da 0,07 (metallo su metallo con lubrificante) a 0,40 (pietra su legno), a secondo dei corpi in contatto.

Teoricamente non occorrerebbe alcuna forza (§ 93) e non si dovrebbe perciò impiegare alcun lavoro, per spostare un grave su un piano orizzontale. Praticamente occorre una forza, per vincere gli attriti. La forza occorrente per trascinare un grave su di un carro in una strada ordinaria orizzontale, è di *kg* 35 per tonnellata di peso; mentre sulle rotaie della strada ferrata è circa la decima parte; da ciò la convenienza dei trasporti per ferrovia.

1[illegible]. **Resistenza del mezzo.** Si chiama **resistenza del mezzo** quella oppos[illegible] al moto di un solido. Le leggi che regolano [illegible] sono piuttosto complesse, e non del tutto note [illegible] i cui punti si muovano [illegible] si adotta ancora come sufficientemente approssimata la *formula di Newton:*

$$R = K S V^2 d; \qquad 9)$$

la quale esprime che la resistenza R del mezzo è:

1. *Direttamente proporzionale alla superficie S della lamina.*

2. *Direttamente proporzionale al quadrato della sua velocità V.* Questa legge vale per velocità non troppo grandi, cioè di qualche metro al secondo. Per velocità grandi, come quelle dei proiettili, la resistenza cresce più rapidamente, proporzionalmente al cubo e a potenze anche maggiori della velocità.

3. *Direttamente proporzionale alla densità* d *del fluido;* così a pari dimensioni e velocità una lamina moventesi nell'acqua, incontra una resistenza circa 800 volte maggiore che nell'aria. Tutti infatti abbiamo notato come sia difficile correre nell'acqua.

Il coefficiente di proporzionalità K si chiama il **coefficiente di resistenza,** ed esprime la resistenza incontrata da una superficie piana di 1 m^2 di area, che si muova con la velocità di 1 m al secondo. Esso, per l'aria, è stato misurato in varî modi con l'esperienza; per velocità comprese fra 15 e 40 m al secondo, è stato trovato all'incirca:

$$K = \text{kg } 0{,}07;$$

cioè circa 85 grammi per metro quadrato.

Esempio. *Una lamina piana, di forma quadrata, di* m 2 *di lato* ($S = 4$ m²) *moventesi in direzione perpendicolare al suo piano, nell'aria, con la velocità* $V =$ m *20 al* s, *incontra la resistenza di:* $R = \text{kg } (0{,}085 \times 4 \times 20^2) = \text{kg } 136$.

Se il piano è inclinato, la resistenza del mezzo non dipende solamente dall'inclinazione del piano rispetto alla direzione del moto; ma anche dal suo profilo e posizione. Così, a pari superficie e inclinazione, la resistenza è diversa se il corpo ha la forma di un triangolo, un rettangolo, un cerchio, ecc.; e la resistenza incontrata da un corpo rettangolare, è maggiore quando esso si muove con il lato minore avanti.

La resistenza del mezzo varia anche con la forma della superficie; così una coppa incontra una resistenza assai minore, allorchè presenta nel verso del moto la parte convessa, anzichè la concava; come è noto, è più facile spingere avanti a sè un ombrello aperto contro vento, che trascinarselo, sempre aperto, dietro le spalle. Per il computo di questa resistenza si applica ancora la formula 9) di Newton; mettendo per il coefficiente di resistenza K un valore diverso, a secondo della forma della superficie, e determinato caso per caso con l'esperienza; e per S l'area della superficie della sezione massima del corpo, con un piano perpendicolare alla direzione del moto. Così, per un corpo di forma sferica, si è trovato:

$$K = 0{,}015.$$

La superficie che presenta la minore resistenza è quella di un solido di rotazione, che abbia per sezione il profilo della Fig. 207; cioè affusolato, ma dissimetrico, con la parte più rigonfia più vicina alla parte anteriore

rispetto al moto

Fig. 207.

Questa è la forma che presentano in natura i pesci e gli uccelli, e quella che si dà ai dirigibili, ai siluri, ecc. Si comprende parimenti la forma di un *treno-Zeppelin* (Fig. 208), esperimentato recentemente in Germania, e che raggiunse la velocità di 230 *km* all'ora! Alla stessa forma si avvicina, quanto si può, il profilo delle moderne vetture automobili, che perciò si chiamano *aerodinamiche*.

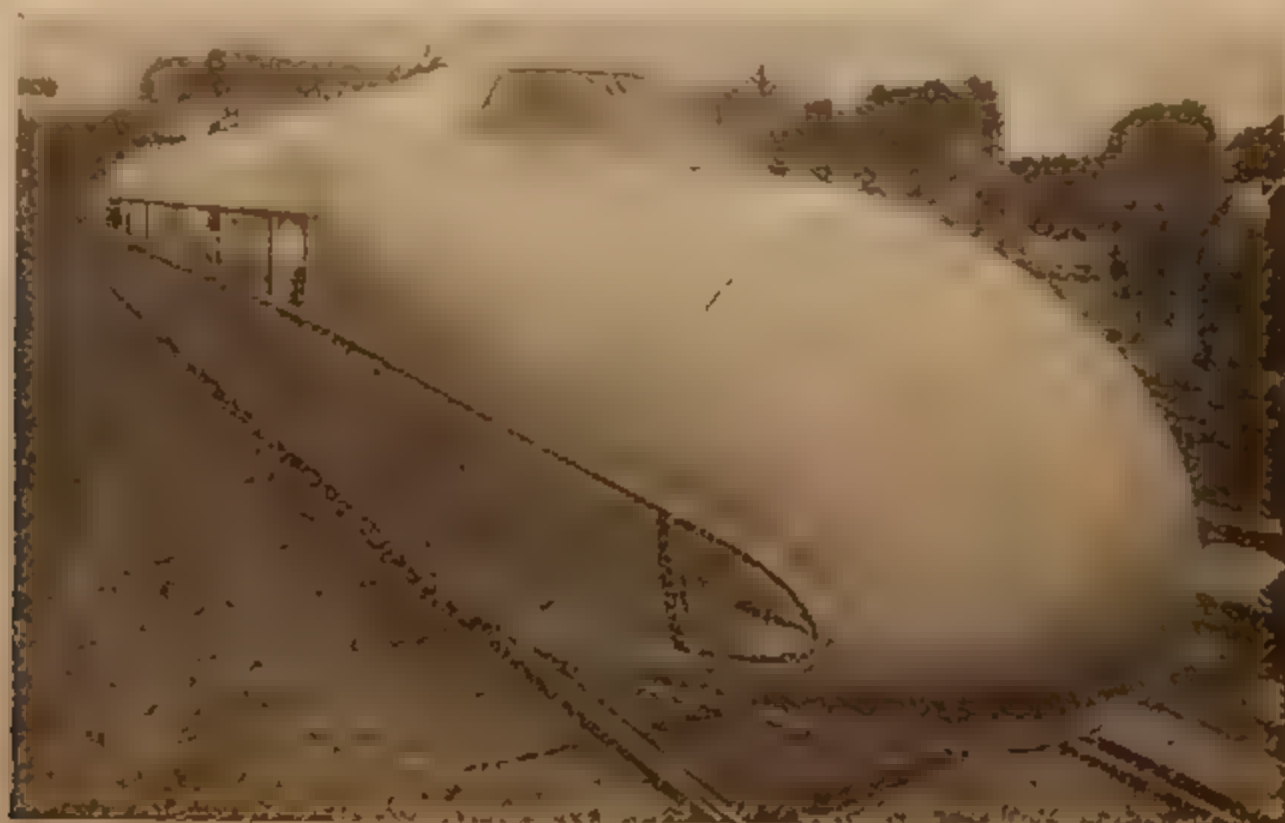



Fig. 208.

138. **Paracadute.** — Per la resistenza dell'aria, la caduta di un corpo in natura non avviene con moto naturalmente accelerato (§ 108): da principio il moto sarà accelerato; ma crescendo la velocità, cresce rapidamente la resistenza dell'aria, fino ad eguagliare il peso del corpo; a partire da questo istante, è raggiunto l'equilibrio dinamico (§ 134) ed il moto diventa uniforme; cioè la velocità si mantiene costante. La resistenza dell'aria impedisce quindi ad un corpo che cade, di acquistare velocità eccessive; un chicco di grandine arriva a terra con la velocità di circa *m* 15 al secondo. Se non vi fosse l'aria, da 500 *m* d'altezza esso arriverebbe a terra con la velocità di *m* 100 al secondo, cioè paragonabile a quella di un proiettile, e si può immaginare quanto sarebbe disastrosa una grandinata: abbiamo accennato a § 108, che perfino la pioggia sarebbe micidiale!

Fig. 209.

Aumentando la superficie del corpo, si può rendere la resistenza dell'aria così grande, da ridurre a valore piccolo la velocità assunta dal corpo che cade. Ciò è l'ufficio del paracadute, che è un grande disco di tela, che si apre a guisa di ombrello (Fig. 209) e

sosten[illegible] [illegible] di scendere da grandi altezza senza tanto [illegible] adoperano paracadute così grandi, da permet[illegible] di tutta [illegible], e ben equipaggiati di munizioni, viveri, ecc.

Diminuendo [illegible] di un corpo, aumenta la superficie di esso in proporzione [illegible] volume e perciò del suo peso; cioè i corpi piccolissimi incontrano [illegible] resistenza a muoversi nell'aria che i corpi grandi; quindi essi cadranno lentissimamente. Ciò spiega come possa rimanere sospeso il pulviscolo dell'aria, pur essendo formato di detriti minutissimi di corpi solidi, e dà la ragione per cui le piccolissime goccioline di acqua *liquida* formanti le nubi, restino sollevate nell'atmosfera, sostenute dalle correnti aeree ascendenti.

139. **Forza viva.** — In un corpo in moto, si chiama **forza viva il semiprodotto della massa del corpo per il quadrato della sua velocità** [1]:

$$E = \frac{1}{2} m v^2. \qquad 10)$$

Supponiamo che su un corpo di massa m e che si muova per inerzia con velocità (costante) v, si applichi una forza costante F in senso opposto al moto; questo diventerà uniformemente ritardato (§ 104), ed il corpo ad un certo momento si fermerà. Sia ciò dopo aver percorso uno spazio s; la forza F per fermare il corpo, avrà prodotto un lavoro $F.s$ (§ 129). Ora per la 3) del § 103 è:

$$F s = m a s. \qquad 11)$$

Essendo il moto uniformemente ritardato, con velocità iniziale v, il corpo si fermerà dopo il tempo t per il quale la velocità è ridotta a zero. Cioè (§ 33 - 1ª delle 12): $v - at = 0$, da cui: $t = \frac{v}{a}$; ed avrà percorso lo spazio (§ 33 - 2ª delle 13): $s = vt - \frac{1}{2} a t^2$; cioè per $t = \frac{v}{a}$:

$$s = v \frac{v}{a} - \frac{1}{2} a \frac{v^2}{a^2} = \frac{v^2}{2a};$$ e sostituendo nella 11):

$$F s = m a \frac{v^2}{2a} = \frac{1}{2} m v^2; \qquad 12)$$ cioè:

In un corpo in moto la forza viva misura il lavoro che quel corpo può compiere fermandosi.

Inversamente è manifesto che: affinchè un corpo in quiete, di massa m, acquisti una velocità v, occorre impiegare un lavoro eguale alla forza viva $\frac{1}{2} m v^2$ acquistata.

Per la misura della forza viva si osservi che:

Se m è espresso in g e v in $^{cm}/_{s}$, E risulta in *erg*;
» » » » *kg* » » » $^{m}/_{s}$, » » » *joule*.

Ricordando inoltre la 6) del § 131, si ha anche:

$$E = \frac{m v^2}{2 \times 9{,}81} \; kgm, \qquad 13)$$

se m è espresso in kg e v in $^{m}/_{s}$.

---

(1) Si noti la definizione puramente *algebrica* di forza viva. Il nome di forza viva non è proprio; infatti essa non è una forza, ma un lavoro.

Es. Un proiettile da cannone che pesa 200 kg ha la velocità di 700 m al secondo.

Si ha: $m = \frac{200}{g}$; e perciò [illegible]

[illegible]

Si spiega con la forza viva [illegible] un chiodo, lo si spinga nel legno, mentre non [illegible] del martello sul chiodo; al momento dell'urto il martello [illegible] accumulato per metterlo in moto, eguale alla sua forza viva, ed [illegible] in quell'istante una forza di parecchie centinaia di chilogrammi.

140. Misura delle forze dalla forza viva. — Abbiamo visto nel § 105, come le forze si potevano misurare, secondo Cartesio, dalle quantità di moto da esse impresse al medesimo corpo.

Dalla 12) ora ricaviamo che per $s = 1$ è: $F = \frac{1}{2} m v^2$; cioè una forza si può misurare dalla forza viva che essa ha impresso ad un corpo, dopo averlo spostato per 1 cm. Questa *misura è secondo Leibnitz.*

Queste misure evidentemente non coincidono, perchè la quantità di moto non è uguale alla forza viva. Tale divergenza diede origine ad una lunga polemica tra i filosofi del secolo XVII. Ma la divergenza è solo apparente, perchè con le quantità di moto si confrontano forze che agiscono per lo stesso tempo, mentre con le forze vive si confrontano forze che agiscono per lo stesso spazio; è ovvio che nei due casi i risultati devono essere differenti.

141. Teorema delle forze vive.

Siano v e v_1 i valori delle velocità di un corpo in moto, di massa m, in due punti A e B della sua traiettoria; sia s lo spazio percorso nel passaggio da A a B, sotto l'azione di una forza costante F. Il lavoro compiuto da questa forza è per la 1) del § 129:

14) $L = Fs$. Ma abbiamo visto (§ 139) che il lavoro compiuto dalla forza, per portare il corpo dall'inizio del moto sino ad A è:

$$L_1 = \frac{1}{2} m v^2, \quad \text{e quello dall'inizio a } B \text{ è:} \quad L_2 = \frac{1}{2} m v_1^2;$$

quindi il lavoro occorrente per portare il corpo da A a B, è la differenza tra tali lavori:

$$L_2 - L_1 = \frac{1}{2} m v_1^2 - \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m (v_1^2 - v^2),$$

che esprime la variazione della forza viva nell'intervallo AB. Tale lavoro è manifestamente eguale ad L della 14); quindi:

$$\frac{1}{2} m (v_1^2 - v^2) = Fs. \quad \text{Questo risultato si enuncia così:}$$

La variazione della forza viva in un dato intervallo, è uguale al lavoro della forza in detto intervallo.

Si noti che può essere $v_1 \gtrless v$. Se $v_1 > v$, cioè il corpo aumenta la velocità passando da A a B, è $v_1^2 - v^2 > 0$; la variazione della forza viva e quindi il lavoro nell'inter-

vallo, sono pos[illegible], perchè la forza F in tal caso produce lavoro, per aumentare la velocità del corpo

Se v_1 [illegible] 0, la variazione della forza viva, e quindi il lavoro nell'intervallo, sono negativi: anche questo è chiaro, perchè in tal caso la forza contrasta il moto ed assorbe, anzichè produrre lavoro, a spese della forza viva del corpo.

Se finalmente $v_1 - v = 0$, cioè $v_1^2 = v^2$, la variazione della forza viva è nulla, e quindi è anche $L = 0$; il corpo si muove per legge d'inerzia, senza intervento di alcuna forza, e mantiene inalterato il valore della sua forza viva.

Quindi possiamo completare l'enunciato precedente, dicendo che:

la variazione della forza viva in un dato intervallo, è sempre uguale in grandezza e segno, al lavoro della forza in detto intervallo.

Questo teorema si generalizza ancora e si dimostra, nella Meccanica superiore, anche nel caso di forze variabili, agenti su uno o più corpi; va sotto il nome di **Teorema delle forze vive**, e si enuncia così:

La variazione della forza viva è uguale alla somma algebrica dei lavori delle forze, agenti mentre ha luogo la detta variazione.

142. **Variazione della forza viva nelle macchine in moto.** — Il teorema delle forze vive si applica anche ad una macchina in moto. Se nella macchina si è raggiunto l'equilibrio dinamico (§ 134), cioè la velocità della macchina è costante, è pure costante la sua forza viva. Perciò la somma algebrica dei lavori delle forze agenti nella macchina è nulla. I lavori delle forze agenti sulla macchina sono: il lavoro motore L_m, che è positivo; il lavoro resistente L_u, ed il lavoro passivo L_p, che sono negativi. Quindi dev'essere:

$$L_m - L_u - L_p = 0\,, \qquad \text{o anche:} \qquad L_m = L_u + L_p\,;$$

come avevamo già trovato con la 7) del § 134.

Se invece: $L_m > L_u + L_p$, la variazione della forza viva è positiva, e la velocità della macchina aumenta. Il moto è accelerato, e la velocità dovrebbe crescere continuamente col tempo, fino a raggiungere valori grandissimi a piacere. Ma ciò in pratica non avviene; perchè crescendo la velocità aumentano gli attriti, e cresce anche L_p; fino a raggiungere un valore L'_p tale che:

$L_m = L_u + L'_p$; cioè si raggiunge un nuovo equilibrio dinamico, con velocità maggiore di quella di prima.

Se infine: $L_m < L_u + L_p$, la variazione della forza viva è negativa, e la velocità della macchina diminuisce. Il moto è ritardato, e la velocità dovrebbe dapprima annullarsi e poi cambiare di segno; cioè la macchina rallenterebbe fino a fermarsi un istante e poi muoversi in senso opposto con moto accelerato, finchè il lavoro passivo raggiunga un valore L'_p tale che: $L_u = L_m + L'_p$, scambiandosi il lavoro resistente col lavoro utile e viceversa. Ma in pratica spesso avviene che, diminuendo la velocità, diminuiscano gli attriti e diminuisca L_p di quanto basta per raggiungere un valore L''_p tale che: $L_m = L_u + L''_p$, e si raggiunge ancora un equilibrio dinamico, con velocità minore di quella di prima.

143. Forza viva nel moto rotatori ... oni precedenti valgono nel caso che il corpo in mo ... insieme di punti che si muovono tutti con la stessa velo ... di traslazione.

Studiamo ora il caso di un corpo in rotazi ... di un corpo girevole attorno ad un centro O (Fig. 210), alla distanza r_1 dal centro di rotazione; sia v_1 la velocità tangenziale (§ 47) di M_1 ed m_1 la sua massa. La forza viva di M_1 è:

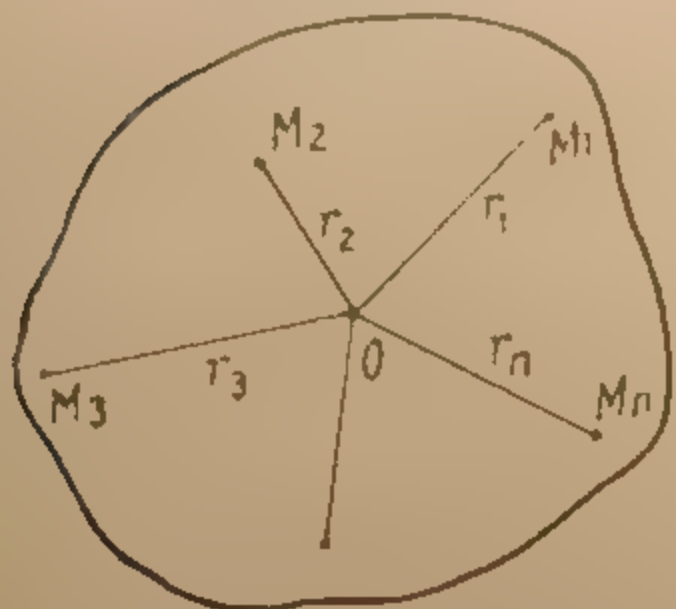



Fig. 210.

$$E_1 = \frac{m_1 v_1^2}{2}.$$

Se ω è la velocità angolare del corpo, si ha, (§ 47 - 5):

$$v_1 = \omega r_1;$$

quindi sostituendo:

$$E_1 = \frac{m_1 \omega^2 r_1^2}{2};$$

parimenti la forza viva di tutti gli altri punti $M_2 \ldots . M_n$ del corpo, essendo ω eguale per tutti, sarà:

$$E_2 = \frac{m_2 \omega^2 r_2^2}{2}, \quad \ldots\ldots, \quad E_n = \frac{m_n \omega^2 r_n^2}{2}.$$

La forza viva E totale del corpo, sarà la somma delle forze vive di tutti i suoi punti; cioè:

$$E = E_1 + E_2 + \ldots + E_n = \frac{\omega^2}{2}(m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + \ldots + m_n r_n^2).$$

L'espressione tra parentesi si chiama il **momento d'inerzia** del corpo, rispetto al centro O; si indica con μ. Sostituendo nell'eguaglianza precedente si ha:

$$15) \qquad E = \frac{1}{2}\mu\omega^2,$$

che misura la forza viva del corpo rotante.

Tale forza viva ha dunque un'espressione analoga a quella (§ 139 - 10) delle traslazioni; quando alla massa del corpo si sostituisca il suo momento di inerzia, ed alla velocità tangenziale la velocità angolare.

Anche ora la 15) misura il lavoro che compie una forza F applicata al corpo, per farlo passare dalla quiete alla rotazione con la velocità ω. Considerazioni analoghe alle precedenti, ci farebbero trovare che: la quantità di moto impresso dalla forza F nel tempo t, sarebbe eguale a $\mu\omega$; cioè:

16) $\quad Ft = \mu\omega$; con una formula analoga alla 4) del § 105. Inoltre sarebbe facile estendere i risultati al caso della rotazione attorno ad un asse anzichè attorno ad un punto.

Il momento d'inerzia, essendo uguale ad una somma con un numero infinito di termini, non può determinarsi che col calcolo integrale.

144. Giroscopio. — Supponiamo di avere un corpo girevole attorno ad un asse; i punti di esso sono soggetti ciascuno ad una forza centrifuga (§ 115). Non è detto che tutte queste forze centrifughe siano in equilibrio; anzi in generale ciò non avviene. Esse ammettono una risultante, che agisce su un punto dell'asse, e questo è sollecitato a muoversi; o se è sostenuto, a flettersi sotto l'azione di tale risultante.

Ma se [illegible] che [illegible] attorno il suo asse di simm[illegible] il corpo non [illegible], i suoi punti possono dividersi a coppie, ciascuna formata da due punti simmetrici rispetto all'asse, che perciò risentono forze centrifughe di eguale intensità, ma contrarie. Tutte le forze centrifughe si fanno allora equilibrio e la loro risultante è nulla. Sull'asse non agisce quindi alcuna forza atta a spostarlo, ed *esso mantiene invariabile la sua posizione nello spazio.* Un tale asse si chiama **asse permanente di rotazione.** Non solamente ogni asse di simmetria è un asse permanente; ma si dimostra nella Meccanica superiore, che qualunque corpo, anche irregolare, ha almeno tre assi permanenti di rotazione. Nella sfera qualunque diametro è un asse permanente.

Fig. 211.

La verifica sperimentale si può fare per mezzo del **giroscopio di Bohnenberger.** Esso è costituito da una sfera di metallo S (Fig. 211), che può ruotare attorno ad un perno AB, sostenuto tra due punte da un anello M; questo a sua volta può ruotare attorno ad un asse CD perpendicolare ad AB, sostenuto da un altro anello N; e questo finalmente può ruotare attorno ad un asse EF perpendicolare ai primi due. In questa maniera si può, girando uno o l'altro degli anelli M ed N, fare in modo che l'asse AB della sfera possa assumere nello spazio una direzione qualsiasi a piacere. Avvolgiamo sul perno AB, da una parte, uno spago, e tiriamolo con forza; la sfera si mette a girare rapidamente. Orbene, afferriamo l'apparecchio per il suo sostegno inferiore e muoviamolo in tutti i sensi, trasportiamolo, capovolgiamolo, incliniamolo come si vuole; finchè la sfera gira, l'asse di questa si manterrà costantemente nella stessa direzione nello spazio. V'è di più; se si vuole spostare la direzione dell'asse con una forza esterna, l'apparecchio oppone una certa inerzia a tale spostamento; questo si compie perciò solo se la forza ha un valore rilevante e tanto più grande quanto maggiore è la forza viva del corpo rotante.

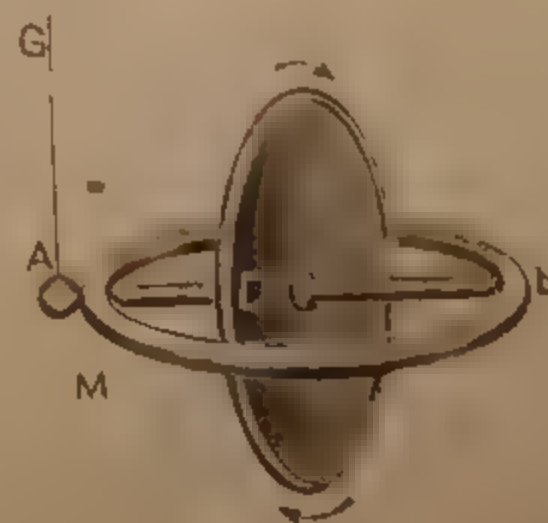



Fig. 212.

Così, ad es., si prenda un disco di metallo D (Fig. 212), che possa farsi rotare, come nell'esperienza precedente, attorno ad un asse AB, sostenuto da un anello M. Il sistema può sorreggersi per mezzo di un filo verticale GA, legato ad un punto A dell'anello. Se il disco è fermo, il sistema per la gravità si dispone in modo che il suo baricentro sia sul prolungamento di GA (§ 85). Se ora facciamo girare rapidamente il disco, e lo disponiamo con l'asse AB orizzontale, come in figura, vedremo che, lasciato libero sostenendolo solo col filo GA, *il sistema si mantiene con l'asse orizzontale*, malgrado l'azione della gravità.

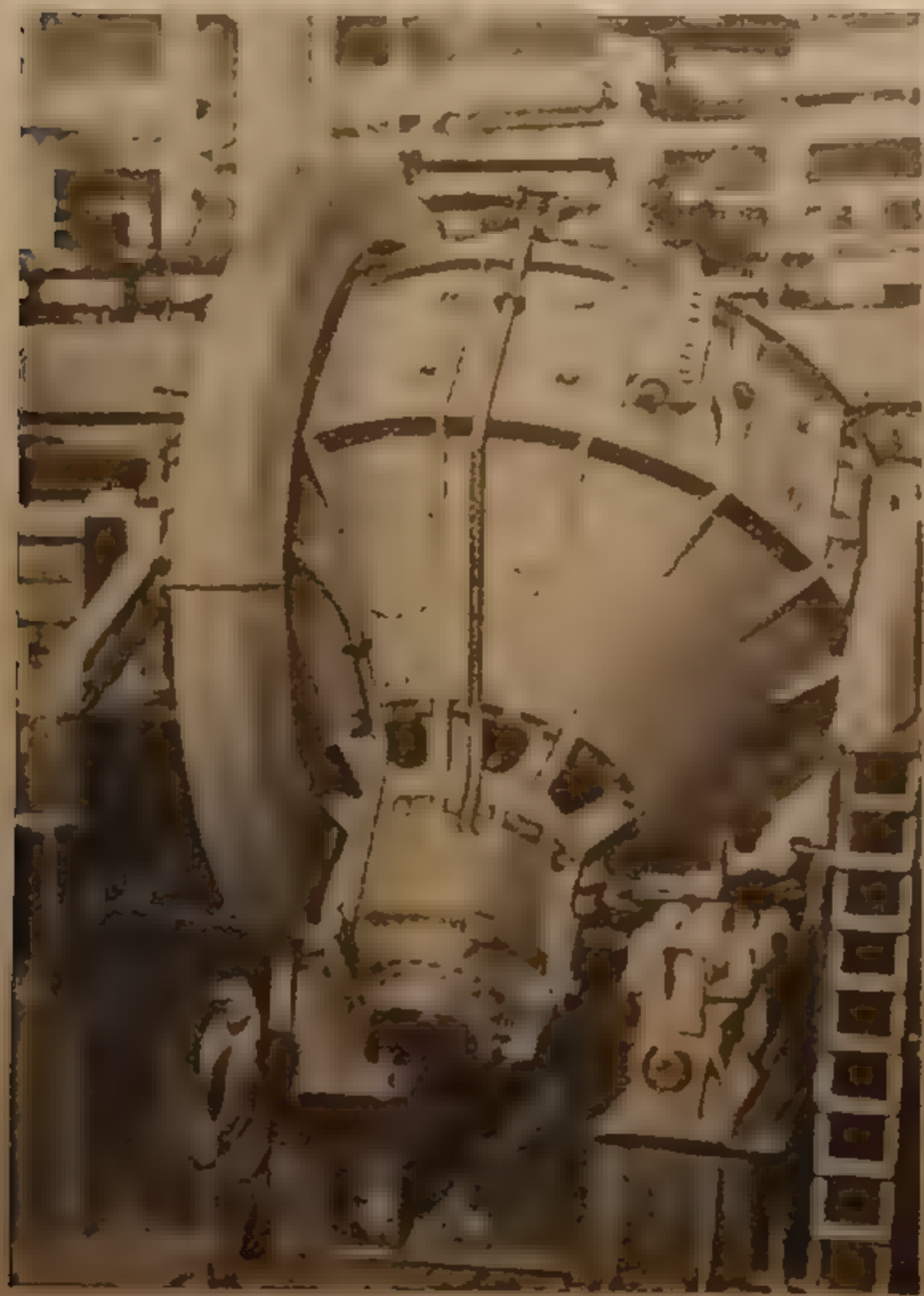
Questi fatti, come è noto, han riscontro nella pratica; si sa che è difficile stare in equilibrio con [illegible] mentre è facilissimo, se la bicicletta è in corsa. Parimenti occorre uno sforzo tanto più grande sul volante, per [illegible] ruota, quanto più velocemente esso marcia. Una trottola, ferma, non può stare sulla punta; vi rimane invece agevolmente quando gira.

115. **Applicazioni del giroscopio.** — Questa proprietà importante del giroscopio è stata applicata in molti casi, allorchè si vuole mantenere una direzione invariabile nello spazio. Così, ad es., un giroscopio è disposto nell'interno del siluro, perchè esso non devii dalla rotta assegnatagli quando è lanciato.

Fig. 213.

I proiettili delle armi da fuoco ricevono un rapidissimo moto rotatorio, per mezzo della rigatura elicoidale della canna; con ciò il loro asse si mantiene nella direzione del tiro e questo acquista una grande precisione.

Si costruiscono **bussole giroscopiche**, che indicano costantemente una direzione stabilita, p. es., quella del nord, comunque si muova il veicolo che la porta; si applicano specialmente agli aeroplani che volano nelle regioni polari, ove (come vedremo nel *Magnetismo*), le bussole magnetiche non possono funzionare.

Grandi giroscopi servono anche a stabilizzare la rotta di un bastimento, evitandone i fastidiosi movimenti di rullio e di beccheggio. La Fig. 213 mostra uno dei tre colossali stabilizzatori giroscopici *Sperry*, applicati nel *Conte di Savoia*, una delle più grandi e più veloci navi mercantili del mondo, che l'Italia possiede e che le altre nazioni ci invidiano. Ognuno consiste in un grosso volàno, del diametro di *m* 10 e del peso di 100 tonnellate, che per mezzo di un motore elettrico da 500 *Cv* può girare con la velocità di 750 giri al minuto. Questi giroscopi stabilizzatori vanno applicandosi anche alle navi da guerra, ove il movimento della nave nuoce al puntamento dei cannoni.

146. **Energia.** — Vi sono dei casi in cui un corpo non compie lavoro; ma [illegible] in condizione di farlo. Ad es., una [illegible] non lo compierà [illegible] il corpo possiede *energia*; e se la [illegible] più precisamente [illegible]

L'energia [illegible] *che un corpo è capace di compiere.*

Vi sono diverse forme di energia. Quella posseduta da un corpo in moto si chiama energia di moto, o cinetica, o attuale, ed è misurata dalla sua forza viva; quella di un corpo in quiete si chiama **energia potenziale** e può essere di posizione (come l'energia di una pietra sul tetto, dovuta all'essere più alta della terra), di forma (come l'energia di una molla da orologio, dovuta alla forma da essa assunta avvolgendola nella carica), ecc. Fra le varie energie dobbiamo considerare: l'*energia calorifica*, poichè col calore si produce movimento, come nella macchina a vapore; l'*energia elettrica*, poichè con l'elettricità si può far girare un motore elettrico; l'*energia chimica*, qual'è, ad es., quella dovuta all'esplosione della dinamite; l'*energia sonora; l'energia luminosa;* ecc.

147. **Principio della conservazione dell'energia.** — L'energia può trasformarsi da potenziale in attuale e viceversa; sia direttamente, sia con l'intervento di una macchina. Così, ad es., con l'energia meccanica (la forza di un motore) si può generare l'elettricità (per mezzo di una dinamo o di un alternatore), e viceversa con l'elettricità si produce energia di moto (come nei motori elettrici); col calore si può produrre energia meccanica (con le macchine termiche) e viceversa il calore può essere generato col movimento, vincendo un attrito, o con la corrente elettrica (riscaldamento elettrico); l'energia elettrica si trasforma in luminosa (illuminazione elettrica), e viceversa (con la cellula fotoelettrica; Vol. 3° - § 60); ecc.

Ma se in un sistema di corpi non si toglie nè si aggiunge energia dall'esterno, (un tal sistema si chiama **conservativo**), l'energia di esso può trasformarsi, ma non può nè aumentare nè diminuire; cioè:

In un sistema conservativo la somma totale dell'energia attuale e di quella potenziale, è una quantità costante.

Questo principio per il quale **l'energia nè si crea nè si distrugge**, è una delle maggiori affermazioni stabilite dalla scienza nel secolo scorso; ed insieme all'altro principio della indistruttibilità della materia, costituisce uno dei cardini fondamentali delle scienze naturali, e forse la più grande conquista dello spirito umano [1].

L'universo è certamente un sistema conservativo, poichè all'infuori di esso non agisce forza alcuna; quindi:

La somma dell'energia dell'universo è costante.

148. **Degradazione dell'energia - Moto perpetuo.** — La trasformazione di una forma di energia in un'altra può avvenire spontaneamente, senza intervento di macchine; in tal caso la prima energia è più atta ad essere utilizzata, e si dice che è *di grado più elevato* della seconda. Nelle

(1) Secondo i concetti recentissimi della Fisica moderna, in condizioni speciali, sarebbe possibile la trasformazione dell'energia in materia, e viceversa. Vedremo meglio in Elettrologia (Vol. 3° - § 75), come dovremo intendere questo principio.

trasformazioni di energia si passa perciò [illegible] di grado superiore a quelle inferiori, cioè [illegible]. La forma di energia di grado più elevato è quella di [illegible]mente in qualunque delle altre forme; vedremo [illegible] forma di energia dell'universo, compresa la vita [illegible] il movimento delle ultime particelle dei corpi (atomi ed elettroni [illegible]. L'energia di grado inferiore è il calore, perchè in qualunque trasformazione di energia *si produce sempre calore.*

Dal principio della conservazione dell'energia scaturisce meglio l'impossibilità del **moto perpetuo** (§ 131); cioè di una macchina che generi da sè la forza capace di mantenere il movimento stesso e che perciò si muova e produca lavoro indefinitamente, senza bisogno di energie esterne, e quindi senza consumo e spesa. Un tal problema è uno di quelli che più appassionano le persone, che pur avendo qualche nozione di meccanica e non essendo prive di ingegno, mancano però di un corredo razionale di studi. Esse credono di raggiungere lo scopo con congegni atti a trasformare una forza in altra di maggiore intensità; creando con ciò una confusione tra forza e lavoro, nella quale spesso è la causa dell'errore in cui cadono. Da quanto si è detto avanti appare facilmente come il moto perpetuo sia un'utopia irraggiungibile. Se una macchina potesse muoversi senza resistenze passive, essa conserverebbe indefinitamente il suo moto per inerzia, e il moto perpetuo sarebbe realizzabile. Ma poichè in pratica è impossibile eliminare gli attriti, è inevitabile che una parte dell'energia cinetica della macchina si trasformi in energia potenziale (in calore) nel vincere questi attriti; e questa energia non può più trasformarsi nuovamente in moto, e deve perciò considerarsi come perduta. L'energia cinetica della macchina deve pertanto necessariamente e continuamente diminuire, e dopo qualche tempo annullarsi; cioè la macchina dovrà dopo un certo tempo fermarsi.

149. Volàno. — Un esempio utile di trasformazione di energia, è quello del **volàno.** Si chiama così una specie di grossa ruota di ghisa, che si monta sull'albero motore di qualunque macchina rotante, allo scopo di impedirne le brusche variazioni di velocità e quindi regolarizzarne il moto.

Infatti, se diminuiscono le resistenze da vincere, la macchina tende ad accelerare il suo movimento (§ 142); ma il volàno non permette un brusco aumento di velocità; esigendo un certo tempo, per l'inerzia della sua massa, per accrescere la sua velocità. Con l'aumento graduale della velocità, il volàno aumenta la sua forza viva, cioè l'energia di moto; *esso quindi immagazzina energia.* Se poco dopo aumentano d'un colpo le resistenze da vincere il che provocherebbe un brusco rallentamento della macchina, il volàno non può istantaneamente frenarsi; per inerzia tende a conservare la sua velocità e rallenta gradatamente il suo moto; con ciò può superare l'aumento di resistenza a spese della sua forza viva, cioè restituendo l'energia che prima aveva accumulata.

Ricordando (§ 143) che la forza viva nel moto rotatorio è misurata dal momento d'inerzia, e questo dipende, a parità di massa, specialmente dal raggio su cui essa è distribuita, conviene nella pratica costruire il volàno a forma di ruota, in modo che la maggior parte della sua massa formi la fascia periferica, ove appunto il raggio ha il massimo valore.

150. **Pot**[illegible] il lavoro è indipendente dal tempo; ma [illegible] motore, [illegible] diremo che è tanto più *potente*, quanto m[illegible] per un dato lavoro. Chiamasi potenza (da non [illegible] potenza delle macchine, definita nel § 89) *il lavoro compiuto nell'unità di tempo:*

$$W = \frac{L}{T}; \tag{17}$$

nella quale W indica la potenza, L il lavoro, e T il tempo.

Unità assoluta *di potenza è un erg per secondo*, e non ha nome.

Unità pratica *è un* joule *per secondo*, e si chiama **Watt**:

$$1 \text{ watt} = 1 \text{ joule per secondo.}$$

Industrialmente si adopera come unità il **cavallo-vapore** o semplicemente **cavallo** (HP o meglio Cv), *che equivale al lavoro di 75* kgm *per minuto secondo* [1].

Non si creda che il nome di *cavallo* indichi che si tratti del lavoro equivalente a quello prodotto da un cavallo (animale). Intanto non si può fare un confronto esatto; perchè un cavallo può eseguire un lavoro assai variabile, secondo la razza, l'età, lo stato di salute e il tempo per cui lavora. Si valuta grossolanamente che un motore di 1 Cv può eseguire tanto lavoro quanto 2 cavalli, o quanto 7 uomini, che lavorino continuamente.

Il motore di un automobile ha la potenza di qualche decina di Cv; quello di un treno di parecchie centinaia; quello di un grosso piroscafo, anche di molte migliaia.

Ricordando che per la 6) del § 131, *1 kgm = 9,81 joule*, avremo:

$$1\ Cv = 75\ kgm \times 1^s = (75 \times 9{,}81)\ joule \times secondo, \quad \text{cioè:}$$

$$1\ Cv = 736\ watt; \tag{18}$$

equivalenza da ricordarsi in seguito, specialmente nelle relazioni tra energia meccanica ed energia elettrica.

151. Problemi sul lavoro e sull'energia.

a) Problemi risoluti.

1. *Si vuole sollevare un carico di* kg *410, a* m *150 di altezza, adoperando una puleggia mobile accoppiata ad una puleggia fissa. Sapendo che un uomo può esercitare una forza di trazione media di* kg *50, calcolare quanti uomini occorreranno per sollevare quel carico, e qual'è il lavoro da essi impiegato.*

Risoluzione. — Poichè la puleggia fissa non porta vantaggio, mentre quella mobile riduce la potenza a metà della resistenza (§ 90), la forza di trazione occorrente per l'equilibrio è:

$$P = \text{kg}\ \frac{410}{2} = \text{kg}\ 205.$$

Bisogna ora aumentare questa forza di quanto occorre per vincere gli attriti. Ammettiamo che il rendimento della puleggia fissa sia dell'89 % e quello della mobile del 92 %; il rendimento totale del sistema è il prodotto di essi, cioè:

$\varrho = 0{,}89 \times 0{,}92 = 0{,}82$. Quindi la potenza effettiva necessaria è:

$P' = \text{kg}\ (205 : 0{,}82) = \text{kg}\ 250.$

[1] Si dice comunemente in pratica: il motore di un certo automobile *ha la forza* di 30 *Cv*. Tale modo di dire è improprio, perchè la forza è tutt'altra cosa; si deve dire: quel motore *ha la potenza* di 30 *Cv*.

E poichè ogni uomo esercita una [illegible]

[illegible]

Il lavoro [illegible] della potenza nella carrucola mobile è doppio di quel [illegible]

$L_m = kgm\,(250 \times 300) = kgm\;75000$; mentre il lavoro utile [illegible]

$L_u = kgm\,(410 \times 150) = kgm\;61500$; quindi il lavoro passivo è:

$L_p = L_m - L_u = kgm\,(75\,000 - 61\,500) = kgm\;13\,500$; ed il rendimento:

$$\varrho = \frac{L_u}{L_m} = \frac{61\,500}{75\,000} = 0,82\,;$$ come già s'era avanti computato.

2. *Quale superficie deve avere un paracadute, per sostenere una persona di* kg *70?*

Risoluzione. — Ammettiamo che sia di *m* 5 al *s* la velocità massima con cui possa toccar terra una persona, senza pericolo; essa è la velocità con cui arriva a terra una persona, che salti da circa *m* 1,5 d'altezza.

Per la 9) del § 137, sostituendovi: $K = 0{,}163$; $V =$ m 5; $R =$ kg 70; $d = 1$; si avrà:

$$70 = 0{,}163 \times x \times 25, \quad \text{da cui:} \quad x = \text{m}^2\,\frac{70}{0{,}163 \times 25} = \text{m}^2\ 17 \text{ circa.}$$

Ciò spiega come siano assolutamente insufficienti i paracadute rudimentali, come mantelli e simili, escogitati per gli aviatori, da alcuni inventori facilisti.

3. *Un proiettile della massa di 20* g *esce dalla canna di un fucile, lunga* cm *80, con la velocità di* m *500 al secondo. Calcolare la forza media esercitata sul proiettile dai gas della deflagrazione dell'esplosivo.*

Risoluzione. — La forza viva del proiettile all'uscita dalla canna è:

$$E = erg\left(\frac{1}{2} \times 20 \times 50\,000^2\right) = 25\,000\,000\,000\ joule = kgm\ 255 \text{ circa.}$$

Tale dev'essere il lavoro esplicato dall'esplosivo per la lunghezza della canna, cioè per lo spostamento di *m* 0,8. Sicchè, chiamando x la forza media, dev'essere:

$$x \times 0{,}8 = 255, \quad \text{da cui:} \quad x = \text{kg}\,\frac{255}{0{,}8} = \textbf{kg 319}.$$

4. *Qual'è il lavoro assorbito da un volàno, per passare dalla quiete alla velocità di 90 giri al minuto, sapendo che ha il diametro medio di* m *2,50 e che la fascia di esso pesa* kg *200?*

Risoluzione. — Supponiamo, per semplicità, che la massa della fascia sia tutta concentrata sulla circonferenza media, e trascuriamo la massa dei raggi e del mozzo. La massa del volàno è:

$m = \dfrac{200}{9{,}81} = 20{,}39$; il momento d'inerzia è (§ 143):

$\mu = mr^2 = 20{,}39 \times (1{,}25)^2 = 31{,}86$ circa; la velocità angolare (§ 47-4):

$\omega = 2\pi n = \dfrac{2 \times 3{,}14 \times 90}{60s} = 9{,}42$; quindi la forza viva E del volàno, ossia il lavoro richiesto, è:

$$E = \frac{1}{2}\,\mu\,\omega^2 = \frac{1}{2} \times 31{,}86 \times (9{,}42)^2 = \textbf{kgm 1414} \text{ circa.}$$

5. *Che pote*[illegible] *m^3 9, posta sul tetto a m. 30 dal livello dell'acqua del pozzo, in un quarto d'ora?*

Risoluzione. [illegible] *kg* 9000, il lavoro da compiere è perciò:

$$kg\ 9000 \times m\ 30 = kgm\ 270\,000,\ \text{in 15 minuti; cioè in:}$$

$$(15 \times 60)^s = 900^s. \quad \text{Quindi occorre sviluppare:}$$

$$kgm\ (270\,000 : 900) = kgm\ 300\ \text{per secondo; equivalenti a:}$$

$$HP\ (300 : 75) = 4\ Cv.$$

Ciò in teoria: in pratica occorre una potenza maggiore, perchè una parte del lavoro occorre per vincere gli attriti. Supposto che la pompa impiegata per sollevare l'acqua, abbia il rendimento del 70 %, occorreranno:

$$HP\ (4 : 0{,}70) = 5{,}7\ Cv.$$

b) Problemi da risolvere.

1. Calcolare in *erg*, in *joule*, in *kgm*, il lavoro necessario per sollevare 20 litri d'acqua a 15 *m* d'altezza.

2. Una scala lunga *m* 5 è appoggiata contro un muro verticale, in guisa che il suo piede sia a *m* 2 dalla base del muro; un uomo pesante *kg* 70 trasporta un peso di *kg* 30 dal suolo sino in cima della scala. Calcolare il lavoro totale effettuato.

3. Un cavallo trascina un carico di 800 *kg* su una strada comune, la cui pendenza è dell'8 %. Calcolare la forza di trazione occorrente, tenuto conto dell'attrito, ed il lavoro compiuto dal cavallo per ogni chilometro di percorso.

4. Con che velocità arriva a terra un paracadute della superficie di m^2 35, il cui peso totale sia di *kg* 120? ($K = 0{,}163$).

5. Qual'è la forza che si deve sviluppare coi freni, per fermare entro il percorso di *m* 15 un'automobile del peso totale di *kg* 1200, che corra alla velocità di *km* 80 all'ora?

6. Una locomotiva di 50 *tonn.* trascina un treno composto di 25 vagoni di 12 *tonn.* cadauno, alla velocità di 36 *km* l'ora. Quale potenza deve sviluppare su strada orizzontale? Quale velocità acquista, con pari potenza, se sale su una strada con pendenza del 2 %?

7. Da un serbatoio d'acqua cadono 200 litri al secondo, da una altezza di *m* 150. Calcolare la potenza ricavata, se il rendimento della turbina che riceve l'acqua è del 75 %.

8. Si vuole mantenere un automobile pesante 800 *kg*, alla velocità media di 80 *km* all'ora, su strada orizzontale, il cui coefficiente d'attrito sia del 5%, il coefficiente di resistenza sia 0,03, e la sezione della vettura sia m^2 1,2. Quale deve essere la potenza del motore?

9. Quanto deve aumentare la potenza del motore di un bastimento o di un aeroplano, per raddoppiare la velocità di esso?

152. **Proprietà principali dei solidi.** — Abbiamo detto nel § 8, che la proprietà caratteristica dei solidi è la **rigidità**; che però non deve intendersi assoluta, perchè qualunque solido è compressibile (§ 14) e perciò deformabile. Vedemmo anche nel § 20, le proprietà particolari dei solidi.

153. **Tenacità.** — Abbiamo accennato (§ 20) che la **tenacità** *è la resistenza alla rottura.* Se un'estremità di una sbarra (o di un filo) di un corpo è fissa, ed all'altra estremità si applica una sufficiente forza di trazione di intensità crescente, la sbarra dapprima si allunga alquanto, ad un certo momento subisce un notevole stiramento in qualche punto più debole e ivi si assottiglia visibilmente; questo fatto si chiama *strizione.* In quel punto avviene un indebolimento della resistenza della sbarra, ed essa continua a cedere in quel punto; finchè si rompe, senza che occorra aumentare la forza traente.

Chiamasi **carico di rottura**, e misura la *tenacità, la forza minima occorrente per ogni* mm^2 *di sezione della sbarra, perchè essa si rompa.*

Questo è il dato principale che si riferisce alla resistenza e quindi alla *qualità* del materiale impiegato. Il corpo più tenace è l'acciaio; il cui carico di rottura può arrivare, in alcune qualità, sino a *kg* 150 per mm^2.

La Tabella del § 156 indica i valori R del carico di rottura per i materiali più comuni; con l'osservazione che tale valore varia a secondo che la rottura avviene lentamente o bruscamente.

Problema. — *Qual'è il peso massimo che può sostenere una sbarretta di ferro, larga* mm *12, spessa* mm *8, senza rompersi?*

Risoluzione. — La sezione di quella sbarretta è:

$$s = \text{mm}^2\,(12 \times 8) = \text{mm}^2\,96.$$

Il carico di rottura del ferro (in fili, Tab. § 156), è in media $^{\text{kg}}/_{\text{mm}^2}$ 90, quindi la sbarretta si rompe per un carico:

$$P = kg\,(96 \times 90) = \textbf{kg 8640.}$$

154. **Elasticità dei solidi.** — Abbiamo ancora accennato (§ 15) che la **elasticità** *è la proprietà che hanno i corpi deformati di riprendere la forma primitiva, allorchè cessa la causa che li deformava.*

Ci proponiamo ora di studiare sommariamente in quanti modi può essere deformato un corpo solido, e come dipende la deformazione dalla forza che la produce.

Un corpo solido può essere deformato in cinque modi elementari distinti:

1° Per **trazione**; cioè una fune, una catena, un filo, ecc., possono allungarsi, sotto l'azione di un peso o di una qualsiasi *forza traente* che li tiri. Ciò, ad es., avviene nelle funi di un argano, nella catena di un paranco, ecc.

2° Per **compressione**; allorchè una colonna, un pilastro, ecc., si comprimono sotto l'azione del peso che sorreggono.

3° Per **taglio**; come avviene per una trave, che sopporta un peso appoggiata alle estremità, nei punti in cui essa è appoggiata; esempi di deformazione per taglio si hanno anche nelle cesoie, nelle punzonatrici, ecc.

1° Per flessione; allorchè una sbarra si piega sotto l'azione di un peso o di una *forza flettente* qualsiasi, che agisca lontano dai punti in cui essa è sostenuta. Così, ad es., avviene nelle travi che sorreggono i tetti, nelle longarine (*putrelle*) che si adoperano nelle costruzioni edilizie, ecc.

[illegible] una sbarra cilindrica, un filo di metallo [illegible] [illegible] di una forza [illegible] all'altro estremo, che tende a far ruotare il cilindro attorno al suo asse. Ciò avviene, per es., sugli *alberi* che sostengono le puleggie di trasmissione, sotto l'azione delle cinghie che fanno ruotare le pule[illegible] sul perno di un verricello, sotto la pressione torcente della potenza agente sulla macchina; ecc.

Fig. 214.

155. **Elasticità di trazione e di compressione.** L'elasticità di compressione e quella di trazione hanno le medesime leggi. Sosteniamo alla estremità superiore, come è indicato nella Fig. 214, un filo di metallo e sospendiamo all'altro estremo un peso P. Sotto l'azione di questo il filo si allunga, e si misura con grande approssimazione l'allungamento da due segni A e B fatti vicino alle estremità del filo. L'esperienza dimostra le seguenti **leggi dell'elasticità di trazione:**

L'allungamento **l** *del filo è proporzionale:*

1. *direttamente alla lùnghezza L del filo,*
2. *direttamente alla forza P che tende,*
3. *inversamente alla sezione* **s** *del filo.*

Tali leggi sono espresse nella formula:

1) $$l = \frac{1}{E} \frac{PL}{s};$$ in cui $\frac{1}{E}$ è un coefficiente di proporzionalità che dipende dalla qualità della sostanza, detto *il coefficiente d'allungamento*; il numero E si chiama il *modulo di elasticità di trazione*; ne abbiamo riportato il valore per alcune sostanze nella Tabella del § 156.

Problema. — *Di quanto si allunga un filo d'acciaio lungo* m *4,50, del diametro di* mm *5, se deve sorreggere il peso di* kg *150?*

Risoluzione. — Il modulo di elasticità dell'acciaio in filo è: $E = 24\,000$; la sezione di quel filo è:

$$s = 3,14 \times \text{raggio}^2 = \text{mm}^2\,[3,14 \times (2,25)^2] = \text{mm}^2\ 15,9.$$

Quindi, dalla 1), sostituendo alle lettere i valori numerici, ed osservando che: *m* 4,50 = *mm* 4500, si avrà:

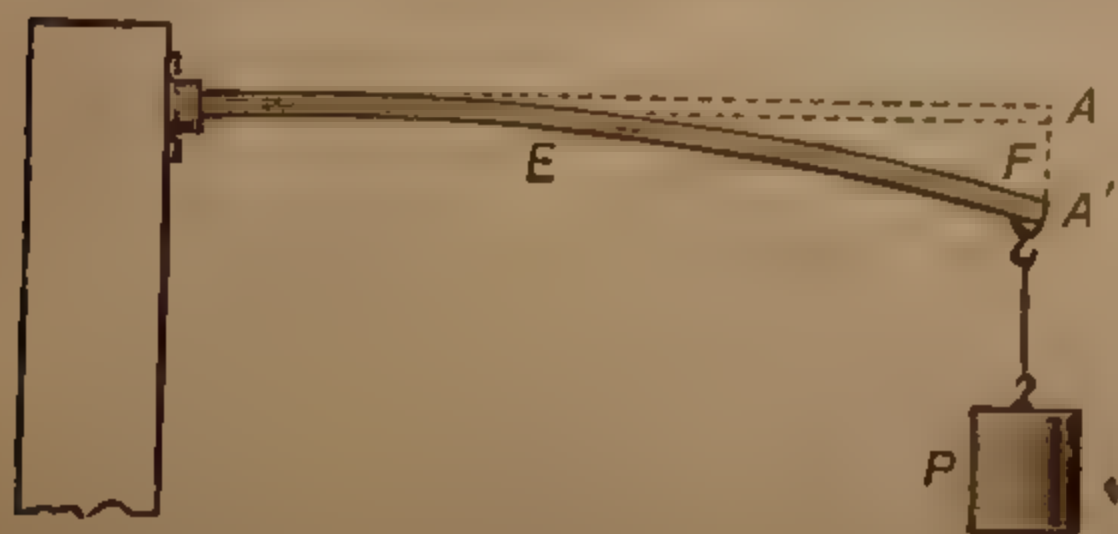
$$l = \text{mm}\ \frac{150 \times 4500}{24\,000 \times 15,9} = \text{mm}\ 1,77.$$

156. **Limite di elasticità.** — Se il carico a cui si sottopone la sbarra è sufficientemente grande, allora la lunghezza della sbarra non riprende più il valore primitivo, allorchè cessa l'azione della forza traente: la sbarra rimane *in parte* allungata permanentemente. Se il corpo non riprende più la lunghezza primitiva, vuol dire che si è oltrepassato il limite entro cui il

corpo era elastico; cioè si è superato [illegible] *[illegible]da*. La tabella seguente porta i valori del carico T al limi[illegible]

TABELLA. Coefficienti ([illegible])

MATERIALE	Modulo di elasticità E	[illegible] al limite di elasticità T	Carico di rottura R
Ferro omogeneo. . . .	20 000	18–24	30–45
» fili	»	24–30	45–60
Acciaio comune . . .	22 000	30–40	40–90
» fili.	24 000	40–50	75–120
Alluminio laminato . .	7 000	—	20–40
Ottone filo	10 000	12	35–70
Corda canape	150	2	6–8

157. **Elasticità di flessione.** — Un solido è sollecitato a *flessione*, allorchè è sottoposto a forze che tendono a piegarlo. Sia, ad es., una sbarra E (Fig. 215) fissa ad un estremo; all'altro estremo A agisce un *peso flettente* P, il quale piega la sbarra e sposta il punto A di una lunghezza $AA' = F$, che si chiama *freccia*, e che indica la deformazione della sbarra per flessione. L'effetto della forza flettente P non dipende solamente dal valore di essa, ma anche dalla distanza a cui agisce la forza dal punto della sbarra maggiormente sottoposto alla flessione; nel caso nostro dipende dalla lunghezza L della sbarra. L'effetto totale della forza è misurato quindi dal prodotto:

$$M = P \times L$$

che si chiama il *momento flettente* della forza.

Fig. 215.

La deformazione infine dipende dalla forma della sezione della sbarra. Se tale sezione è rettangolare, chiamando *larghezza* (l) il lato perpendicolare alla direzione della forza flettente, e *spessore* (s) il lato parallelo a tale direzione, l'esperienza dimostra che:

La flessione F *è proporzionale:*

direttamente alla forza flettente ed al cubo della lunghezza; inversamente alla larghezza ed al cubo dello spessore.

Tali leggi sono racchiuse nella formula:

$$2) \qquad F = C \frac{PL^3}{l s^3};$$

in cui C è un coefficiente di proporzionalità, che dipende dalla qualità della sostanza di cui è fatta la sbarra.

Per una sbarra rettangolare la resistenza alla flessione dipende specialmente dallo spessore s del rettangolo sezione; è noto infatti che è molto più facile piegare una riga di legno poggiandola contro il ginocchio dalla

[illegible] ando [illegible]. Per tale ragione si dà la forma della Fig. 216 alla sezione delle *poutrelles*, che a parità di peso hanno così la massima resistenza alla flessione.

Fig. 216.

158. **Elasticità di torsione.** — Un solido è sollecitato a *torsione*, allorchè è sottoposto a forze che tendono a torcerlo. Sia, ad es., una sbarra cilindrica L (Fig. 217) fissa ad un estremo A; l'altro estremo sia sollecitato da una forza P, che faccia ruotare la sezione attorno al suo centro O. Un punto B della circonferenza di tale sezione ruoterà dell'arco BB', a cui corrisponde un angolo al centro $B\widehat{O}B'$, che si chiama *angolo di torsione*; esso misura la deformazione per torsione.

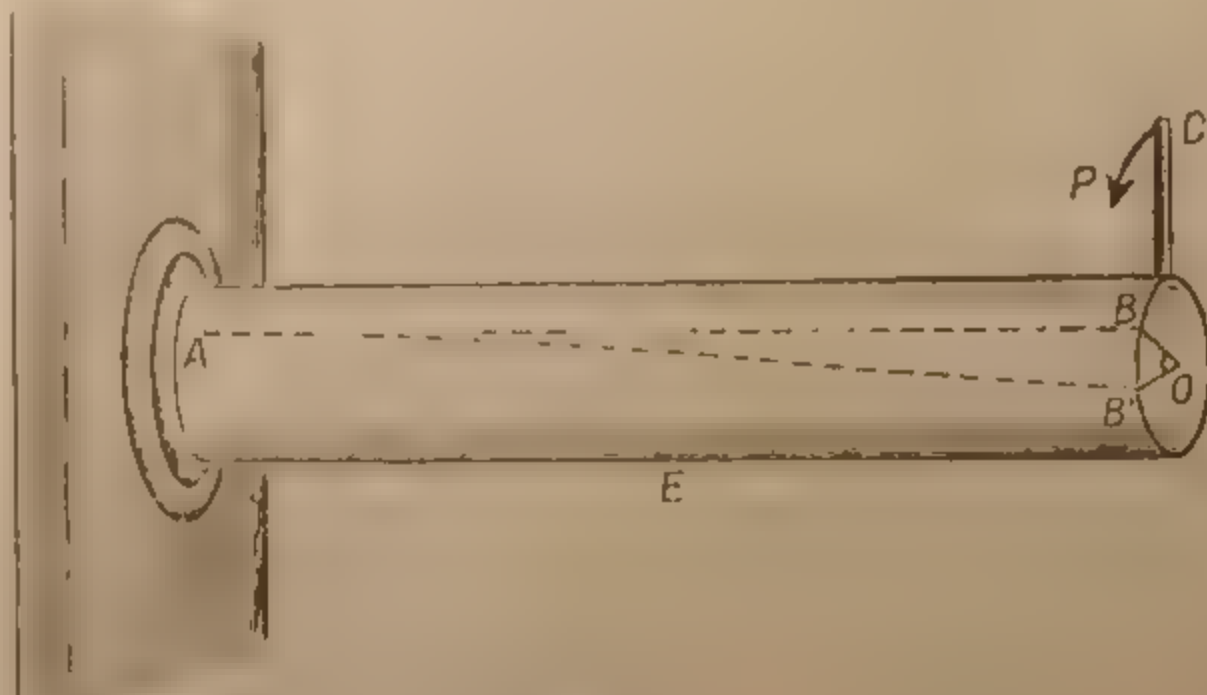



Fig. 217.

L'effetto della forza torcente P non dipende solamente dal valore di essa; ma trattandosi di una rotazione, dipende dal suo *momento di rotazione*, come è stato definito nel § 76; cioè dal prodotto della forza P per la lunghezza del suo braccio $h = (OC)$. L'effetto della forza adunque, dipende dal prodotto:

$$M = P\,h,$$

che chiamasi il *momento torcente* della forza. L'esperienza dimostra che:

L'angolo di torsione ω *è proporzionale:*

direttamente al momento della forza torcente ed alla lunghezza L *della sbarra, inversamente alla quarta potenza del raggio* r *di essa.* Cioè:

$$3) \qquad \omega = \frac{1}{\sigma}\,\frac{P\,h\,L}{r^4}\,;$$

in cui, al solito, $\dfrac{1}{\sigma}$ è un coefficiente di proporzionalità dipendente dalla qualità della sostanza di cui è formata la sbarra.

159. **Oscillazioni elastiche.** — Un corpo elastico deformato, allorchè cessa la forza che lo deformava, non riprende subito la forma primitiva; ma compie una serie di oscillazioni, che vanno gradatamente smorzandosi. Queste oscillazioni, come quelle del pendolo, sono *isocrone*. Si trae profitto di questa legge, per regolare il movimento degli orologi da tasca; nei quali non può applicarsi il pendolo, perchè questo esige un asse di oscillazione orizzontale, e quindi che l'orologio non sia mosso. Negli orologi da tasca si applica il così detto *bilanciere*, che è un piccolo volàno, a cui è applicata una sottile molla a spirale; è questa che per la sua elasticità, fa compiere al bilanciere oscillazioni isocrone, dalle quali, per uno scappamento analogo a quello del pendolo (§ 127), dipende il movimento delle lancette dell'orologio. In questo caso le oscillazioni si compiono, qualunque sia la direzione dell'asse del bilanciere, e comunque si muova l'orologio.

160. **Isteresi elastica - Tempera.** [illegible] corpo non avviene tutta istantaneamente [illegible] per molto tempo, sotto l'azione della forza deformatrice. Parimenti, quando cessa di agire questa forza, il corpo non riprende subito la forma primitiva; ma in parte la riprende lentamente.

Fig. 218.

Abbiamo dunque due deformazioni, e in conseguenza due elasticità: una istantanea, o *di 1ª specie*, ed è quella che abbiamo studiato fin'ora; l'altra più lenta, o *di 2ª specie*, o *susseguente*. Si deve tener conto anche di questa, nel valutare la resistenza dei materiali. Infatti, ad es., un ponte metallico può resistere al passaggio di un lungo treno, senza apparentemente guastarsi; ma esso può subire ad ogni passaggio deformazioni permanenti piccole, che sommandosi possono alla fine provocare la rottura del ponte.

Questo ritardo con cui un corpo segue le sollecitazioni che lo deformano, si chiama *isteresi elastica*.

L'elasticità dipende non solo dalla qualità della sostanza; ma varia per lo stesso corpo col tempo e con la temperatura; è minore quando il corpo è *ricotto;* aumenta invece con la *tempera*. La ricottura annulla gli effetti della tempera; fanno eccezione il bronzo, l'ottone, e qualche altra sostanza, che temperati (cioè arroventati e immersi nell'acqua), diventano più molli e meno elastici.

Il vetro si comporta come l'acciaio. Le *lacrime bataviche* (Fig. 218), sono gocce di vetro fuse e lasciate cadere, calde, nell'acqua. Esse non si rompono neanche a martellate; ma vanno addirittura in polvere se si spezza la punta.

Per tale ragione si adopera praticamente il vetro temperato, nei casi in cui si richieda del vetro che resista agli urti. Però esso non ha avuto molta diffusione, perchè sebbene resistente all'urto, è tuttavia molto sensibile alle variazioni di temperatura; per cui tale vetro spesso si rompe spontaneamente in minuti pezzi, senza alcuna causa apparente.

Per il fatto che il vetro temperato resiste più agli urti, e se si rompe si riduce in pezzi piccoli, senza spigoli vivi, esso è stato applicato per le vetrerie delle carrozze automobili; poichè così sono evitati i tagli prodotti dai pezzi di vetro ordinario, in caso di rottura.

Problemi da risolvere.

1. Che diametro deve avere un filo di ottone, lungo *m* 1,50, perchè si allunghi di *mm* 0,2, sotto l'azione del peso di *kg* 5?

2. Qual'è il peso occorrente per rompere un filo d'acciaio, del diametro di *mm* 2?

3. Quanto dev'essere lungo un filo di ottone, del diametro di *mm* 3, perchè sospeso ad un capo, verticalmente, si rompa per azione del suo peso?

4. Quale dev'essere il diametro minimo di un filo di acciaio per sorreggere, senza rompersi, una botte di 2500 litri di capacità, piena d'acqua, la quale vuota pesa *kg* 80?

5. Una sbarra, lunga *cm* 60, larga *mm* 20, spessa *mm* 5, nelle condizioni della Fig. 215, ha una flessione di *mm* 6, sotto il peso di *g* 500; che peso occorre per flettere di *mm* 15 una sbarra della stessa sostanza, lunga 1 *m*, larga *mm* 15, spessa *mm* 7?

6. Quale deve essere il raggio di un filo metallico, perchè subisca pari torsione di un altro filo dello stesso metallo, di lunghezza quadrupla, col raggio di *mm* 1,5, sotto azione di eguale momento torcente?

[illegible] DI COSMOGRAFIA

Il sistema solare.

161. **L'astronomia - Il sistema solare.** — L'osservazione dei corpi celesti, cioè degli innumerevoli astri disseminati nel cielo, è lo scopo dell'Astronomia. Questa è la prima, e quindi la più antica, delle scienze induttive formatesi. Essa ebbe un impulso grandissimo con l'invenzione dei telescopi e dei cannocchiali, onde le più importanti scoperte nel campo dell'astronomia sono dovute a Galileo, che per il primo potè puntare sul cielo un modesto apparecchio d'ingrandimento.

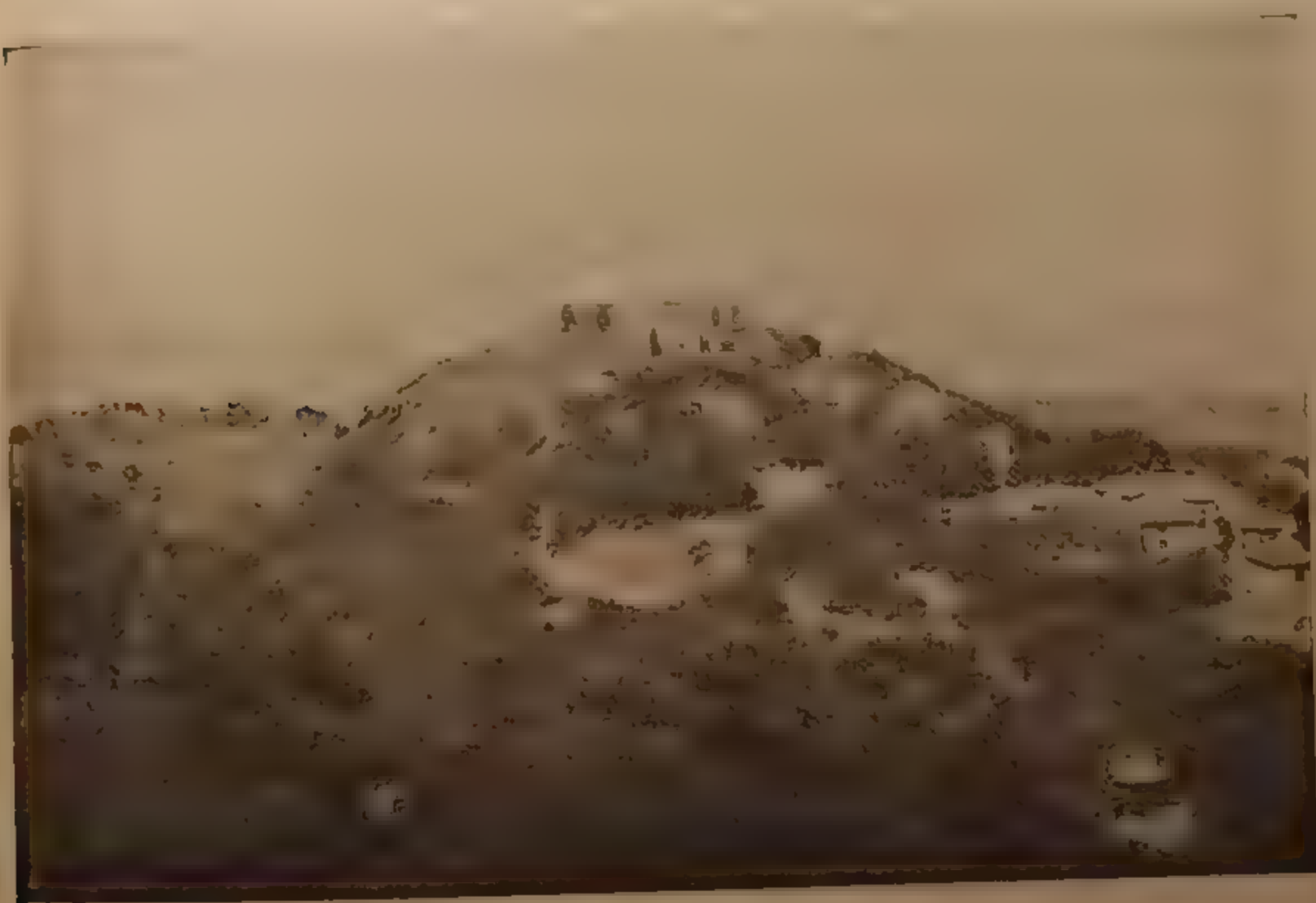



Fig. 219.

Oggi esistono numerosi **Osservatori astronomici,** dotati di apparecchi di potenza visiva grandissima; alcuni sono impiantati su alte montagne, per eliminare l'influenza delle brume e dei vapori che rendono in basso l'atmosfera meno limpida. Così, ad es.: l'Osservatorio di Lick [1] in California, impiantato sul monte Hamilton, a *m* 1283 sul livello del mare (Fig. 219); l'Osservatorio del monte Wilson, anch'esso in California, il più grande del mondo, impiantato sul monte omonimo, a *m* 1750 sul livello

(1) Il nome è quello di un miliardario d'America, che donò circa 1 milione di dollari per erigerlo.

del mare, dotato del più grande telescopio [illegible] Hooker, di cui la Fig. 220 mostra la cupola. Questo tel[illegible] 250000 volte più luce di quella ricevuta dall'occhio nudo, e permette di segnalare il calore ricevuto da una candela accesa, posta a 300 *km* di distanza!; l'Osservatorio di Yerkes, a Chicago, dotato del più grande cannocchiale del mondo; ecc.

Principale importanza ha per noi l'osservazione del Sole e dei corpi che gli ruotano attorno, e ch'esso trascina seco nello spazio. L'insieme del Sole e dei corpi che lo circondano, forma il **Sistema solare**, al quale appartiene anche la Terra.

Fig. 220.

162. **Volta celeste - Orizzonte - Zenit - Nadir.** — Per un'illusione della vista, ci sembra che sopra di noi esista un'immensa sfera, o volta, come di cristallo, di colore celeste, sulla quale vediamo muoversi di giorno il Sole e di notte gli astri. Essa è la *volta celeste*; non è visibile per intiero in nessun luogo della Terra; ma ne andiamo scoprendo le diverse parti col muoverci da un luogo ad un altro.

La volta celeste sembra che termini sulla Terra secondo un circolo, che si chiama **orizzonte sensibile**. Dicesi **orizzonte astronomico** di un luogo, il piano tangente alla sfera terrestre in quel punto.

Si chiama **zenit** il punto in cui la verticale di un luogo incontra la volta celeste. **Nadir** è il punto opposto, in cui la stessa verticale incontra la volta celeste, dall'altra parte del mondo; cioè dalla parte degli antipodi.

163. **Stelle fisse - Pianeti.** — I punti luminosi che di notte si osservano sulla volta celeste, si chiamano le **stelle**. Esse apparentemente sono animate, come il Sole, da un moto di rotazione da oriente ad occidente; dovuto invece (come vedremo) alla rotazione della Terra attorno al suo asse. Molte stelle non mutano sensibilmente di posizione le une rispetto alle altre; si chiamano perciò **stelle fisse**. Altre cambiano di posizione rispetto alle altre, e si chiamano *stelle erranti* o **pianeti**.

Il numero delle stelle che si scorgono ad occhio nudo è di circa 5000; ma coi più potenti cannocchiali se ne sono contate più di 100 milioni, e fotografate oltre un miliardo e mezzo. Le stelle si classificano di 1ª, 2ª, 3ª...

grandezza, a secondo della loro luminosità. Una persona con vista normale, vede ad occhio nudo le stelle sino alla 6ª grandezza, le altre sono telescopiche.

Le stelle sono astri immensamente grandi; ve ne sono anche assai più grandi del Sole; la loro mutua distanza è enorme, e si calcola in *anni-luce*, (1 *anno-luce* = circa *km* 9460 miliardi, § 21). Questa distanza è così enorme, che se immaginiamo le stelle grandi come teste di spillo, dovremmo pensarle distanti tra loro qualche centinaio di *km*.

Fig. 221.

Oggidì, per determinare la posizione esatta delle stelle, si fotografa il cielo, con esposizione di minuti ed anche di ore. Questo compito è stato affidato ai principali Osservatori di tutto il mondo, ed è il lavoro più importante che essi assolvono, e che richiederà ancora una ventina di anni prima che sia compiuto.

Un'immagine fedele del cielo stellato, e del movimento degli astri, si ottiene oggi con il **planetario.** È questo uno speciale apparecchio di proiezione (Fig. 221), che proietta sulla volta interna di una cupola sferica facente da schermo, tutti i fenomeni celesti osservati in natura. Di tali apparecchi ve ne sono in Italia: uno a Roma, inaugurato nel 1928; e un altro a Milano, in funzione dal 1930.

164. **Parallasse - Distanza degli astri.** — La distanza degli astri dalla Terra, si valuta con la misura della *parallasse*.

Dato un punto S (non accessibile), la Trigonometria insegna a calcolare la sua distanza da un punto A, se si conosce la distanza di A da un punto O e l'angolo ASO, (Fig. 222). Se OA è perpendicolare ad AS, l'angolo $\widehat{ASO}$ è il complemento di $\widehat{AOS}$, e basta misurare questo, per calcolare l'altro. Se S è un punto lontano, perchè la misura sia possibile, occorre che *la base*

AO sia sufficientemente [illegible], si sceglie per AO il raggio terrestre [illegible] la **parallasse diurna** dell'astro S, ed è tanto più piccolo quanto più l'astro è lontano.

Per le stelle, lontanissime, quest'angolo è così piccolo, da sfuggire a qualunque misura, e allora si prende come base il diametro PQ dell'orbita terrestre, cioè si osserva la stella A dalle posizioni estreme P e Q (Fig. 223), occupate dalla Terra nel suo giro attorno al Sole S; l'angolo PAQ è la **parallasse annua.**

La distanza delle stelle dalla Terra è enorme, e malamente esprimibile con un numero: si preferisce meglio computarla in *anni-luce*. Così, si dice che l'α del Centauro, che è la stella a noi più vicina, dista dalla Terra circa 3 anni di luce: s'immagini, se si può, quanto enorme sia tale distanza, pensando che la velocità della luce è di 300 000 *km* al secondo[1]. E vi sono stelle lontane da noi secoli e perfino millenni di luce! Non si sa fino a che distanza si estendano le stelle dell'Universo

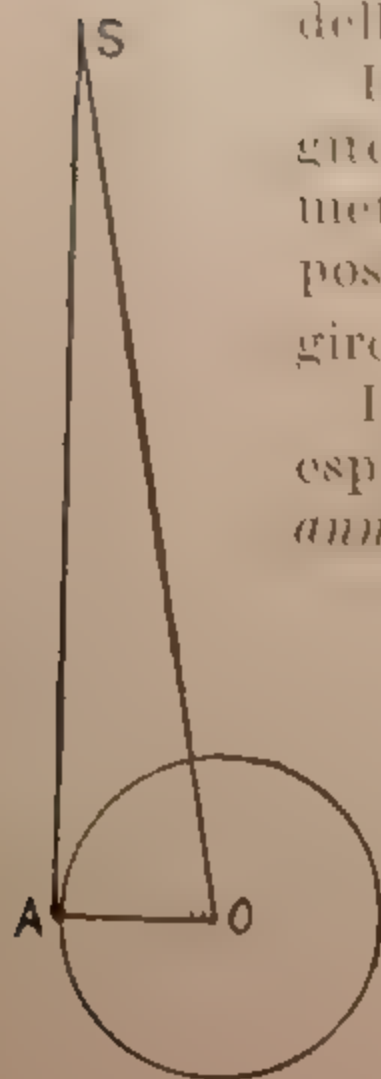



Fig. 222.

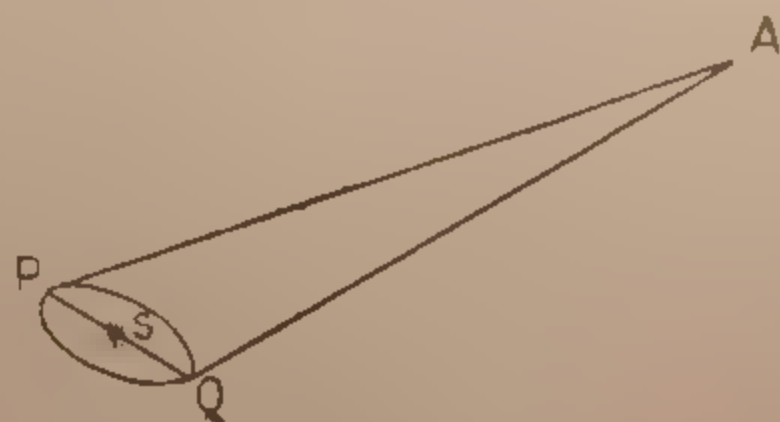



Fig. 223.

165. La Terra - Forma e dimensioni, età di essa. — La Terra è un globo sensibilmente sferico, che ruota attorno ad un asse; i punti in cui questo incontra la superficie terrestre si chiamano **i poli.**

La sfericità della Terra è stata da tempo provata, sia coi viaggi di circumnavigazione, sia dal graduale scomparire di un bastimento che si allontana sul mare, sia dall'ombra circolare che si proietta sulla Luna nelle eclissi lunari, ecc.

Per la forza centrifuga (§ 116), quando la Terra era fluida si è schiacciata alquanto ai poli; e così poi è rimasta solidificandosi. Il raggio minimo della Terra ai poli è di *km* 6356,089, ed il massimo, in direzione perpendicolare al precedente, è di *km* 6377,391; con una differenza di circa *km* 21.

L'età della Terra è stata calcolata in diversi modi, con risultati diversi. Dalla quantità di sale contenuta nel mare, e da quello trasportato annualmente dai fiumi, l'astronomo inglese Halley, nel 1715, calcolò l'età della Terra in circa 250 milioni di anni. I geologi invece, basandosi sullo spessore degli strati geologici, e sul tempo occorrente per la formazione di ciascuno di essi, valutano l'età della Terra più di 500 milioni di anni. Oggi infine, partendo dalla trasformazione dell'Uranio in piombo (Vol. 3°), e dal tempo in cui tale trasformazione si compie, il geologo americano Barrel arriva addirittura a circa 3,5 miliardi di anni!

166. Rotazione della Terra. — Anticamente si pensava che la Terra, immobile, fosse il centro dell'universo; e che tutti gli astri girassero attorno ad essa. Ma, per la grandissima distanza degli astri dalla Terra, bisogne-

(1) Un treno diretto (60 *km* l'ora) impiegherebbe 60 milioni di anni per raggiungere tale stella!

rebbe p[illegible] dotati di velocità fantasticamente enormi ed inammissibili, [illegible] il loro giro in 24 ore; inoltre, pur essendo le stelle a diverse distanze dalla Terra, compirebbero tutte il loro giro esattamente nello stesso tempo di 24 ore, cioè avrebbero tutte la stessa velocità angolare (§ [illegible]): cosa assai strana a concepire.

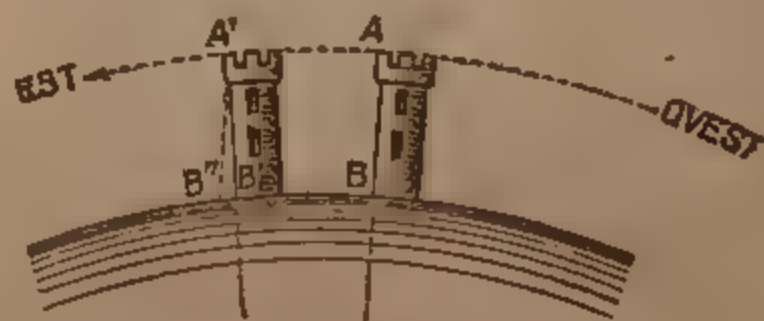
È invece assai più semplice pensare che sia la Terra a ruotare attorno ad un asse, il moto degli astri è quindi solo apparente. Ci sembra cioè che siano le stelle a muoversi rispetto alla Terra, per la stessa ragione che seduti in un vagone di un treno in moto, ci sembra di star fermi e di veder fuggire la campagna avanti ai nostri occhi.

Oltre allo schiacciamento della Terra ai poli, ed all'esperienza di Foucaut (§ 122), vi è la seguente dimostrazione sperimentale della rotazione terrestre, dovuta al Newton:

Se la Terra fosse immobile, un corpo pesante lasciato cadere da una certa altezza, p. es., dalla cima A di una torre (Fig. 224), cadrebbe esattamente secondo la verticale e toccherebbe terra in B. Invece l'esperienza dimostra che esso cade in un punto B'', spostato alquanto verso oriente. Difatti, nel tempo che il corpo cade, il punto A della torre ha girato con la Terra sino ad A' (nella figura, per maggiore chiarezza di spiegazione, non sono conservate le proporzioni) e B sino a B', essendo $AA' > BB'$.

Ma oltre al moto di discesa AB, il corpo per inerzia conserva il moto AA' della Terra; quindi deve toccar terra in un punto B'' tale che $\widehat{BB''} = \widehat{AA'}$; cioè in un punto B'' un po' distante da B' come s'era detto.

Fig. 224.

L'ipotesi della rotazione terrestre oggi appare come una delle concezioni più sicure e più indiscutibili. Ma quante lotte dovettero subire gli scienziati dei secoli passati, per scardinare le false credenze degli antichi e fondare le nuove, che parevano in contrasto perfino coi dettami della religione. Chi non ricorda la tortura morale del Galilei, costretto ad abiurare, pur osando lanciare il famoso detto: *Eppur si muove!* Però è giocoforza riconoscere, che l'aver dato moto alla Terra, averla concepita roteante e à un tempo lanciata velocissima attraverso lo spazio infinito, fu certo il pensiero più poderoso ed audace che la mente dell'uomo abbia saputo concretare.

167. **Asse e poli celesti - Stelle circumpolari.** — La sfera celeste ruota apparentemente attorno allo stesso asse terrestre. I punti in cui quest'asse incontra la volta celeste, sono i **poli celesti**. Uno si trova vicino alla *stella polare*, ed è il *polo nord*; perciò questa stella serve ai naviganti per indicare la direzione del nord. L'altro opposto è il *polo sud*. Il polo terrestre rivolto al nord, si chiama anch'esso **polo nord o artico**; l'altro **polo sud o antartico.**

Tutte le stelle sembrano descrivere sulla sfera celeste tanti archi di vario raggio, aventi per asse geometrico comune l'asse del mondo. Le stelle vicine al polo descrivono apparentemente archi di piccolo raggio, epperò sono sempre sull'orizzonte, cioè non tramontano mai; si chiamano le **stelle circumpolari.**

168. Meridiani e paralleli. — Il piano [illegible] della Terra ed un dato luogo della superficie di [illegible], [illegible] meridiano astronomico di quel luogo. L'intersezione di tale piano con la [illegible], [illegible] **circolo meridiano** o **meridiano terrestre**; tutti i meridiani [illegible] i circoli massimi che s'intersecano ai poli, (Fig. 229).

Un piano perpendicolare all'asse terrestre, dicesi parallelo; i circoli minori in cui tali piani tagliano la sfera terrestre, sono i *paralleli terrestri*, (Fig. 229). Il maggiore di essi, il cui piano passa pel centro della Terra, è l'**equatore terrestre**; lo stesso piano taglia la sfera celeste secondo un altro cerchio, che si chiama **equatore celeste**.

169. Latitudine e longitudine. — Chiamasi **latitudine** di un luogo, l'angolo che il raggio terrestre passante per quel luogo, forma col piano dell'equatore; esso varia da 0° all'equatore, sino a 90° al polo. Si distingue in *latitudine nord* o *boreale* per i punti dell'emisfero terrestre compresi fra l'equatore e il polo nord; e *latitudine sud* o *australe*, per i punti dell'altro emisfero. I luoghi posti su un medesimo parallelo, hanno la stessa latitudine.

Longitudine di un luogo è l'angolo che il meridiano di quel luogo forma con un meridiano fondamentale, scelto come primo meridiano di riferimento. Questo meridiano origine è scelto a piacere, e differisce da una Nazione all'altra; di solito si sceglie il meridiano di Greenwich (vicino a Londra). I luoghi situati su un medesimo circolo meridiano, hanno la stessa longitudine.

Anzichè contare la longitudine da 0° a 360° dal meridiano origine, si suole contare da 0° a 180° ad est di tale meridiano, e da 0° a 180° verso ovest; distinguendo i due casi coi nomi di *longitudine est* e *longitudine ovest*.

La posizione di un punto della superficie terrestre rimane individuata, allorchè sono note la sua latitudine e la longitudine, che si chiamano le sue **coordinate geografiche**.

Così, ad es., le coordinate di Roma sono:

longitudine est (da Greenwich) . . . . $12^\circ\, 27'\, 12''$
latitudine nord . . . . $41^\circ\, 54'\, 6''$

170. Eclittica. — Un'altra ipotesi fondamentale, anch'essa oramai indiscutibile, è che la Terra ruoti attorno al Sole.

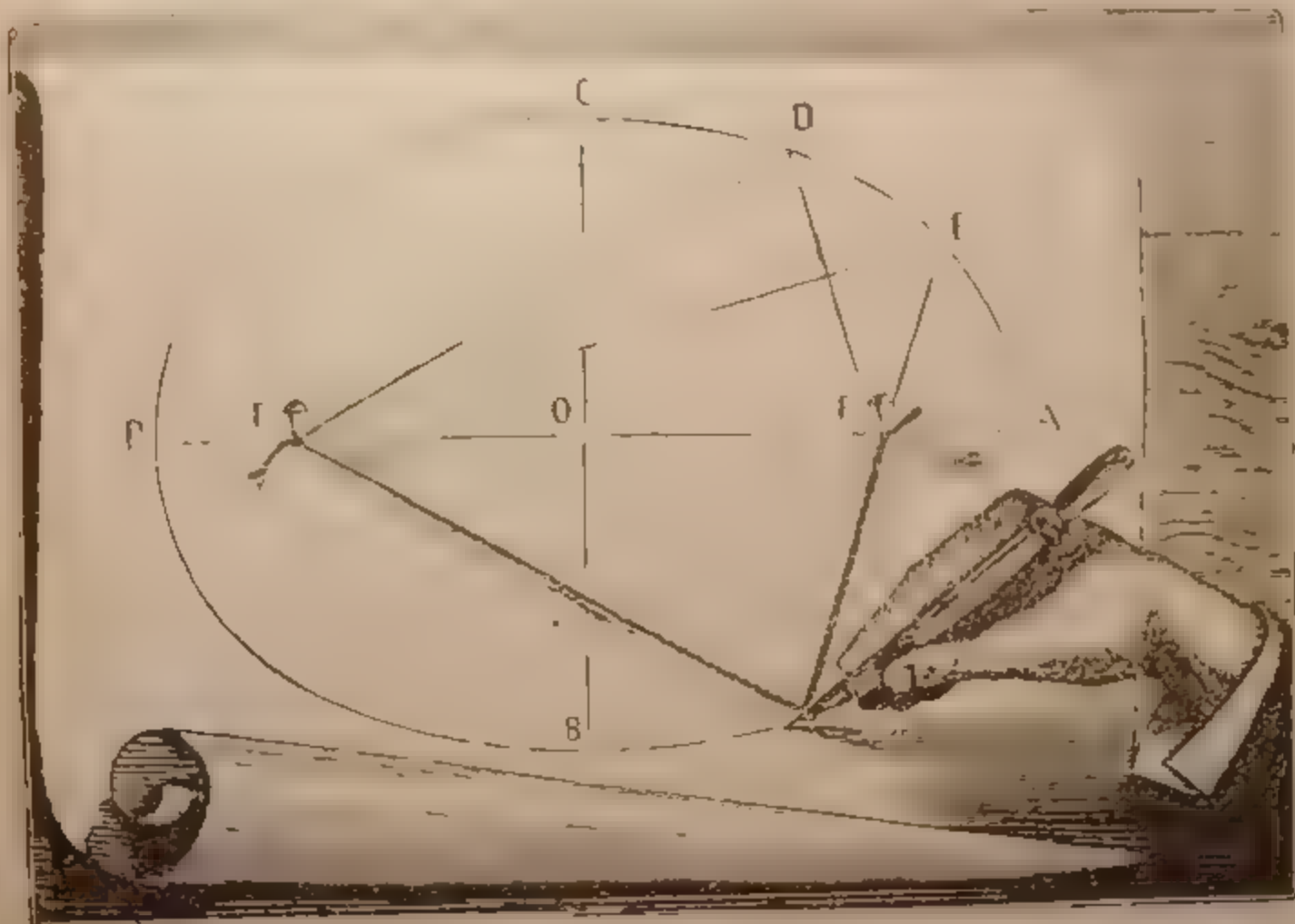
La traiettoria descritta in tale moto (supposta la Terra un punto), si chiama **orbita**, ed ha la forma di un'*ellisse* (1), quasi circolare.

---

(1) Si chiama *ellisse* una curva $ACPB$ (Fig. 225) contenuta in un piano, tale che la somma delle distanze $DF + DF'$ di un suo punto qualunque D da due punti fissi F ed F', sia costante. Questa proprietà permette di costruire praticamente l'ellisse; fissando in F e F' i capi di un filo di lunghezza maggiore di FF' e poi, tenendo sempre tesi i due tratti di questo filo, facendo scorrere su esso la punta di una matita che si appoggi sulla carta, su questa rimane tracciata l'ellisse. I due punti F ed F' si chiamano i **fuochi**; vi sono due assi di simmetria AP e BC, di lunghezza diversa, che si chiamano **asse maggiore** ed **asse minore**; essi s'incontrano in un punto O, che si chiama il **centro** dell'ellisse; i fuochi giacciono sull'asse maggiore. Il cerchio può considerarsi come un'ellisse i cui fuochi coincidano col centro.

Il Sole S [illegible] uno dei fuochi; quindi la distanza [illegible] variabile. La distanza massima è all'estremità [illegible], che si chiama **afelio**; questo punto è raggiunto [illegible] ogni anno al [illegible]. La distanza minima è all'altra estremità P dell'asse maggiore, che si chiama **perielio**; la Terra vi passa al 22 dicembre.

Fig. 225.

La distanza media della Terra dal Sole è di *km* 149 000 000. Il piano dell'orbita terrestre taglia la sfera celeste secondo un circolo $ONWS$ (Fig. 227), che si chiama la **eclittica**; lungo la quale sembra che si muova il Sole durante l'anno. Esso forma con l'equatore $OBWA$ un angolo α di $23^{\circ}\,28'$ circa, leggermente variabile col tempo. In altre parole, l'asse terrestre PP' non è perpendicolare al piano dell'eclittica, ma forma con questo un angolo PMN di $66^{\circ}\,32'$, che è il complemento del precedente.

I due circoli dell'eclittica e dell'equatore celeste, s'intersecano in due punti O e W che si chiamano: **equinozio di primavera** ed **equinozio di autunno**.

I punti N ed S in cui l'asse maggiore dell'orbita terrestre, prolungato, incontra l'eclittica, sono il **solstizio d'estate** ed il **solstizio d'inverno**.

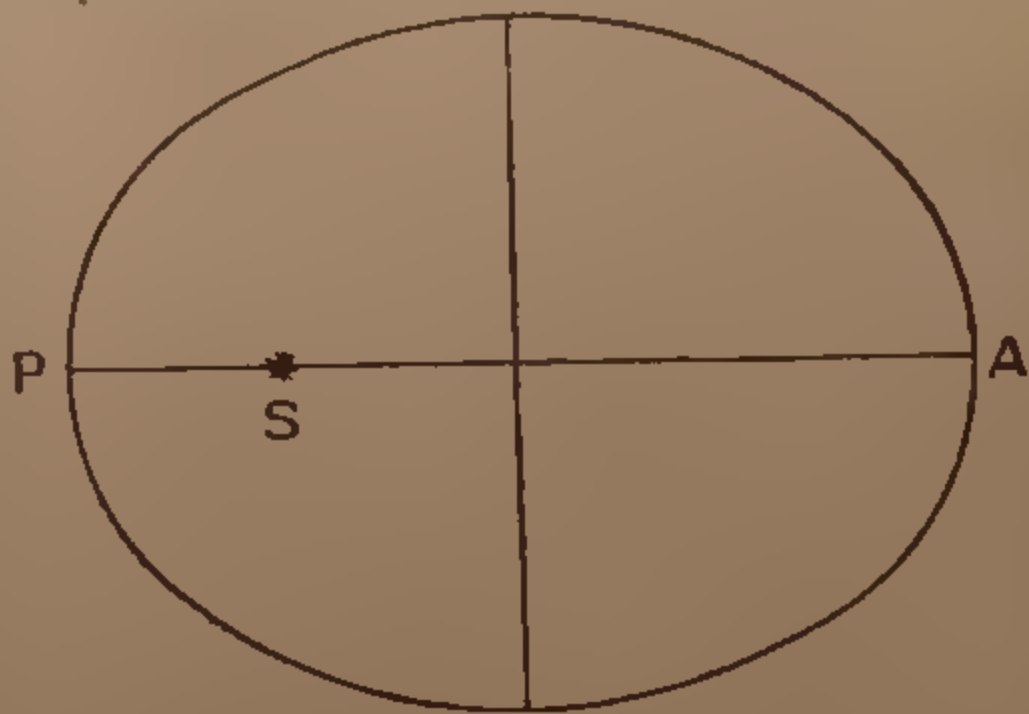



Fig. 226.

171. **Le stagioni.** — Come s'è detto, l'asse terrestre non è perpendicolare al piano dell'eclittica; quindi, durante la rotazione della Terra attorno al Sole, la superficie terrestre nei suoi vari punti è colpita dai raggi solari più o meno obliquamente, e in ciascun giorno per una durata diversa. Da ciò hanno origine le **stagioni dell'anno**, che com'è noto sono quattro: *primavera, estate, autunno, inverno*.

La Fig. 228 rappresenta la Terra al 21 giugno, cioè al solstizio d'estate; la parte illuminata e riscaldata dal Sole è quella rappresentata in tinta più chiara; nel nostro emisfero nord il giorno ha durata maggiore della notte.

La Fig. 229 rappresenta la Terra al 21 marzo e al 21 settembre, cioè agli equinozi. Il circolo d'illuminazione passa per i poli, e il giorno ha la stessa durata della notte.

La Fig. 230 rappresenta la Terra al 22 dicembre, cioè al solstizio d'inverno; il giorno, da noi, ha la minima durata.

Fig. 227.

172. Giorno sidereo e solare. — Chiamasi **giorno** la durata della rotazione terrestre attorno al suo asse. Si può misurare determinando, con apposito cannocchiale fisso, *il tempo che decorre fra due passaggi consecutivi del medesimo astro al meridiano del luogo.*

Se l'astro osservato è una stella, si ha il **giorno sidereo**, che è costante ed indipendente della stella osservata. Ma poichè noi regoliamo la nostra vita sul percorso del Sole, riferiamo la durata del giorno alla osservazione del Sole, e si ha il **giorno solare.**

Se la Terra non girasse attorno al Sole, il giorno sidereo e quello solare sarebbero eguali. Per il moto terrestre invece il giorno solare risulta più

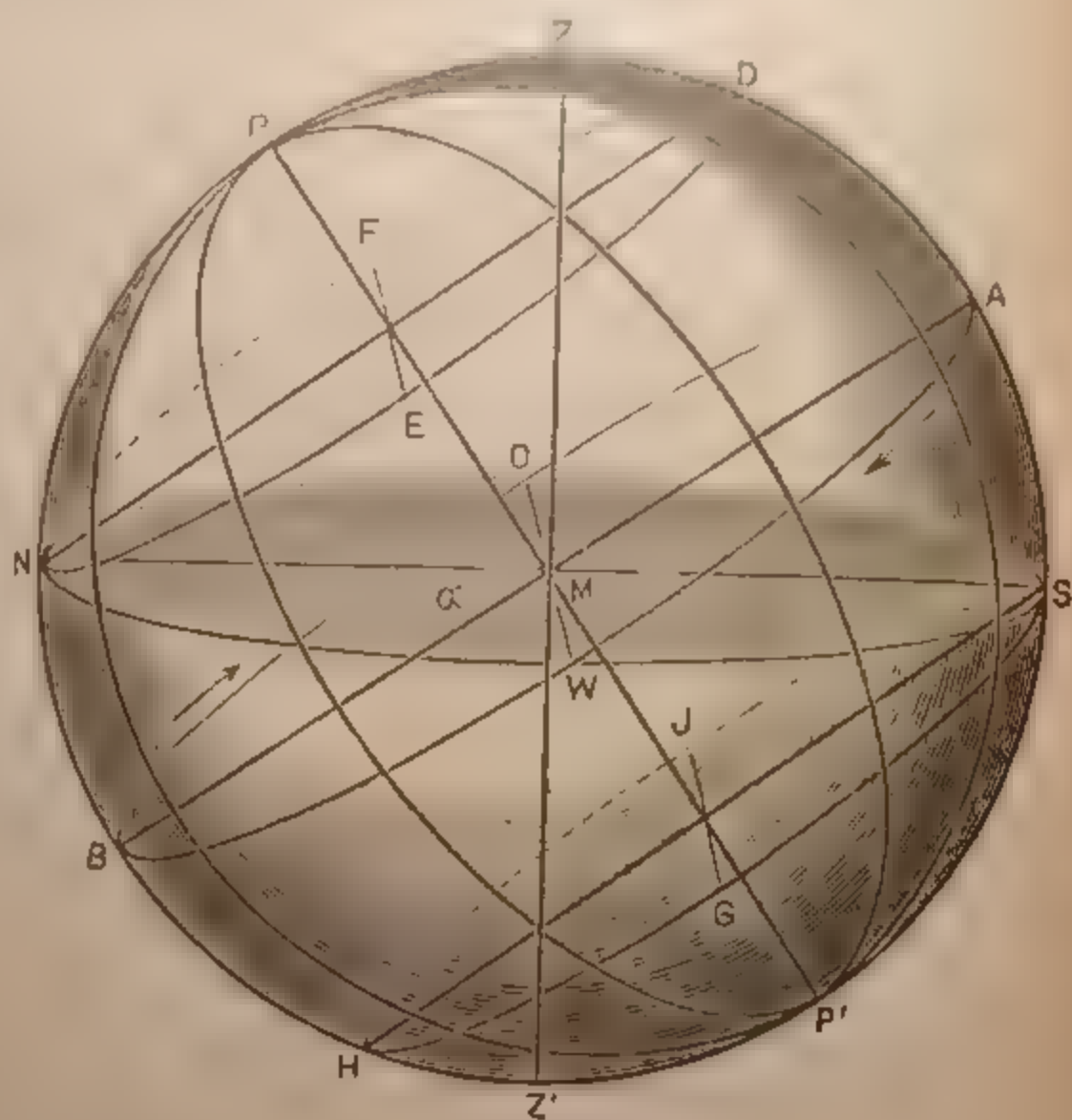
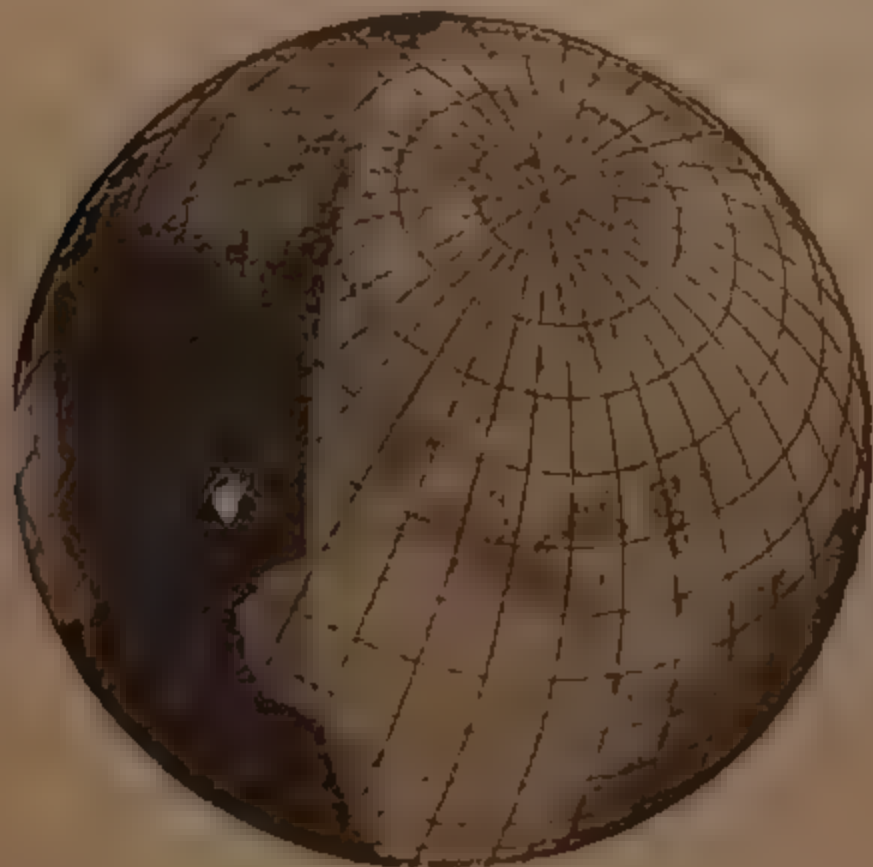
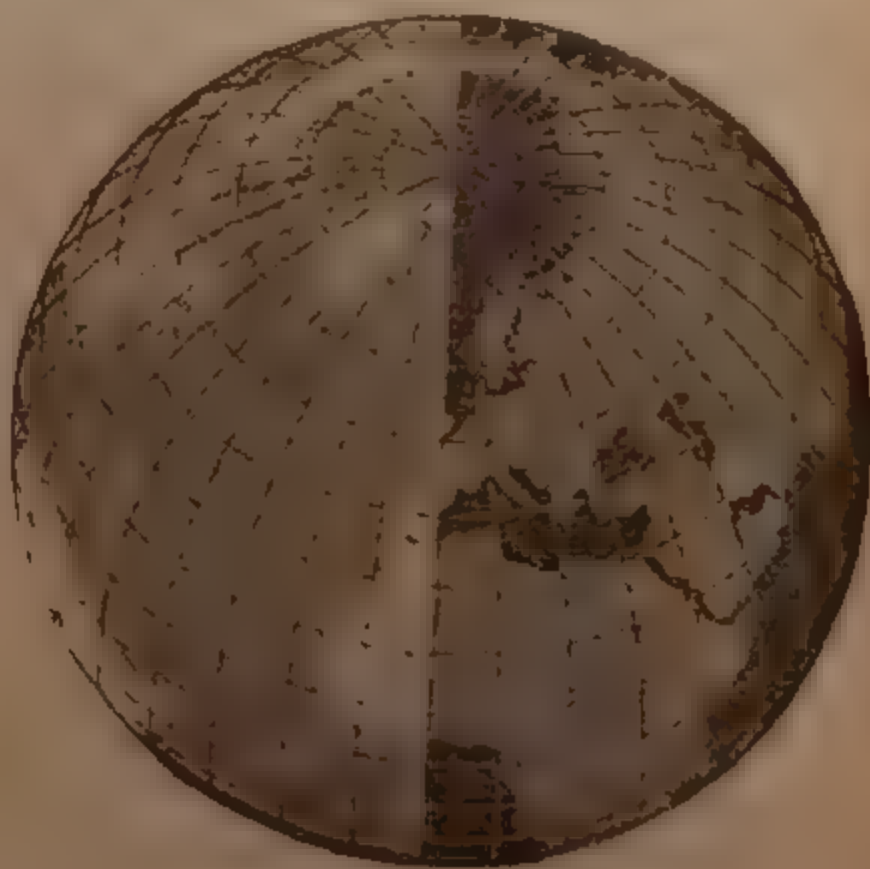



Fig. 228. Fig. 229.

lungo di quello sidereo. Infatti sia C (Fig. 231) la posizione del centro della Terra, ad un dato istante, sulla sua orbita. Un osservatore B vedrà il sole S od una stella A al meridiano, se sono in un piano verticale che contiene CB.

Dopo [illegible] la Terra si sarà spostata [illegible] in proporzioni, per maggiore chiarezza). Nella nuova posizione la stella, praticamente a distanza [illegible] meridiano, giacchè l'osservatore è in E, [illegible] della Terra sul suo asse, mentre si vedrà il Sole al [illegible] giacchè l'osservatore è arrivato in E, cioè dopo un giro completo della Terra, più una frazione $\widehat{B'E}$. Quindi, come s'era detto, il giorno solare supera quello sidereo.

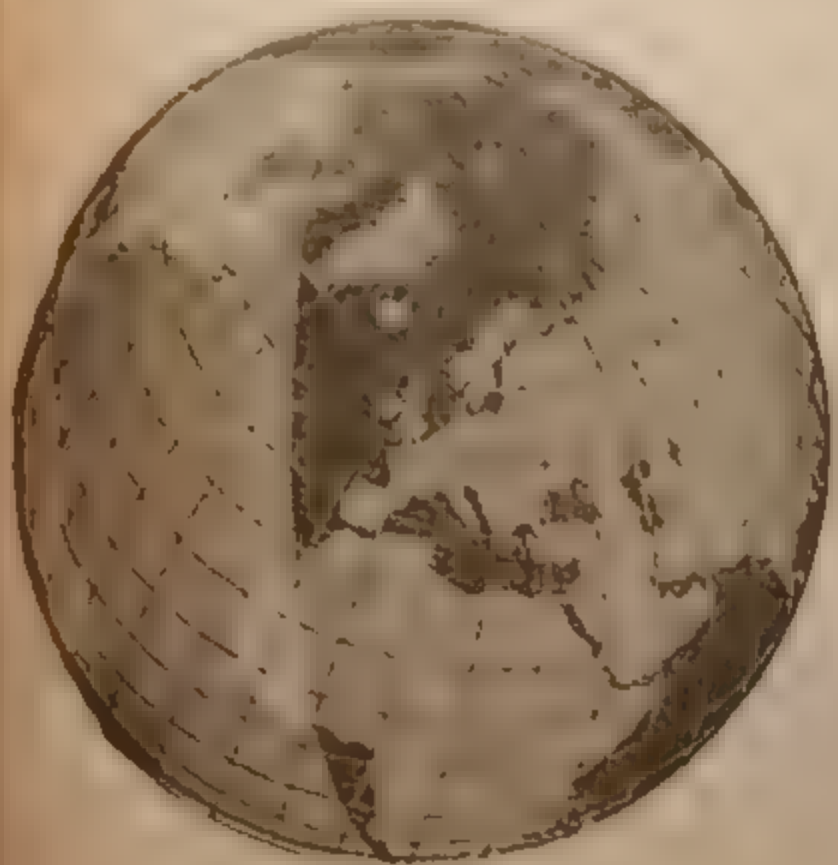
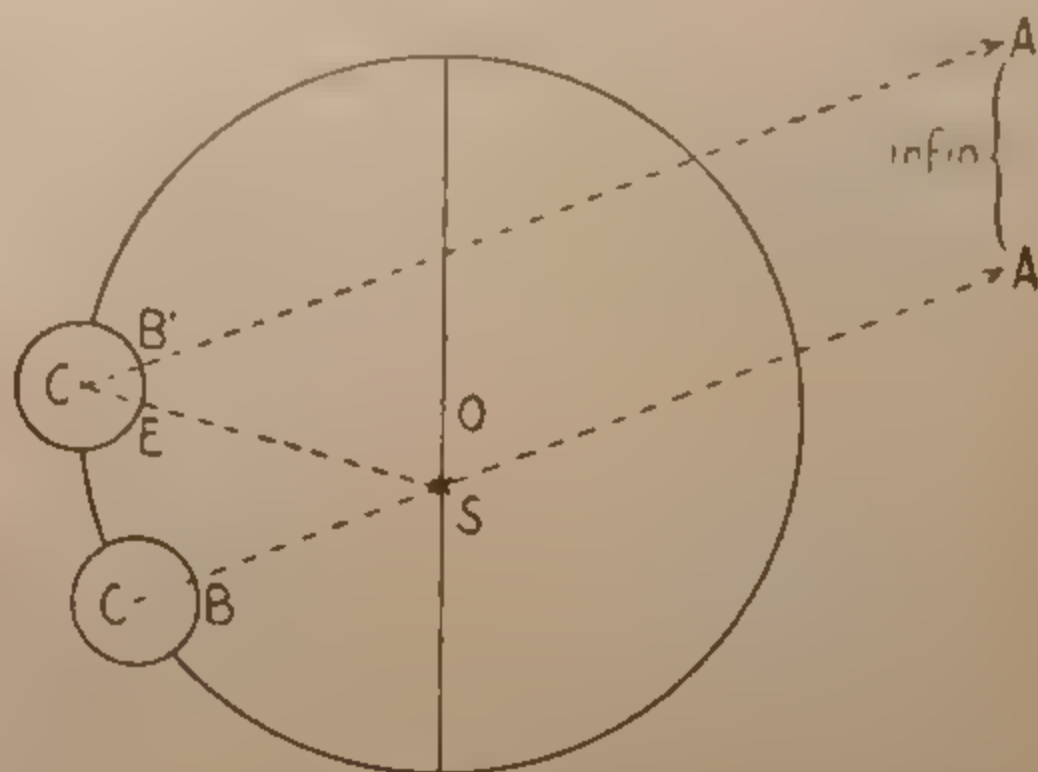



Fig. 230. Fig. 231.

Come è evidente, la somma di tutte le frazioni $\widehat{B'E}$ durante un giro intero attorno al Sole, cioè in un anno, è eguale ad un giro completo della Terra su sè stessa, cioè ad un giorno intero; quindi in un anno vi è un giorno solare di meno che di giorni siderei; questi sono infatti 366,257 e formano un *anno siderale*, equivalente a 365,242 giorni solari.

Poichè il moto della Terra attorno al Sole non è uniforme (§ 180), lo spostamento CC' durante ciascun giorno è variabile, e quindi è pure variabile la frazione $B'E$; cioè *il giorno solare non è costante*.

Per questo si è dovuto prendere un *giorno solare medio*, che è la media dei giorni solari durante un anno.

Il giorno si divide in 24 ore, che si contano da una mezzanotte alla successiva; l'ora in 60 minuti, il minuto in 60 secondi. Coi simboli d, h, m, s si indicano giorno, ore, minuti, secondi. La differenza tra il giorno sidereo e quello solare medio è di $3^m 56^s,91$.

173. **Fusi orari.** — Si chiama **mezzogiorno vero** di un luogo, il passaggio del Sole al meridiano di quel luogo. Può determinarsi per mezzo delle *meridiane* od *orologi solari*. Ma per la differenza tra il giorno solare e quello medio, il mezzogiorno medio di un luogo, che è quello dato dagli orologi, non coincide col vero se non quattro volte all'anno: il 15 aprile, il 15 giugno, il 1° settembre e il 5 dicembre. Negli altri giorni ora è in anticipo ora è in ritardo, più o meno, secondo i mesi dell'anno.

Inoltre, il Sole occupa la posizione più alta nel cielo successivamente in tempi diversi, nei diversi paesi: cioè il mezzogiorno varia da luogo a luogo. Poichè il moto apparente del Sole è di un giro, cioè di 360°, in 24 ore, due luoghi le cui longitudini differiscono di 360° : 24 = 15° hanno il mezzogiorno alla distanza di un'ora.

Questa differenza tra un paese e l'altro, porterebbe confusione per la misura del tempo. Per eliminare questo inconveniente, si pensò alla **unificazione dell'ora.** Si è divisa la superficie della Terra in 24 fusi eguali, chiamati **fusi orari**; in ciascuno di essi si computa per tutto il fuso l'ora che corrisponde al meridiano centrale di esso; quindi nel passaggio da un fuso al successivo, si ha il salto di un'ora.

L'Europa è compresa in tre fusi orari; ma poichè i confini di ciascuna nazione non coincidono coi meridiani che limitano il fuso, praticamente si prendono come limiti del fuso i confini geografici della nazione. L'Italia appartiene al *fuso dell'Europa centrale*; la Francia al *fuso dell'Europa occidentale*; quindi un viaggiatore che passi dall'Italia alla Francia, arrivato al confine deve mettere il proprio orologio *un'ora indietro*.

174. Il Sole. — Il Sole è apparentemente l'astro più grande e più luminoso del cielo. Esso è una stella, perchè splende di luce propria. È la stella più vicina a noi, e perciò ci appare più grande; ma non è la maggiore delle stelle, essendovene di quelle assai più grandi, che noi scorgiamo piccole per la enorme distanza. Ad es., la stella Betelgeuse (la α della costellazione di Orione), distante dalla Terra 160 anni-luce, ha il diametro circa 300 volte quello del Sole, e quindi circa 32 000 volte quello terrestre. La Fig. 232 rappresenta a sinistra la grandezza della Terra rispetto al Sole, e a destra quella del Sole rispetto a Betelgeuse! Questo esempio ci convince meglio quanto piccola e trascurabile cosa sia la Terra, rispetto ai colossi del cielo.

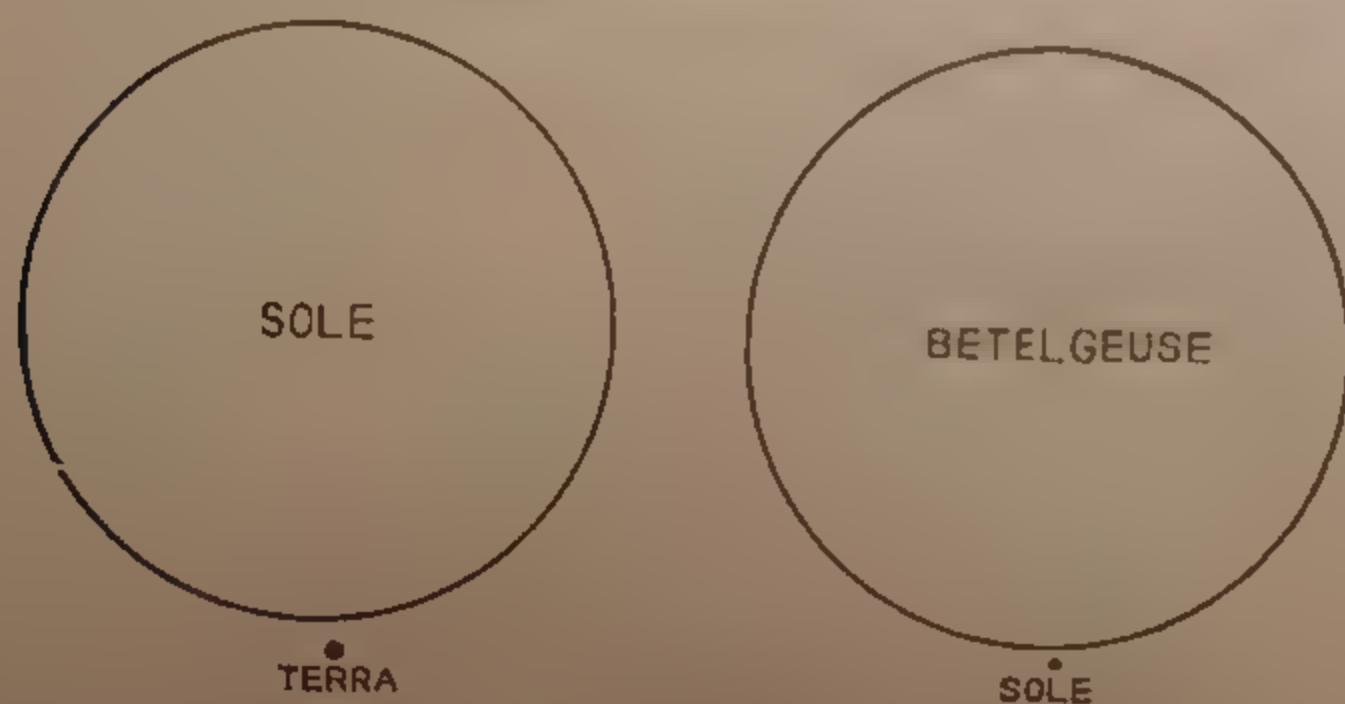



Fig. 232.

E vi sono stelle ancora più grandi della Betelgeuse; ad es. l'Antares (l'α della costellazione dello Scorpione), il cui diametro è 450 volte quello solare, e la *E* della *costellazione del cocchiere*, avente il diametro 3000 volte, e il volume 9 miliardi di volte quelli del Sole!

Nè il Sole è la stella più luminosa dell'universo. L'*astro di Plaskett*, appena visibile ad occhio nudo, distante dalla Terra 10 000 anni-luce, ha la temperatura di circa 17 000° *C*, e l'intensità luminosa circa 27 000 volte quella del Sole. E la stella *S. Dorado*, appartenente alla *Nebolosa Magellani*, invisibile ad occhio nudo perchè distante dalla Terra 100 000 anni-luce, è 400 000 volte più luminosa del Sole; se essa fosse al posto del Sole, la temperatura

della [illegible] 6000, cioè almeno quanto quella del Sole! La Fig. 233 indica le temperature di alcuni astri.

Il Sole è l'astro per noi importante, perchè senza di esso non vi sarebbe vita sulla Terra e da esso dipendono tutti i mutamenti meteorologici. La sua distanza dalla Terra è di circa 150 milioni di *km*; tale distanza è così grande, che la luce impiega circa 8 minuti primi a percorrerla; ed un proiettile da cannone, con la velocità di 1000 *m* al secondo, vi impiegherebbe più di 5 anni!

Il *diametro del Sole* è di circa 1400000 *km*; corrispondenti a 109 volte il diametro terrestre. La sua superficie, vista col cannocchiale, presenta regioni più lucenti, dette **facole**, ed altre più oscure, dette **macchie** (Fig. 234), variabili continuamente per numero e dimensioni; alcune sono grandi anche quattro volte la Terra. Le macchie si formano e scompaiono talvolta in poche ore; soltanto le più grandi persistono per molti giorni.

Il Sole è costituito da un nucleo centrale più oscuro, circondato da uno strato brillante, chiamato la **fotosfera**; si ammette che le macchie siano aperture nella fotosfera, attraverso cui si vede il nucleo più oscuro. Si osservano inoltre, specialmente durante le eclissi totali, sull'orlo del disco solare, sporgenze brillanti dette **protuberanze**, circondate da una specie di atmosfera rosea, detta la **cromosfera**; oltre alla quale si osserva una luce più estesa, che si chiama **la corona**. La Fig. 235 mostra la corona solare, fotografata durante un'ecclisse totale.

Fig. 233.

Le protuberanze sono enormi fiammate d'idrogeno, lunghe talvolta qualche centinaio di migliaia di *km*, frammisto a vapori di sodio, magnesio ed altri metalli. La Fig. 236 riproduce una fotografia di una protuberanza solare, alta circa 250000 *km*, fotografata il 9 luglio 1917. Il dischetto bianco a destra rappresenta la Terra, nella stessa scala.

Il Sole ruota su sè stesso, con un periodo di $25^d\ 4^h\ 29^m$. È anche animato da un moto di traslazione verso la costellazione di Ercole, con una velocità di 18 *km* al minuto secondo.

Si ritiene che il Sole sia una massa liquida incandescente, a temperatura elevatissima (di circa 6500° *C*), circondata da vapori luminosi.

L'analisi spettroscopica della luce ricevuta dal Sole (Vol. 3° - § 119), ci permette di riconoscere di quali sostanze sono costituiti questi vapori. Si è dimostrato che essi contengono i vapori di quasi tutte le sostanze che

esistono sulla Terra, come il ferro, il [illegible] [illegible], [illegible], più

Fig. 234.

Fig. 235.

altri corpi ancora a noi ignoti. Ciò fa ritenere che la Terra (e i pianeti) derivino da parti staccatesi dal Sole in epoca assai remota, e lanciate nello spazio; animate da velocità iniziale, hanno acquistato i moti rotatori e di traslazione che hanno tutt'ora. Si sono raggruppate in forma sferica per coesione, a guisa di grosse gocce, e raffreddandosi si sono condensate e rapprese sino ad assumere la forma e condizione attuale.

Il Sole, come tutti i corpi incandescenti, dovrebbe raffreddarsi col tempo. Ma per la sua *radioattività*, come studieremo in Elettrologia, si genera nuovo calore, che compensa quello perduto per irraggiamento. Perciò, non solo attualmente il Sole non si raffredda, ma anzi la sua temperatura sarebbe in leggero aumento (circa 1° ogni 50 anni). Ciò fa pensare che il Sole sia ancora nella sua

[illegible] e quindi capace di dar [illegible] per milioni di secoli.

175. **Pianeti - Satelliti.** — Oltre alla Terra ruotano attorno al Sole altri corpi celesti, che si chiamano **pianeti**, e che descrivono anch'essi orbite ellittiche, più o meno allungate. I piani di tali orbite sono diversi uno dall'altro, e dall'eclittica in cui si muove la Terra; le distanze medie dei pianeti dal Sole sono pure diverse. Si chiamano **pianeti inferiori** quelli che distano dal Sole meno che la Terra; **pianeti superiori** gli altri. I pianeti in ordine di distanza dal Sole sono: *Mercurio*, *Venere*, *Terra*, *Marte*, *Vulcano*, *Giove*, *Saturno*, *Urano*, *Nettuno* e *Plutone*. Fra Marte e Giove vi è qualche centinaio di corpi piccoli, chiamati **asteroidi**, forse derivati dallo sfasciamento di un pianeta o di una cometa, avvenuto in tempi remoti. Essi hanno dimensioni variabili; uno dei più grossi è *Cerere*, il cui diametro è circa 900 *km*. Altri, come *Eros*, *Vesta*, *Giunone*, ecc., sono assai più piccoli.

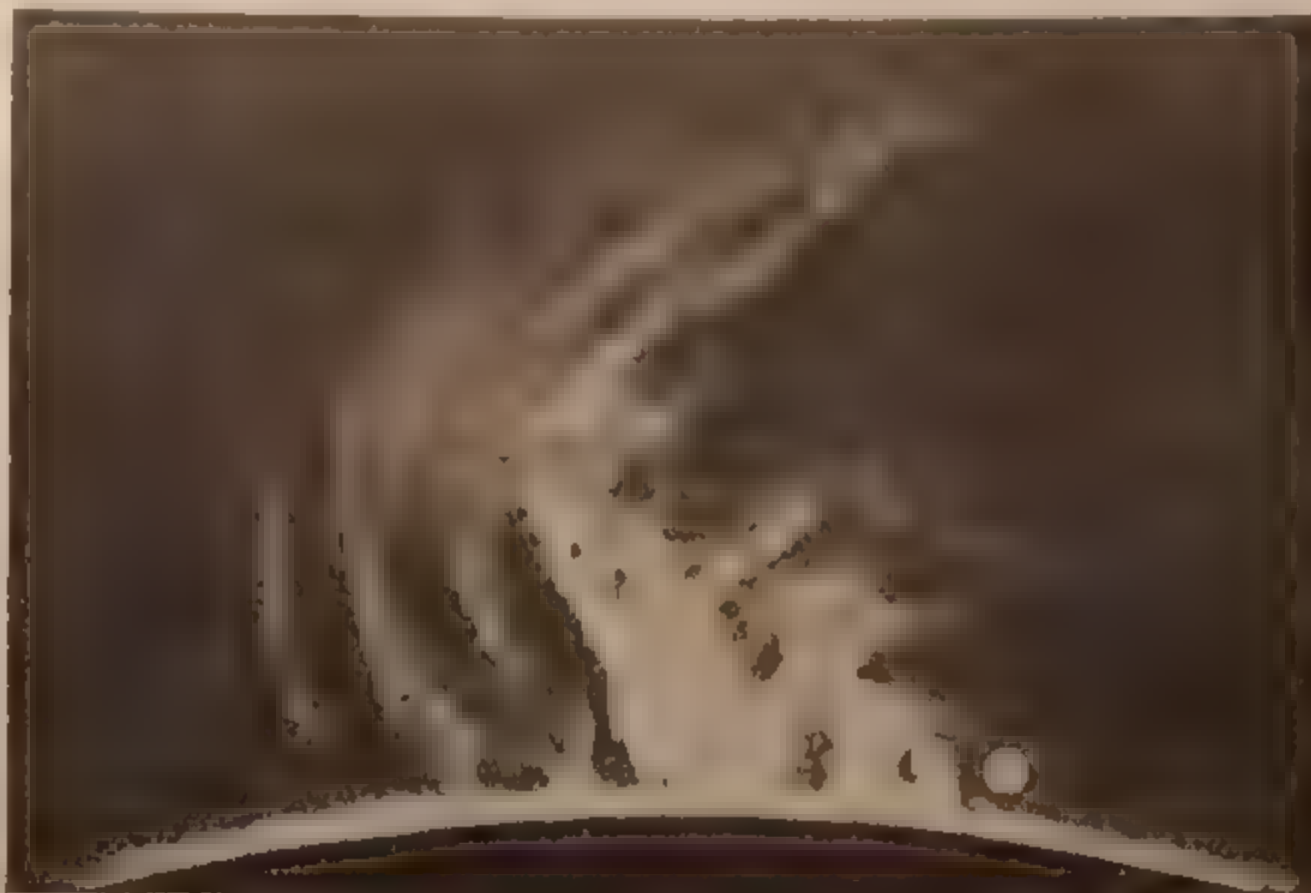



Fig. 236.

I pianeti brillano; non per luce propria, ma perchè illuminati dal Sole.

Attorno ai pianeti ruotano altri corpi più piccoli, che si chiamano **satelliti**. La Terra ha un solo satellite, che si chiama la **Luna**; altri pianeti possono avere più lune o nessuna.

176. **La Luna e le sue fasi.** — La nostra Luna ha il raggio di *km* 1741; cioè circa un quarto di quello terrestre; ed il volume di km^3 22106, ossia circa un cinquantesimo della Terra.

La distanza media dalla Terra alla Luna è di circa *km* 385000; cioè circa 60 volte il raggio terrestre. La durata della rotazione della Luna attorno alla Terra si compie in $27^d\ 7^h\ 43^m\ 11^s$; tale periodo si chiama **rivoluzione siderale**. Ma a causa del moto della Terra, la Luna ci si presenta sotto il medesimo aspetto o **fase** ogni $29^d\ 12^h\ 44^m\ 3^s$; e tale periodo si dice **rivoluzione sinodica** o ***mese lunare***.

Anche la Luna, come i pianeti, è visibile per la luce che riceve dal Sole. Essa però ci si presenta illuminata in tutto o in parte, e ci appare secondo diverse fasi, che sono: *luna nuova* – *primo quarto* – *luna piena* – *ultimo quarto*.

La Fig. 237 spiega la formazione di queste fasi. Sia T la Terra; $L_1\,L_2\,L_3\,L_4$ quattro posizioni della Luna; S i raggi del Sole. In L_1 il Sole illumina la

parte posteriore della Luna, non visibile da T; la Luna appare oscura, appena percettibile per una luce cinerea: è il *novilunio* o luna nuova. La debole luce cinerea è dovuta alla illuminazione che riceve dalla Terra, che in quel tempo dalla Luna appare tutta illuminata, come a noi la luna piena, ma quattro volte più grande.

In L_2 e L_4 dalla Terra si vede illuminata solo la metà del globo lunare, e si hanno rispettivamente il *primo quarto* e l'*ultimo quarto*. In L_3 la Luna è illuminata in pieno dal Sole nella parte a noi rivolta, e si ha la *luna piena*.

Fig. 237.

177. Rotazione ed aspetto della luna. — La Luna ha anche un moto di rotazione su sè stessa; esso si compie, per strana coincidenza, esattamente nello stesso tempo in cui avviene la rotazione attorno alla Terra. Per questa ragione *la luna rivolge alla Terra sempre lo stesso emisfero*, e noi non sapremo mai come essa sia fatta sulla faccia opposta.

L'aspetto della Luna piena è di un disco luminoso, con macchie più scure. Con un buon cannocchiale si scorgono rilievi come monti, e depressioni come vallate, (Fig. 238); ma non si scorge acqua, che forse manca del tutto sul nostro satellite. Onde i nomi di mari, laghi, ecc., dati ad alcune delle depressioni osservate, sono del tutto convenzionali, e non rispondono alla realtà.

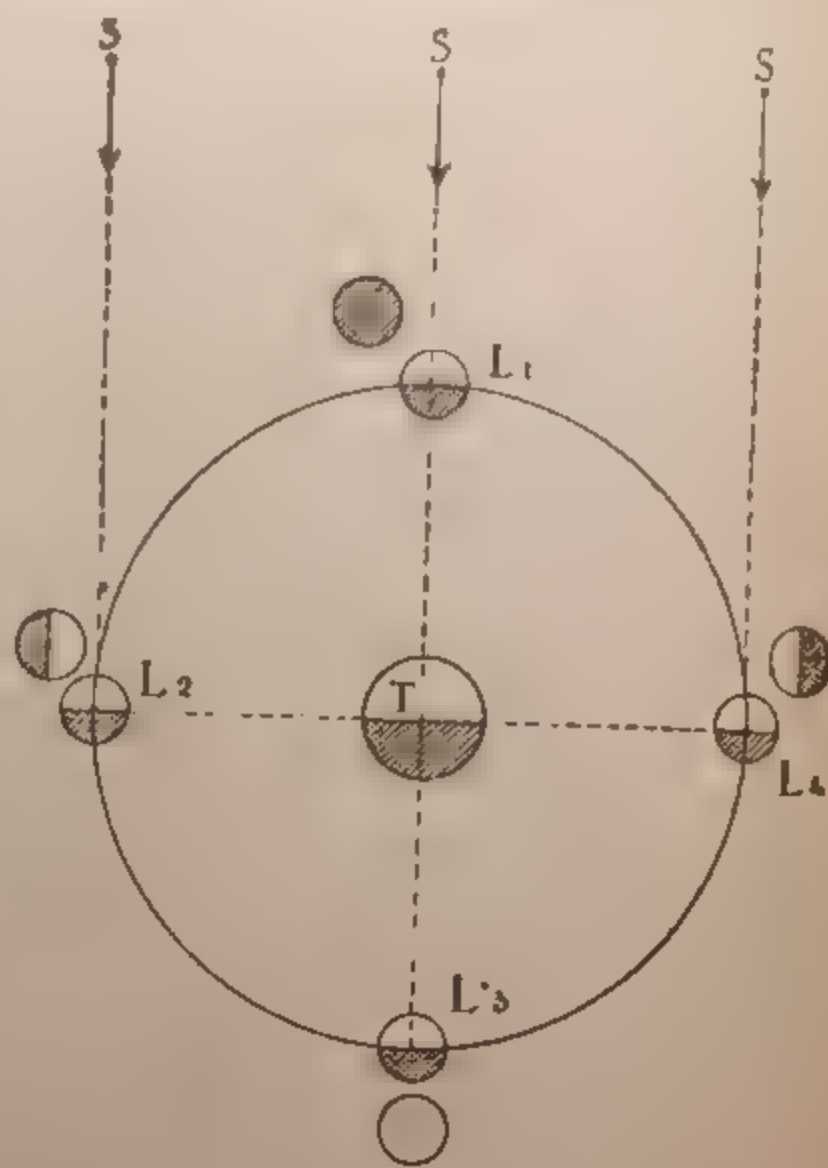
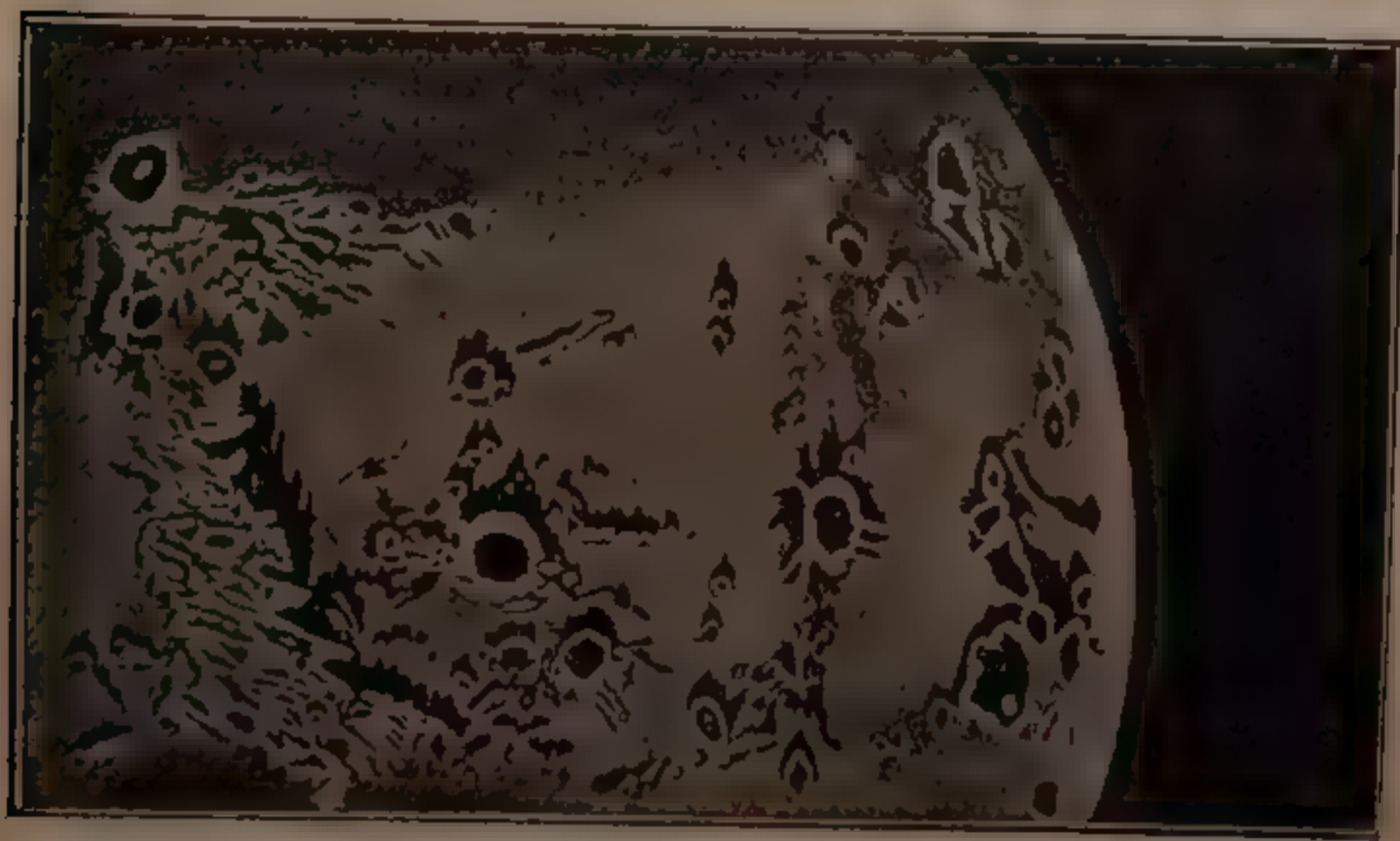



Fig. 238.

La mancanza di ombre variabili ed altri fatti che vedremo in *Ottica*, ci fanno ritenere inoltre che la Luna sia priva di atmosfera, e quindi probabilmente essa non ha esseri animati, nè vegetali, nè acqua, nè nevi. I più forti ingrandimenti ci fanno scorgere la superficie lunare, come se fosse a 20 *km* di distanza; ossia ancora troppo lontana per scorgervi oggetti delle dimensioni degli esseri viventi della Terra. Onde per ora è ancora impossibile concludere con sicurezza sulla abitabilità della Luna.

Molti credono che la Luna abbia grande influenza sulle vicende terrestri. È noto che essa ci rischiara di notte, e che produce le maree (§ 189). Ma all'infuori di ciò, essa non può avere influenza sulla vita della Terra: non ci manda calore in modo sensibile e quindi non può mutare le condizioni atmosferiche e non può influire sulla pioggia e sul bel tempo, sul crescere dei capelli, sul maturare delle messi, sul travaso del vino, sulle malattie, ecc. Tutto ciò che si dice o si crede su tale influenza, e in generale sull'influsso degli astri, è un pregiudizio senza alcun fondamento scientifico.

178. **I pianeti inferiori.** — **Mercurio** è il pianeta più vicino al Sole, da cui dista in media 58 milioni di *km*. Esso è fra i pianeti uno dei più difficili ad essere osservati. Appare come un piccolo disco, cosparso di macchie oscure permanenti, di natura indefinibile, forse analoghe ai nostri mari. Un'atmosfera circonda il globo, il cui diametro è di 4750 *km*; cioè circa un terzo di quello della Terra, e poco superiore alla nostra Luna. Esso è pertanto il più piccolo dei pianeti, e non ha satelliti. Compie il suo giro attorno al Sole in quasi 88 giorni dei nostri.

Fig. 239.

Il secondo pianeta è **Venere**, l'astro più fulgido del firmamento, dopo il Sole; di cui precede la comparsa all'alba (**Lucifero**, *o stella del mattino*) o che talvolta segue dappresso al tramonto (**Espero** *o stella vespertina*).

Venere è il pianeta più vicino alla Terra, a cui si accosta sino a 39 milioni di *km*; la sua distanza dal Sole è in media di 109 milioni di *km*.

La distanza di Venere dalla Terra è assai variabile, da 39 a 257 milioni di *km*; onde col cannocchiale ci appare di grandezza ora maggiore, ora minore; e presenta le fasi come quelle della Luna (Fig. 239). Il diametro di questo pianeta è di poco inferiore a quello terrestre.

La Terra non potendo mai trovarsi tra il Sole e Venere, non è possibile esaminare bene la superficie di questo pianeta; anche perchè è circondato permanentemente da uno strato denso di nubi, che ne nascondono la superficie. Onde poco sappiamo sulla costituzione di Venere. Esso non ha satelliti, e compie la sua rotazione attorno al Sole in $224^{d}\ 16^{h}\ 49^{m}$.

179. **I pianeti superiori.** — Assai più interessante è il pianeta **Marte**, la cui distanza minima dalla Terra arriva a circa 58 milioni di *km*, e la distanza media dal Sole è di 227 milioni di *km*; esso brilla di luce rossastra. La sua rotazione attorno al Sole avviene in $686^{d}\ 23^{h}\ 21^{m}$.

Il suo diametro è poco più della metà di quello terrestre, la sua atmosfera leggera e limpida, ci permette di scorgere più facilmente la sua superficie. Però, malgrado i più forti ingrandimenti, non possiamo vedere Marte al telescopio se non come ci appare all'incirca la luna ad occhio nudo.

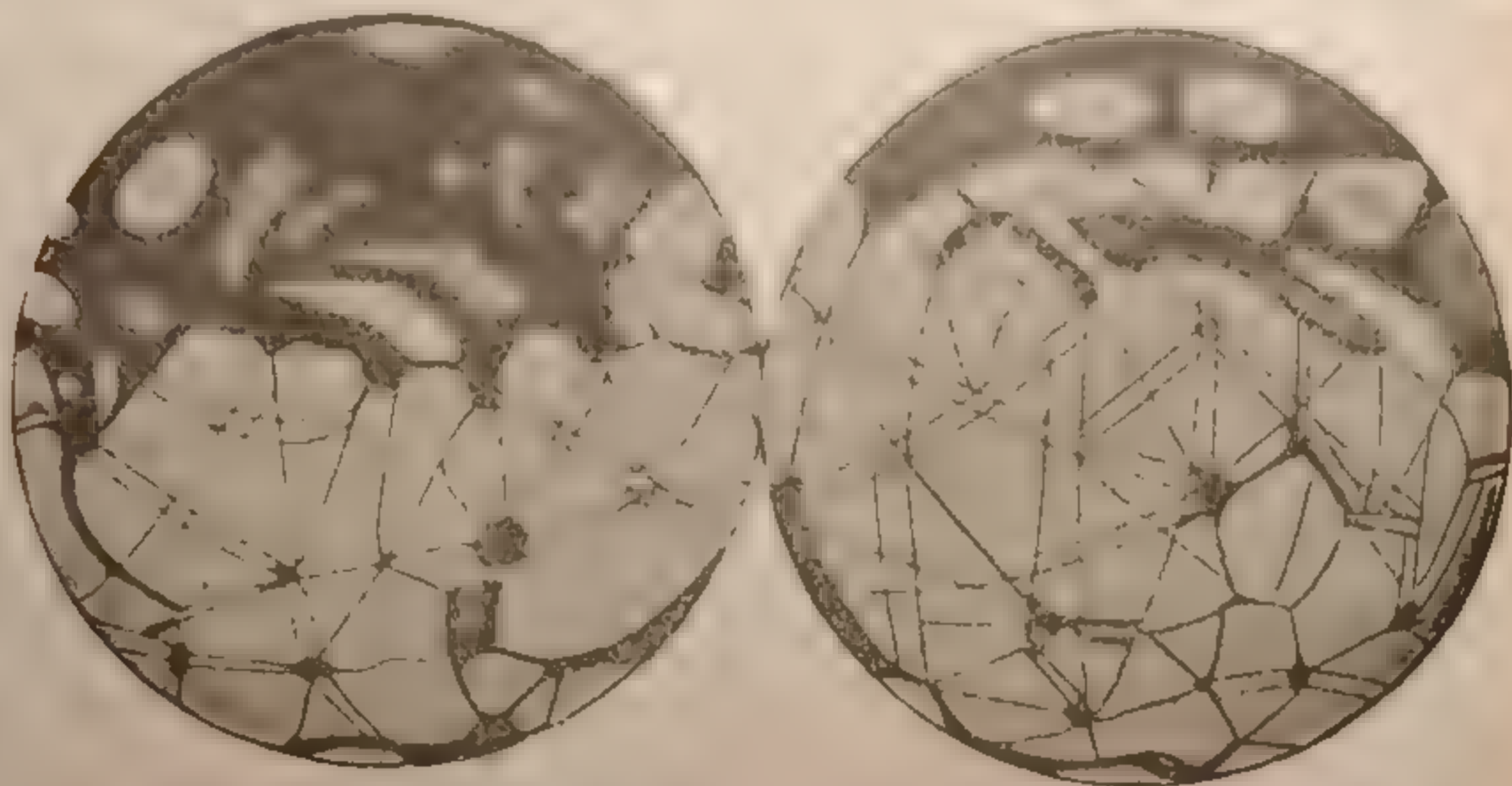



Fig. 240.

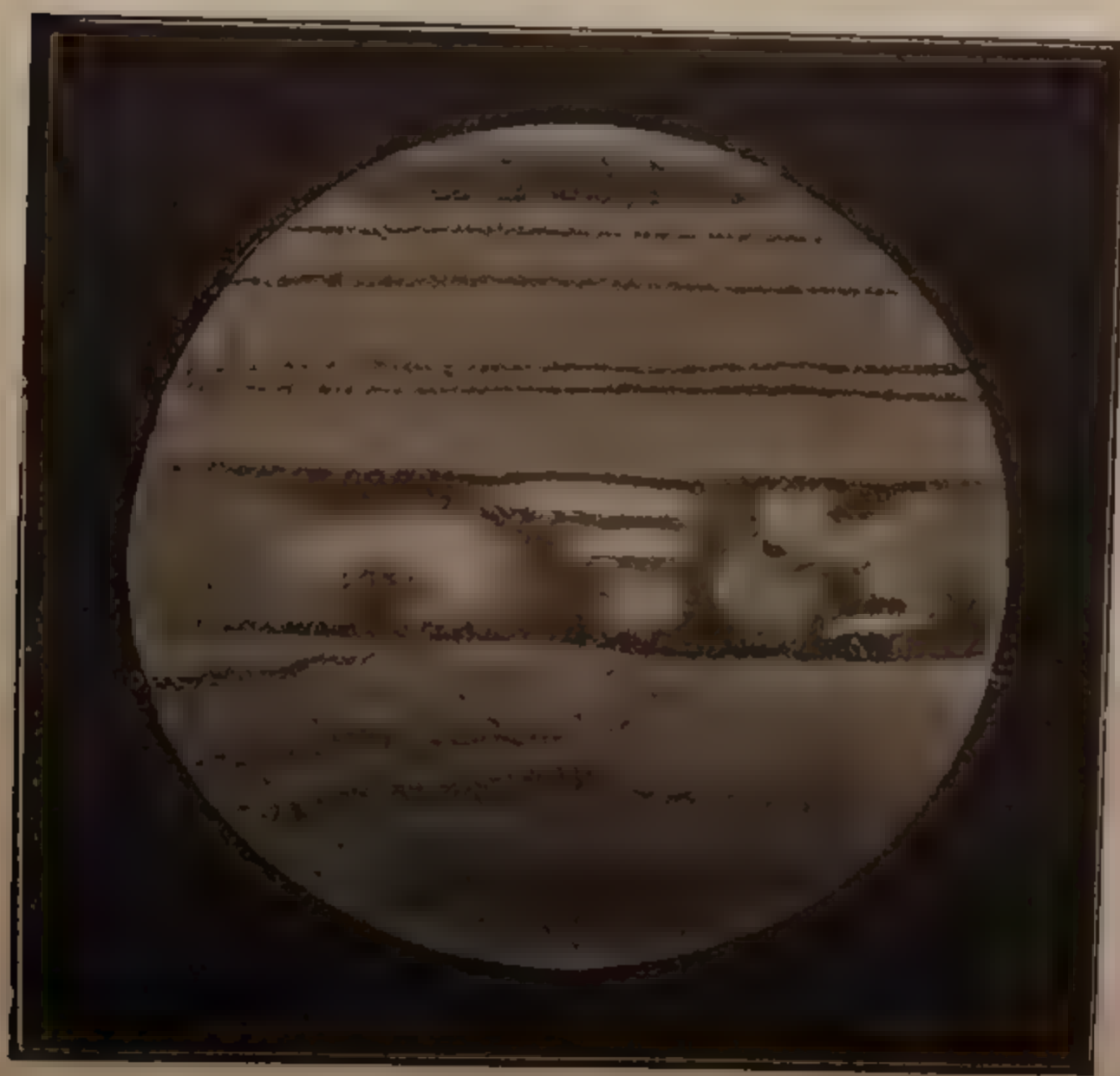



Fig. 241.

Su questo pianeta sono stati osservati dei monti; ed alcune linee oscure, chiamate impropriamente canali, in varî modi intersecantisi, mutabili continuamente, la cui natura non è ancora ben nota, (Fig. 240).

L'analisi della luce proveniente da Marte, ci prova l'esistenza dell'acqua su tale pianeta. Per questo si ritiene che su tale mondo vi possa essere una vita paragonabile a quella terrestre. Però, la maggiore rarefazione del-

l'atmosfera e la minore temperatura, inferiore a 0°, dovranno necessariamente produrre condizioni di vita dissimile dalla nostra. Onde, le ipotesi che si fanno sull'esistenza di esseri intelligenti sul pianeta Marte, sono semplici creazioni della fantasia.

Dopo Marte viene **Giove**, il più grande dei pianeti; il suo diametro è 11,06 volte ed il volume 1280 volte quello terrestre. La sua distanza dal Sole è di 5,24 volte quella della Terra.

Si suppone che questo pianeta sia ancora allo stato fluido; perciò non avrà probabilmente nè mari, nè continenti stabili, come la Terra. Al telescopio appare come un globo, alquanto schiacciato, solcato da larghe fasce più chiare, (Fig. 241). Queste fasce mutano continuamente di forma, colore e splendore, e dànno all'intero disco del pianeta aspetti incessantemente diversi.

Fig. 242.

La rotazione di Giove intorno al Sole si compie in quasi 12 anni dei nostri; e la rotazione sul suo asse, cioè la durata del giorno di Giove, è di $9^h\ 35^m\ 27^s$. Essendo l'asse di rotazione di Giove quasi perpendicolare al piano della sua orbita, ne segue che su questo pianeta le stagioni sono pochissimo variabili, e la durata del giorno è in ogni punto e in ogni tempo eguale a quella della notte. Inoltre, per la rapida rotazione, non vi è grande differenza di temperatura fra il giorno e la notte. Se vi è vita su tale mondo, come essa deve svolgersi placida, uniforme e monotona!

Giove ha nove lune, di cui la maggiore ha il diametro grande quasi la metà di quello terrestre. Le quattro lune maggiori, scoperte da Galileo, si possono scorgere con un semplice binoccolo.

Un interesse particolare offre il lontano **Saturno**, che è tra i pianeti il secondo per grandezza, dopo Giove. La distanza di Saturno dal Sole è quasi decupla di quella della Terra; ed il suo giro attorno al Sole si compie in 29 anni e 167 giorni dei nostri. Il diametro di questo pianeta è circa 9,3 volte quello della Terra; ma la rotazione su sè stesso la compie solo in $10^h\ 14^m$.

La caratteristica principale di Saturno è di essere circondato da un anello di piccolo spessore (circa 80 *km*); ma della larghezza di più di 50000 *km*, (Fig. 242). Fra l'anello ed il pianeta vi è uno spazio libero di circa 12000 *km*

di larghezza. Saturno ha 10 satelliti, alcuni dei quali sono visibili solo coi più potenti telescopi.

Urano viene dopo Saturno; è stato scoperto da Herschel nel 1781. Esso dista dal Sole 20 volte che la Terra; ne fa il giro in 84 anni dei nostri, ed il suo giorno ha la durata di 11 giorni terrestri.

Urano non può gareggiare con Saturno per la ricchezza e varietà del suo sistema; ma possiede esso pure quattro satelliti. Per la sua enorme distanza dal Sole e da noi, non se n'è potuto ancor ben definire la forma e l'aspetto della superficie. Si sono osservate bensì su di esso macchie e strisce di vario colore, e si ammette l'esistenza di una potente atmosfera che lo circonda; nè è improbabile che il pianeta stesso sia tutto o in grandissima parte almeno, allo stato gassoso.

Nettuno è il penultimo pianeta del sistema solare. La sua scoperta è uno dei trionfi più notevoli dell'astronomia e della matematica. L'astronomo francese Le Verrier (1811-1877), per spiegare alcune perturbazioni nel moto

Fig. 243.

del pianeta Urano, pensò che dovesse esistere un altro corpo celeste ignoto, che con la sua influenza a distanza producesse quelle perturbazioni. Col calcolo egli dedusse che tale corpo doveva trovarsi ad una data distanza e in una determinata posizione nello spazio. L'astronomo tedesco Galle, il 23 settembre 1846, puntando il telescopio nel punto indicato dai calcoli, vi scoperse il nuovo pianeta, che fu chiamato Nettuno!

Esso dista dal Sole 4,5 miliardi di *km*, ed il suo anno equivale a circa 165 dei nostri; il suo diametro è 4,3 volte quello della Terra. Per la sua grande distanza, esso non si osserva troppo chiaramente col cannocchiale; appare come un dischetto pallido, verdognolo, di luce uniforme. Si presume che sia circondato da un'atmosfera densa, di natura ignota, nella quale i raggi solari siano assorbiti in modo speciale e caratteristico. La sua costituzione è però certamente diversa dalla nostra; ed essa sarebbe per noi certamente irrespirabile.

Attorno a Nettuno finora fu scoperto un solo satellite.

L'ultimo pianeta è **Plutone**, scoperto dall'astronomo americano Lowell il 21 gennaio 1930. Anche la scoperta di questo pianeta è il risultato di laboriosi calcoli, iniziati fin dal 1905, per spiegare una lievissima perturbazione del moto di Urano, rimasta ingiustificata anche dopo la scoperta di Nettuno. Occorreranno ancora molti anni, prima che si possa dire qualcosa

su questo pianeta, pare fin d'ora accertato, che la sua distanza dal Sole sia di circa 6 miliardi di chilometri.

La Fig. 243 dà un'idea della grandezza comparativa dei primi otto pianeti e della Luna; e la tabella seguente ne riassume le caratteristiche principali:

Nome dell'astro	RISPETTO ALLA TERRA				Durata della rotazione sul proprio asse	Durata della rivoluzione attorno al Sole		Distanza media dal Sole rispetto alla Terra
	Diametro	Volume	Massa	Densità media	d. h. m. s.	anni	giorni	
Mercurio .	0,373	0,052	0,061	1,173	0.24. 0.50		87,969	0,38710
Venere . .	0,999	0,975	0,787	0,807	23.21.22		224,701	0,72333
Terra . .	1	1	1	1	23.26.4	1	0,0064	1
Marte . .	0,528	0,147	0,105	0,711	24.37.13	1	321,730	1,52369
Giove . .	11,061	1279,412	308,990	0,242	9.55.37	11	314,338	5,20280
Saturno. .	9,299	718,883	91,919	0,128	10.14.24	29	166,986	10,53886
Urano . .	4,244	69,237	13,519	0,195	?	84	7,390	19,18329
Nettuno .	3,798	54,955	16,469	0,300	?	164	280,113	30,05508
Plutone .	—	—	—	—	—	—	—	40 circa
Sole . . .	108,558	1283720	324439	0,253	25.4.29	—	—	— —
Luna. . .	0,273	0,020	0,013	0,615	27.7.43.11	—	—	— —

180. **Le nebulose** si presentano come masse di forma indefinita, dotate di luce diffusa; sono specie di nebbie luminose, disseminate nel cielo. La più comune è la *Via lattea*, formante un *universo* a cui appartiene il nostro sistema solare. L'analisi spettrale ci dice che alcune di esse sono fatte di corpi solidi e liquidi, cioè formate da corpi separati, esse sono costituite quindi da ammassi di stelle. Altre sono dei vapori incandescenti, tra cui predomina specialmente l'idrogeno.

Ve ne sono di immensamente grandi, e di immensamente lontane; l'enorme *nebulosa di Andromeda*, fotografata nel settembre 1929, ha un diametro di circa 45 000 anni-luce; dista dalla Terra più di 600 000 anni-luce! Essa è un ammasso stellare e costituisce un altro universo di enorme estensione, esterno al nostro. Vi sono anche *nebulose a spirali* alla distanza di 500 milioni anni-luce!

Una scoperta del 1932 dice che le nebulose si muovono con velocità proporzionale alla loro distanza dal Sole, allontanandosi da noi con velocità di molte centinaia di *km* al secondo.

La gravitazione.

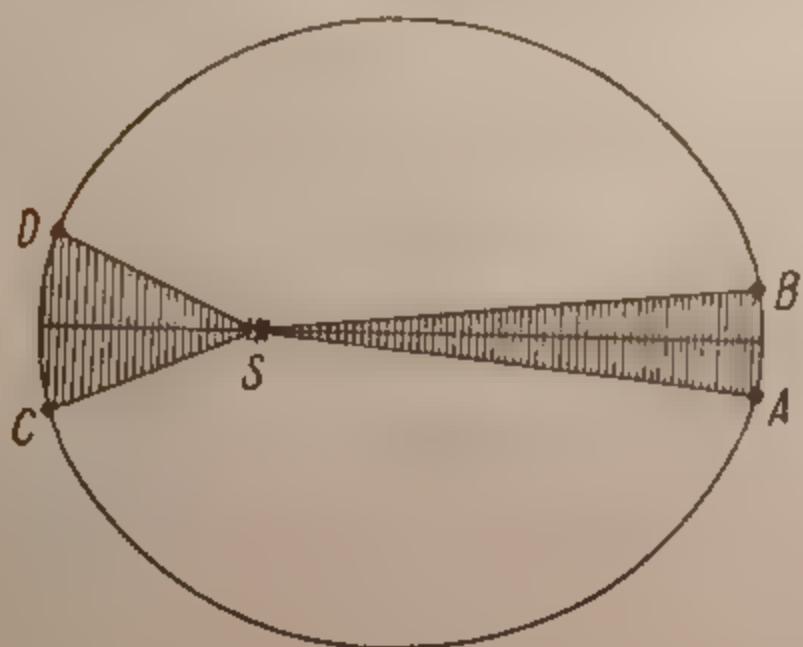
181. Leggi di Keplero. — Con l'osservazione Keplero [1] trovò che il moto dei pianeti è governato dalle seguenti leggi:

1. *Le orbite descritte dai pianeti sono curve chiuse, chiamate ellissi* [2], *di cui il Sole occupa uno dei fuochi.*

Fig. 244.

Si chiama **raggio vettore** il segmento che congiunge il centro del Sole col centro di un pianeta; esso è di lunghezza variabile, con la posizione del pianeta sulla sua orbita.

2. *Le aree descritte dal raggio vettore, sono proporzionali ai tempi impiegati a descriverle.*

In particolare, in tempi eguali il raggio vettore descrive aree eguali. Attorno all'*afelio* (§ 170) pertanto, essendo ivi maggiore la lunghezza del raggio vettore SA (Fig. 244), per descrivere un'area (SAB) eguale a quella (SCD) descritta attorno al *perielio*, il pianeta deve percorrere nello stesso tempo un arco $\widehat{AB} < \widehat{CD}$. Cioè la velocità del pianeta non è costante; ma è massima al perielio, minima all'afelio. I pianeti quindi non si muovono con moto uniforme.

Chiamasi **tempo periodico** la durata della rivoluzione di un pianeta attorno al Sole; cioè quello che comunemente chiamasi l'*anno*.

3. *I quadrati dei tempi periodici* (dei vari pianeti), *stanno tra loro come i cubi dei semi-grandi assi delle loro orbite.* Siano T e T' due pianeti (Fig. 245) le cui orbite supponiamo nello stesso piano, mentre in realtà non sono. Sia a il tempo periodico di T e a_1 quello di T'; la legge dice che:

$$1) \quad a^2 : a_1^2 = (OA)^3 : (OB)^3.$$

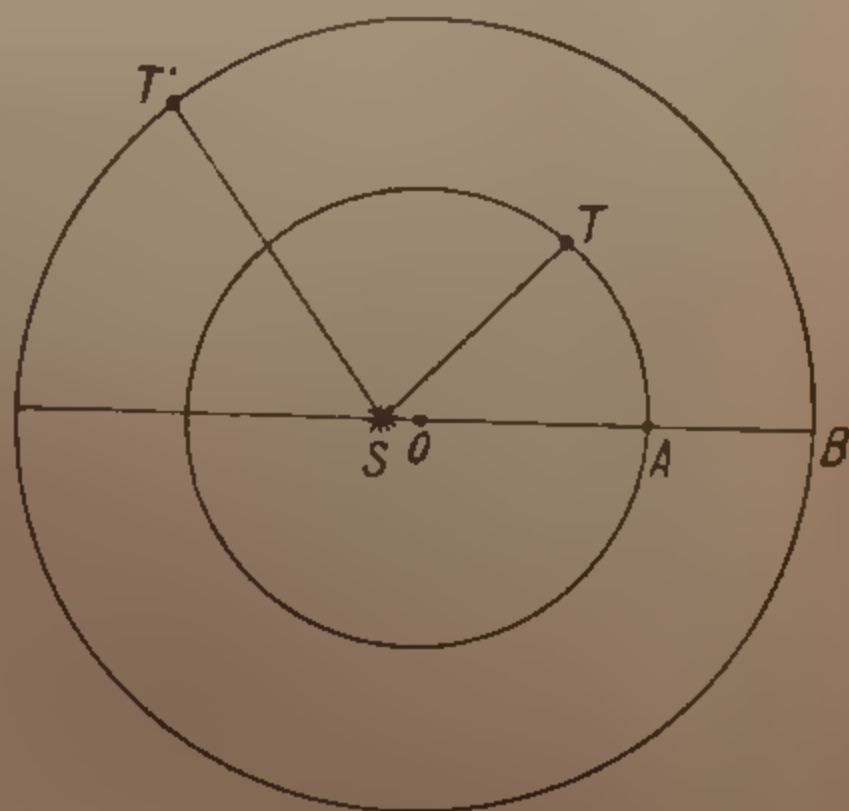



Fig. 245.

182. Legge di Newton. — La 1ª legge di Keplero suppone le orbite dei pianeti ellittiche. Ma sono ellissi molto prossime alla circonferenza; nelle considerazioni di questo paragrafo supporremo per approssimazione l'orbita circolare. Supporremo inoltre i corpi celesti puntiformi, coincidenti col loro centro.

---

(1) Kepler Johann, contemporaneo di Galileo; n. a Dorf Magstatt nel 1571, m. a Regensburg nel 1630. La scoperta delle due prime leggi è del 1609, della terza del 1618.
(2) Vedasi il cenno dato nella nota del § 170.

Sia P allora il pianeta, di massa m, in un punto dell'orbita (Fig. 246) ed S il Sole, al centro. Se l'orbita è circolare, per la 2ª legge di Keplero, il raggio vettore descrive in tempi uguali settori eguali, a cui corrispondono archi eguali; il pianeta quindi si muove di moto uniforme. Allora, (§ 115), sul pianeta agisce una forza centripeta, dovuta all'attrazione del Sole; il valore di essa, per la 2) del § 116, è:

Fig. 246.

$$F = \frac{4\pi^2 m r}{T^2};$$ in cui m è la massa del pianeta, r la sua distanza dal Sole, T il tempo in cui il pianeta compie il suo giro attorno al Sole (cioè il tempo periodico). La formula precedente si può scrivere, moltiplicando ambo i termini della frazione per r^2:

$$F = \frac{4\pi^2 m \times r^3}{r^2 \times T^2}.$$ Per la 3ª legge di Keplero, il rapporto $\frac{T^2}{r^3}$ è costante; indicandolo con k, è: $\frac{r^3}{T^2} = \frac{1}{k}$; sostituendo nell'ultima formula si ricava:

$$F = \frac{4\pi^2}{k} \cdot \frac{m}{r^2};$$ o anche, essendo $\frac{4\pi^2}{k}$ una costante, che si può indicare con K:

$$2) \qquad F = K \frac{m}{r^2}.$$ La forza adunque, con cui il Sole attira il pianeta, è proporzionale direttamente alla massa del pianeta, ed inversamente al quadrato della distanza di questo dal Sole.

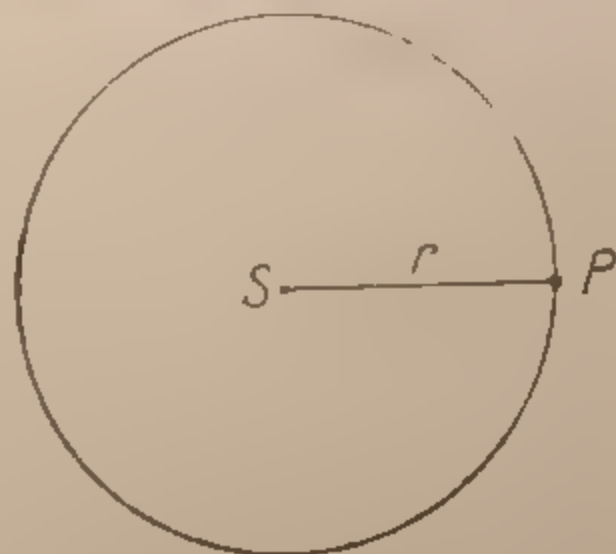
Facendo nella 2): $m = r = 1$, risulta $K = F$; cioè la costante K è il valore della forza con cui il Sole attira la massa uno posta alla distanza uno. Tale valore dipende manifestamente dalla massa del Sole, e possiamo assumerlo proporzionale ad essa. Cioè porremo: $K = \nu M$, dove M è la massa del Sole e ν una costante, che determineremo in seguito. Sostituendo nella 2), otterremo infine:

$$3) \qquad F = \nu \frac{M m}{r^2}.$$

Sappiamo dal 3º principio della dinamica (§ 106), che se il Sole attira il pianeta con la forza F, per reazione il pianeta attira il Sole con una forza $-F$ contraria; cioè l'attrazione è scambievole tra i due corpi. Oltre a ciò, tutto il ragionamento fatto è valevole, p. es., tra la Terra e la Luna, e in generale per due corpi qualsiasi nello spazio; quindi generalizzando, Newton enunciò la seguente legge fondamentale ed importantissima sulla gravitazione:

I corpi si muovono come se fossero sollecitati mutualmente da una forza diretta verso i loro baricentri, direttamente proporzionale alle loro masse, ed inversamente proporzionale al quadrato delle loro distanze.

Questa legge vale qualunque sia la grandezza e la posizione dei corpi che si attirano. Se i corpi sono sfere, essi agiscono come se la loro massa fosse concentrata nel centro, rispetto a cui si computa la distanza tra di essi.

Essa si chiama: **la legge di Newton, dell'attrazione universale, o della gravitazione.** Abbiamo dedotto questa legge da quelle di Keplero, con un ragionamento approssimato; perciò, se le leggi di Keplero fossero esatte, la legge di Newton sarebbe solo approssimata. Invece è stato riscontrato che la legge di Newton è esatta; essa è una delle più rigorose della Scienza; su di essa è basata tutta la meccanica celeste, la quale, in base alla legge stessa, predice molti anni prima e nei più minuti particolari: le ecclissi, il ritorno

delle comete, le maree, ecc.; in base ad essa, come vedemmo nel § 179, sono stati scoperti i pianeti Nettuno e Plutone.

Quindi, viceversa, sono le leggi di Keplero approssimate.

183. **Costante della gravitazione.** — Nella 3) del paragrafo precedente, ν è un coefficiente di proporzionalità, costante per tutti i corpi dell'universo; si chiama la **costante della gravitazione.** Il suo valore è stato determinato dal Cavendish [1], misurando la forza di attrazione di due corpi di massa nota, posti a distanza nota; in modo che nella 3) rimanga la sola incognita ν, che si può ricavare. Questa misura è tra le più difficili della Fisica, dovendo valutarsi forze debolissime, quali sono le attrazioni fra masse piccole, come quelle dei corpi di dimensioni ordinarie. Il Cavendish trovò (nel 1798):

4) $\nu = 6{,}5 \times 10^{-8}$ *dine.* Cioè, la massa di 1 *g* attira una massa eguale, posta a 1 *cm* di distanza, con la forza di 0,000 000 065 *dine*, equivalenti a circa 66 bilionesimi di grammo (§ 103 - 4).

La gravità è il caso particolare della gravitazione, in cui uno dei corpi sia la Terra; in tal caso F esprime il peso del corpo attratto dalla Terra.

Si comprende meglio ora, quanto accennammo al § 102; cioè che il peso di un corpo non è costante, ma diminuisce man mano che il corpo s'innalza, cioè si allontana dal centro della Terra. Con ciò il peso del corpo dovrebbe annullarsi solo a distanza infinitamente lontana dal centro della Terra. Ma l'influenza di altri corpi celesti può ridurre tale distanza a valore finito. Così, ad es., se un corpo si allontana dalla Terra, nella direzione della congiungente il centro della Terra con quello della Luna, avviene che il corpo è attratto contemporaneamente dalla Terra e dalla Luna; la prima forza va diminuendo, e la seconda va aumentando, man mano che il corpo si allontana dalla Terra. Vi è perciò un punto, tra la Terra e la Luna, in cui le due forze si fanno equilibrio, ed il corpo non pesa più.

Alla forza attrattiva della Terra contrasta, in parte, la forza centrifuga che un corpo risente per la rotazione della Terra attorno al suo asse. Se un corpo si allontana dalla Terra, muovendosi sul piano dell'equatore, e *conservando la velocità angolare della Terra*, aumentando la distanza dal centro della Terra diminuisce la forza di attrazione di questa; mentre aumenta la forza centrifuga (§ 116), perchè aumenta il raggio della circonferenza su cui il corpo ruota. Ad una certa distanza dalla Terra le due forze si fanno equilibrio, ed il corpo non pesa più. Tale punto di equilibrio sarebbe alla distanza di circa 6,5 volte il raggio terrestre; cioè a circa *m* 35 000 di altezza.

184. **Massa della Terra e del Sole.** — Se nella 3) M indica la massa della Terra, m la massa di un corpo alla sua superficie ed r il raggio terrestre, la F diventa allora la forza di gravità, cioè il peso p della massa m. Sappiamo che è (§ 102 - 2): $p = mg$; quindi sostituendo nella 3):

$$mg = \nu \frac{Mm}{r^2}, \qquad \text{da cui:} \qquad M = \frac{r^2 g}{\nu}.$$

Ponendo: $r = km\ 6370 = cm\ 637\,000\,000$; $\nu = 6{,}5 \,.\, 10^{-8}$ *dine*;

(1) Cavendish Henry; n. a Nizza nel 1731, m. a Londra nel 1810.

$g = cm\ 980$; si ricava che la massa della Terra è:

$M = g\ 6 . 10^{27}$ circa; cioè circa 6 settilioni di kg.

Riprendendo la 3), se ora M indica la massa del Sole, m quella della Terra, r la loro distanza, la forza d'attrazione tra essi è:

$F = \nu \dfrac{M\,m}{r^2}$; d'altra parte F è pure (§ 153) la forza centripeta che risente la Terra nella sua rotazione, cioè:

$F = \dfrac{4\pi^2 m r}{T^2}$, dove T è la durata dell'anno terrestre.

Eguagliando i due valori di F si ricava:

$$\nu \frac{M\,m}{r^2} = \frac{4\pi^2 m r}{T^2}, \qquad \text{da cui:} \qquad M = \frac{4\pi^2 r^3}{\nu T^2}.$$

Sostituendo in essa: $r = km\ 149\,000\,000$, ed alle altre lettere i valori corrispondenti noti, si trova che la massa del Sole è: $M = 324\,439\ m$; cioè quasi 325 000 volte più che la Terra!

In modo analogo si calcolano le masse degli altri pianeti.

Essendo noto il raggio terrestre $R = km\ 6370$, se ne calcola facilmente il volume: $v = \dfrac{4}{3} \pi R^3 = 1{,}083 \times 10^{24}\ dm^3$; e sapendo che la densità di un corpo è il rapporto $\dfrac{m}{v}$ tra la sua massa e il suo volume (§ 191), si può ricavare il valore *medio* della densità della terra:

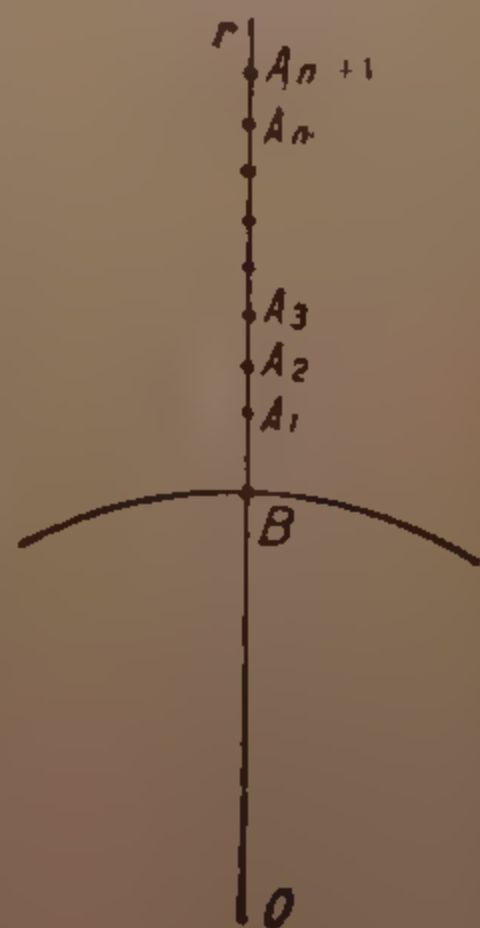
$$d = \frac{5{,}963}{1{,}083} = 5{,}6.$$

I corpi esistenti alla superficie della Terra (acqua, pietre, ecc.), hanno densità inferiore a tal valore; quindi, per compenso, verso il centro della Terra dovranno esistere corpi di alta densità; cioè probabilmente dei metalli.

185. Lavoro della gravità. — Nel § 132 abbiamo calcolato il lavoro eseguito dalla caduta di un grave, moltiplicandone il suo peso per l'altezza da cui cadeva. Ciò supponeva che il peso del corpo fosse costante; il che si è ammesso, per approssimazione, allorchè la caduta avveniva da piccole altezze.

Vediamo ora brevemente, come deve computarsi il lavoro della gravità, allorchè il corpo si muove per un'altezza qualsiasi.

Fig. 247.

Sia r (Fig. 247) la verticale passante da un punto B sulla Terra; calcoliamo il lavoro che bisogna compiere per trasportare l'unità di massa da A_1 ad A_{n+1}. Dividiamo questo intervallo in n parti eguali $A_1 A_2 - A_2 A_3 - \dots - A_n A_{n+1}$, e prendiamo n così grande che in ciascun intervallo la gravità possa considerarsi costante, ed eguale alla media dei valori che essa ha agli estremi dell'intervallo. La forza F_1 con cui la Terra attira l'unità di massa in A_1, si ricava dalla legge di Newton (§ 181 - 3), in cui M è la massa della Terra, facendovi $m = 1$ e sostituendo ad r la distanza $(O A_1) = r_1$ di

A_1 dal centro della Terra. Cioè:

$F_1 = \nu \frac{M}{r_1^2}$; parimenti, ponendo $(OA_2) = r_2$, il valore della stessa forza in A_2 è:

$F_2 = \nu \frac{M}{r_2^2}$; la media di questi due valori è:

$$F_{1-2} = \frac{F_1 + F_2}{2} = \frac{\nu M}{2}\left(\frac{1}{r_1^2} + \frac{1}{r_2^2}\right) = \frac{\nu M}{2} \cdot \frac{r_1^2 + r_2^2}{r_1^2 r_2^2};$$

ponendo $(A_1 A_2) = d$, cioè: $r_2 = r_1 + d$, e sostituendo, si ottiene:

$$F_{1-2} = \frac{\nu M}{2} \cdot \frac{r_1^2 + (r_1 + d)^2}{r_1^2 r_2^2} = \frac{\nu M}{2} \cdot \frac{r_1^2 + r_1^2 + 2 r_1 d + d^2}{r_1^2 r_2^2};$$

ra d è così piccolo (per ipotesi) che il suo quadrato d^2 è una quantità trascurabile; si può allora scrivere:

$$F_{1-2} = \frac{\nu M}{2} \cdot \frac{2 r_1^2 + 2 r_1 d}{r_1^2 r_2^2} = \frac{\nu M}{2} \cdot \frac{2 r_1 (r_1 + d)}{r_1^2 r_2^2} = \nu M \frac{r_1 r_2}{r_1^2 r_2^2} = \frac{\nu M}{r_1 r_2}.$$

Quindi il lavoro occorrente nell'intervallo $(A_1 A_2) = r_2 - r_1$, sarà (§ 129 - 1):

$$L_1 = F_{1-2}(r_2 - r_1) = \frac{\nu M}{r_1 r_2}(r_2 - r_1) = \nu \frac{M}{r_1} - \nu \frac{M}{r_2};$$

analogamente il lavoro negli altri intervalli $A_2 A_3 \ldots A_n A_{n+1}$, sarà, ponendo $(OA_3) = r_3, \ldots (OA_{n+1}) = r_n$:

$$L_2 = \nu \frac{M}{r_2} - \nu \frac{M}{r_3}, \quad \ldots\ldots \quad L_n = \nu \frac{M}{r_{n-1}} - \nu \frac{M}{r_n}.$$

Il lavoro totale L in tutto l'intervallo $A_1 A_{n+1}$ si otterrà dalla somma di tutti i lavori parziali:

$$L = L_1 + L_2 + \ldots + L_n = \nu M\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_3} + \ldots + \frac{1}{r_{n-1}} - \frac{1}{r_n}\right).$$

I termini della somma algebrica tra parentesi sono due a due opposti e si elidono, tranne il primo e l'ultimo termine; rimane perciò:

$$4) \qquad L = \nu M\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_n}\right) = \nu \frac{M}{r_1} - \nu \frac{M}{r_n}.$$

Quantunque il ragionamento fatto è approssimato, il risultato è rigoroso, perchè non dipende dal numero n in cui abbiamo diviso l'intervallo, cioè dal valore degli intervalli parziali; ma dipende solamente dalla posizione degli estremi A_1 - A_n dell'intervallo considerato.

186. **Potenziale della Terra.** — Supponendo nel problema precedente, che l'estremo A_n dell'intervallo sia infinitamente lontano, cioè facendo nella 4): $r_n = \infty$ e quindi $\frac{1}{r_n} = 0$, e ponendo $r_1 = r$, si ha:

$$5) \qquad L_A = \nu \frac{M}{r};$$

essa esprime il lavoro che occorre per allontanare l'unità di massa da un punto A (distante r dal centro della Terra) sino all'infinito, o meglio sino al limite del campo d'attrazione della Terra. Tale espressione chiamasi **potenziale della Terra nel punto A, o alla distanza** r. Ripetendo:

Il potenziale della Terra in un punto dello spazio, è il lavoro che occorre per trasportare l'unità di massa da quel punto fino al limite del campo d'attrazione della Terra.

[illegible] occorre un lavoro m volte più grande, cioè

$$6) \qquad L_m = \nu \frac{M\,m}{r}.$$

Ritornando alla 4) del paragrafo precedente, il 1° termine del 2° membro è il potenziale V, nel punto A_1, e il 2° termine è il potenziale V' nel punto A_{n+1}; quindi sostituendo:

$$7) \qquad L = V - V'.$$

187. **Superficie equipotenziale.** — Dalla 5) si vede, che il potenziale della Terra varia con r, diminuendo man mano che ci allontaniamo dalla Terra, fino ad annullarsi per $r = \infty$. Il potenziale quindi ha lo stesso valore in tutti i punti la cui distanza r dal centro della Terra è costante; cioè per i punti di una superficie sferica, concentrica alla Terra. Essa si chiama **superficie equipotenziale.** È chiaro che:

Il lavoro occorrente per trasportare un grave lungo una superficie equipotenziale è nullo.

Infatti in tal caso la forza di gravità agendo in direzione del raggio della superficie equipotenziale, perpendicolare alla direzione dello spostamento, il lavoro da essa compiuto è nullo (§ 129).

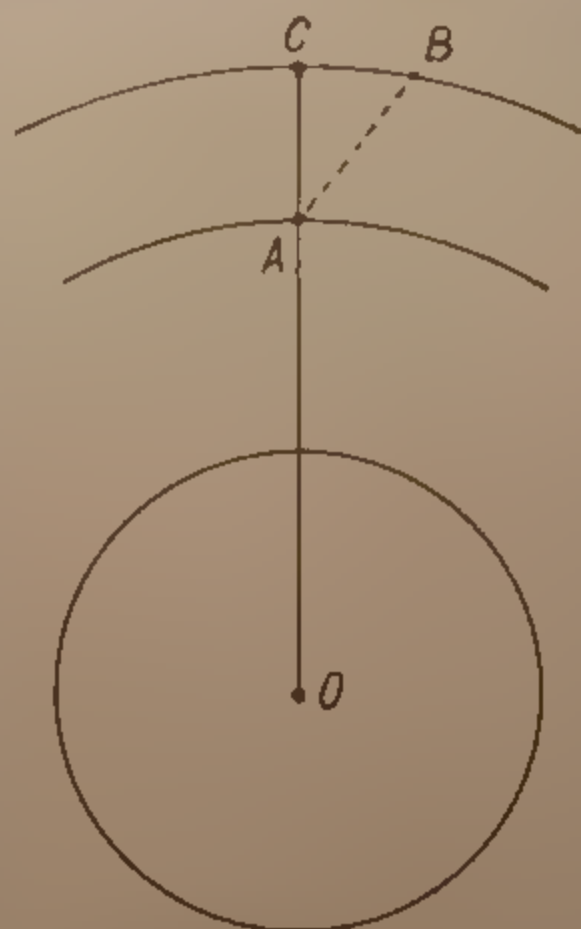
Vogliamo ora trasportare l'unità di massa da un punto qualunque A dello spazio ad un altro punto qualunque B, (Fig. 248). Trasportiamola prima da A a C lungo il raggio OC, essendo C sulla superficie sferica che contiene B; il lavoro occorrente è, per la 7):

$L = V_A - V_C$. Trasportiamola ora da C a B, cioè lungo una superficie equipotenziale; il lavoro è nullo. Quindi il lavoro totale occorrente è ancora $V_A - V_C$. Essendo $V_C = V_B$, si può anche dire:

Fig. 248.

8) $\quad L = V_A - V_B$. Tale lavoro dipende cioè solo dalle posizioni iniziale e finale dello spostamento, e si mantiene eguale qualunque sia la posizione che nel passaggio da A a B ha assunto la massa trasportata. Cioè, generalizzando:

Il lavoro occorrente per trasportare l'unità di massa da un punto ad un altro dello spazio, è indipendente dal cammino (anche curvilineo) percorso, ed è uguale alla differenza dei potenziali al punto di partenza ed a quello di arrivo.

Osserviamo che se il punto di partenza è più vicino alla Terra di quello d'arrivo, il potenziale nel primo punto è maggiore, ed il lavoro occorrente per lo spostamento è positivo; infatti in tal caso occorre effettivamente eseguire un lavoro, per vincere l'azione della gravità. Se invece il punto di partenza è più lontano, il lavoro è negativo; infatti in tal caso è la gravità che compie un lavoro e può vincere una resistenza che si opponga alla discesa del corpo.

Torniamo ancora a notare che [illegible] corpo di massa m, il lavoro occorrente è m volte quello della [illegible]

9) $$L_m = m(V_A - [illegible]$$

188. Velocità di un grave per sottrarsi all'attrazione terrestre.

Per la 6) del § 186, il lavoro perchè un grave di massa m sia trasportato dal livello del mare sino al limite del campo d'attrazione terrestre, è:

$L = \nu \frac{Mm}{R}$; essendo R il raggio terrestre ed M la massa della Terra. Se vogliamo fornire tale lavoro tutto alla partenza, lanciando il grave con una velocità iniziale v, occorre che tale lavoro sia eguale alla forza viva posseduta dal grave alla partenza; cioè:

$$\nu \frac{Mm}{R} = \frac{1}{2} m v^2; \quad \text{che si semplifica:} \quad \nu \frac{M}{R} = \frac{v^2}{2}; \quad \text{da cui:}$$

$$v = \sqrt{\frac{2 \nu M}{R}}.$$ Ponendo in essa: $\nu = 6{,}5\ 10^{-8}$ dine, (§ 182); $M = g\ 6.10^{27}$, (§ 183); $R = cm\ 637\,000\,000$, viene:

$$v = {}^{cm}/_{s} \sqrt{\frac{2 \times 6{,}5 \times 10^{-8} \times 6 \times 10^{27}}{637 \times 10^{6}}} = {}^{cm}/_{s}\ \mathbf{1\,106\,700};$$

cioè circa m 11 000 al secondo. Tale dovrebbe essere (teoricamente, senza la resistenza dell'aria) la velocità iniziale da imprimersi ad un proiettile, per lanciarlo sulla Luna o su un altro pianeta. Poichè sin'ora la massima velocità iniziale impressa ad un proiettile è di m 1300 al s, siamo ancora ben lontani da tale risultato. Nè, del resto, è possibile con un esplosivo imprimere ad un proiettile una velocità maggiore di 5 km al secondo. Velocità maggiori sarà possibile raggiungere con altri mezzi, (§ 265).

189. Maree. — Con la legge dell'attrazione universale si spiega anche il prodursi delle maree. La superficie del mare si abbassa e si innalza periodicamente, una volta ogni dodici ore; cosichè periodicamente scopre parte della spiaggia, per poi ritornare ad invaderla; producendo le così dette *alta marea* o *flusso*, e *bassa marea* o *riflusso*. La causa del fenomeno è l'attrazione lunare. Nella Fig. 249, L rappresenta la Luna (fuori proporzione in grandezza e nelle distanze) e T la Terra, che supponiamo circondata tutta dall'acqua.

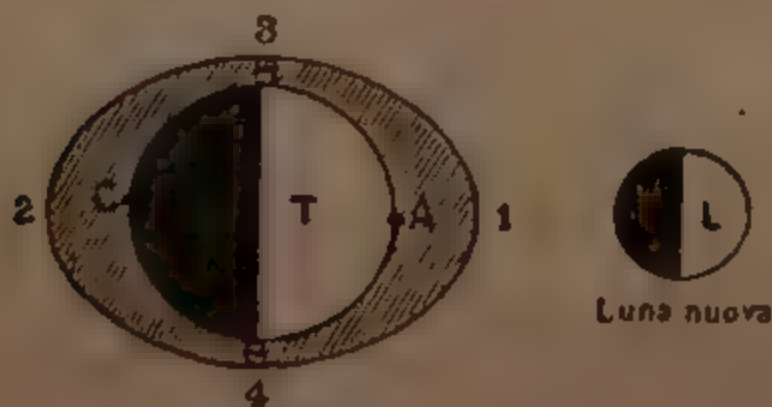



Fig. 249.

La superficie dell'acqua è rappresentata dalla linea esterna, mentre il cerchio interno rappresenta il nucleo solido della Terra. Per l'attrazione della Luna, tutti i punti della terra e dell'acqua sono sollecitati a muoversi verso la Luna; ma per la loro diversa distanza da questa, A è attratto

più fortemente [illegible] B e A più fortemente di C. Essendo le accelerazioni [illegible] (§ 100), i punti $A B C$ assumono accelerazioni diverse [illegible] per A, minima per C. Chiamando a l'accelerazione di B, sarà $a + f$ l'accelerazione di A ed $a - f$ quella di C. Per la rigidità della Terra, i punti $A B C$ devono muoversi insieme, acquistando la stessa accelerazione a, non così i punti dell'acqua vicini ad A e C, che conserveranno le accelerazioni distinte $a + f$ ed $a - f$. Quindi l'acqua in A è sollecitata a muoversi verso la Luna più celermente che la terra, e si forma il rigonfiamento 1. in C l'acqua ha accelerazione minore che la terra, e rimane indietro rispetto a questa, formando *un altro rigonfiamento* 2, contrariamente a quanto a prima vista avrebbe potuto supporsi. In conclusione in 1 e 2 si ha l'alta marea; in 3 e 4 si ha la bassa marea.

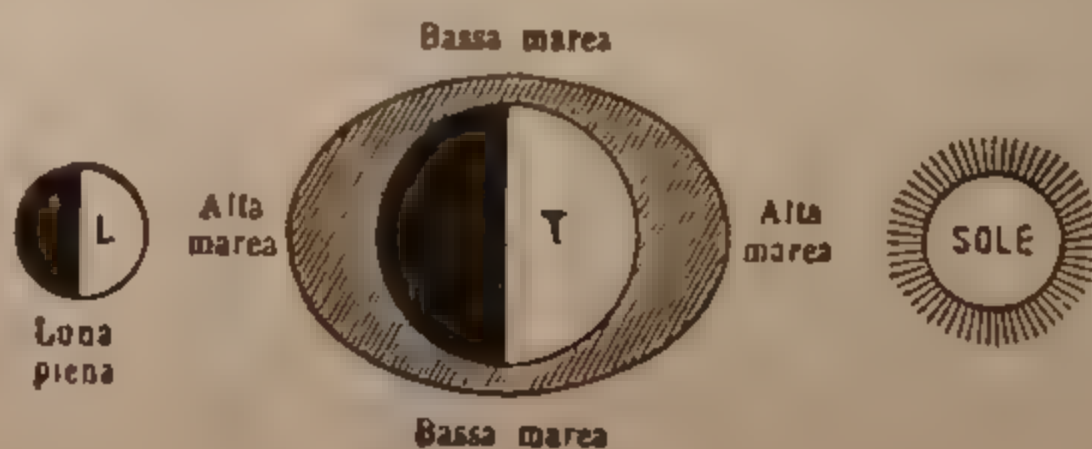
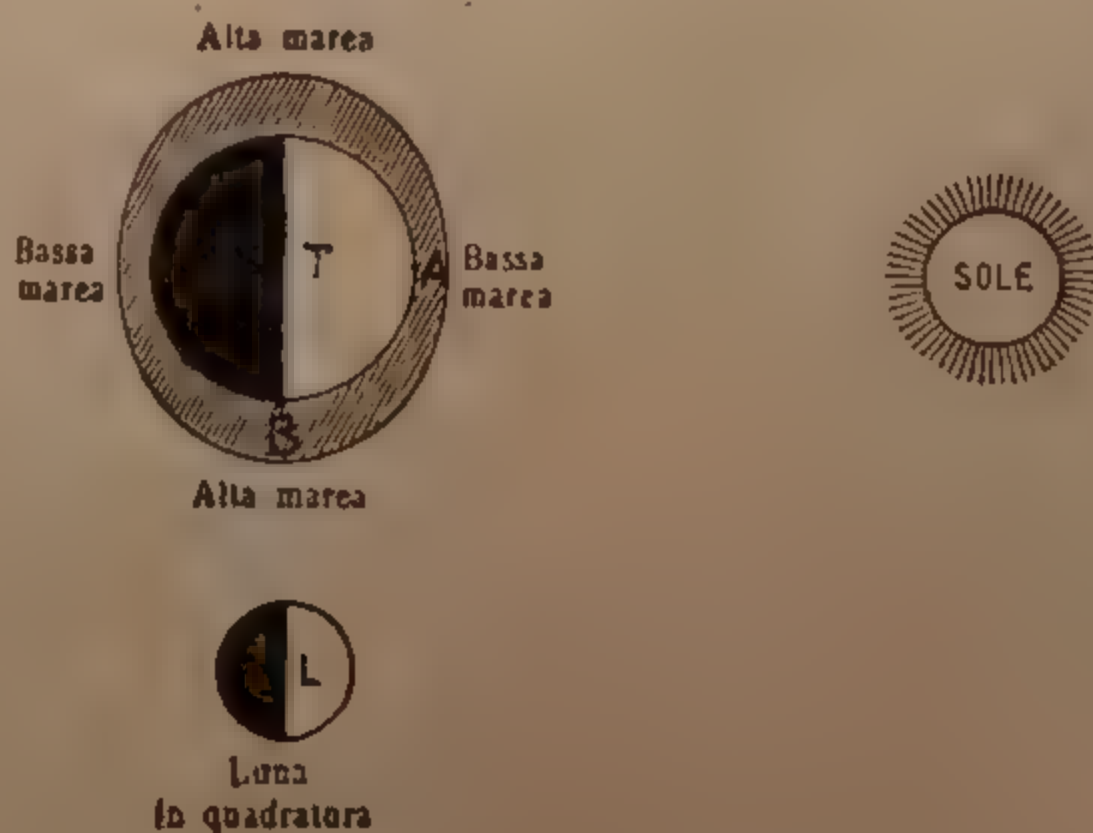
Per la rotazione della Terra sul suo asse, il rigonfiamento 1-2, si sposta in 6 ore verso 3-4, per ritornare dopo altre 6 ore alla primitiva posizione; e così via, col periodo di 12 ore, come già si è accennato.

Fig. 250.

Fig. 251.

Il Sole aggiunge al fenomeno la sua influenza; nel novilunio (Fig. 249), e nel plenilunio (Fig. 250), l'azione dell'attrazione solare concorda rispetto all'acqua, con quello della Luna, ed il flusso è massimo. Nel primo ed ultimo quarto lunare (Fig. 251), il Sole tende a produrre alta marea in A, dove la Luna produce la bassa marea; quindi l'azione del Sole è in contrasto con quella della Luna. Ma poichè l'attrazione del Sole, per la grande distanza, è minore di quella della Luna, predomina l'influenza di questa, che è circa 2,5 quella del Sole.

Tutto ciò si è detto nell'ipotesi che la Terra sia tutta coperta dalle acque; i continenti e l'attrito dell'acqua sul fondo del mare, ostacolano, ritardano e riducono il movimento delle acque, e quindi le maree diminuiscono di ampiezza, e non seguono esattamente il percorso della Luna.

Configurazioni speciali delle spiaggie influiscono sull'accumularsi dell'acqua in alcuni punti; così mentre il sollevamento dell'acqua nelle nostre coste del Tirreno è appena di una trentina di centimetri, a Trieste è di circa 80 *cm*, nella Manica raggiunge i 14 *m* e perfino 24 *m* nella baia di Fundy negli Stati Uniti.

190. Comete - Stelle cadenti - Meteoriti. Oltre ai pianeti, vi sono altri astri che si muovono anch'essi attorno al Sole, di cui risentono l'attrazione; ma descrivono orbite ellittiche molto allungate o anche paraboliche; si chiamano le **comete**.

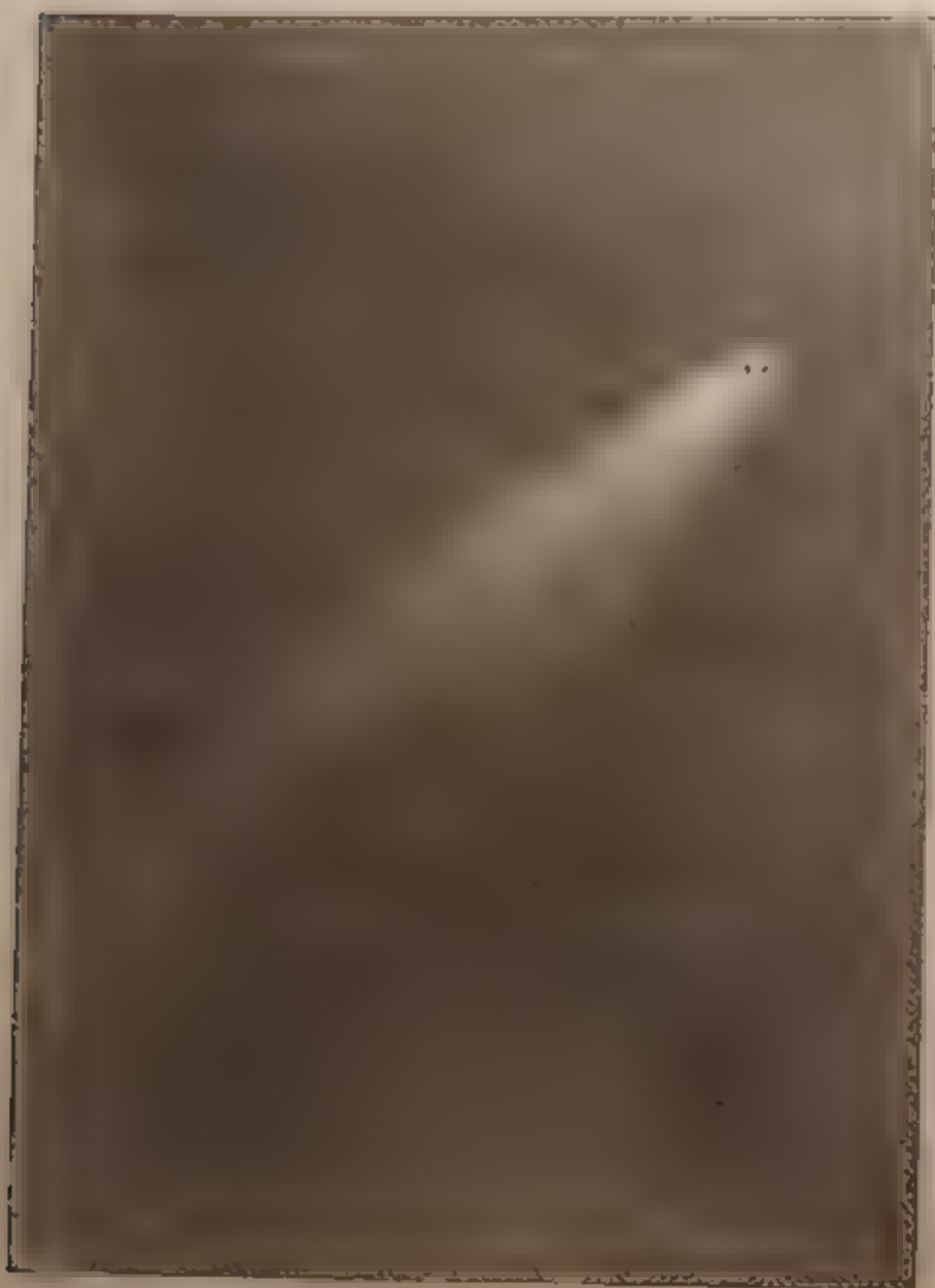



Fig. 252.

Quelle che descrivono orbite ellittiche, ripassano periodicamente vicino al Sole, e si rendono visibili solo al perielio. Si presentano talvolta con **code** e **chiome** gassose e luminose, di varia forma e lunghezza (Fig. 252). Queste sono le *comete periodiche*, e sono in piccolo numero.

Quelle che descrivono orbite paraboliche, una volta attraversato il nostro sistema solare, non ricompaiono più; attratte da altri Soli, vagano senza meta per il nostro universo. Sono le *comete aperiodiche*, e sono la maggior parte. Talvolta piccoli corpi esistenti nello spazio, passano così vicino alla Terra da essere attratti da questa, e cadono sulla Terra. Attraversando la nostra atmosfera con velocità da 10 a 30 *km* al secondo, si riscaldano talmente da diventare incandescenti e rendersi visibili come stelle moventisi rapidamente; si chiamano perciò *stelle cadenti*. Quasi sempre si consumano prima di arrivare a terra; se così non fosse la Terra sarebbe inabitabile, perchè si calcola che giornalmente nella nostra atmosfera penetrano

Fig. 253.

[illegible] Questi corpi, [illegible] arrivano effettivamente a terra, e son[o detti] meteoriti, o aeroliti. Possono pesare da una frazione di grammo a parecchie tonnellate, sono composti generalmente di ferro, nichel, silice, ecc., e di altri elementi che esistono sul nostro pianeta. La Fig. 253 mostra la meteorite gigante caduta a Willamette, Oregon (Stati Uniti d'America).

Vi sono epoche dell'anno in cui tali stelle cadenti si vedono con molta frequenza, e se ne contano a decine per ogni notte. Ciò accade, p. es., a metà di agosto, allorchè la Terra passa per una zona del cielo in cui abbondano questi corpuscoli, che finiscono per cadere sulla Terra.

Qualche volta un corpo luminoso, di dimensioni notevoli, quasi come un globo di fuoco, attraversa con grande velocità lo spazio; irradiando attorno a sè luce viva, e lasciandosi dietro una scia lucente, che persiste anche qualche minuto. Quello è un bolide; accompagnato o seguito da forti detonazioni che si odono anche a 100 *km* di distanza. Ad esse segue lo scoppio del bolide in gran numero di frammenti luminosi, proiettati nello spazio in direzioni diverse. Tali frammenti, cadendo sulla terra, formano una pioggia di pietre meteoriche.

191. **Il mondo solare.** — Con la nozione dei bolidi, stelle cadenti, asteroidi, comete, ecc., viene ampliandosi e complicandosi la concezione del sistema solare, che in origine era stata ideata in modo assai semplice.

L'insieme del nostro sistema appare oggi come un immenso meccanismo cosmico, in cui tutto si muove, ed in cui il moto è la causa prima della sua esistenza. Innumerevoli comete lo percorrono in ogni senso; fiumane di corpi cosmici lo attraversano ovunque, in ogni plaga. Pianeti e satelliti, comete e meteoriti, sono la manifestazione di formidabili energie, che animano il mondo solare ed alle quali questo obbedisce con mirabile armonia.

192. Problemi sulla Cosmografia e sulla Gravitazione.

a) Problemi risoluti.

1. *Che ore sono a New-York, allorchè a Roma è mezzogiorno?*

Risoluzione. - La longitudine di Roma è 12° 27′ est; quella di New-York è 73° 40′ ovest. La differenza di longitudine è quindi:

$$\varphi = 12^\circ\,27' + 73^\circ\,40' = 86^\circ\,7'.$$

Essendo (§ 173) la differenza del mezzogiorno di 1^h per 15°, la differenza del mezzogiorno tra Roma e New-York è:

$$x = \left(\frac{86^\circ\,7'}{15^\circ}\right)^h = 5^h\,44^m \text{ (circa).}$$

E poichè New-York è ad ovest di Roma, il suo mezzogiorno è in ritardo; cioè allorchè a Roma sono appena le 12^h, a New-York sono le $12^h - 5^h\,44^m$; quindi sono le $6^h\,16^m$ (di mattina).

2. *Calcolare in* kgm *il lavoro necessario per lanciare un proiettile della massa di* g *1000, sulla Luna.* (Trascurare la resistenza dell'aria).

Risoluzione. Il lavoro occorrente per lanciare un grave di massa m fuori dell'attrazione terrestre, per la 6) del § 186 è:

$L_m = \nu \frac{M m}{R}$, dove M e R sono la massa e il raggio terrestre; cioè dobbiamo porre: $\nu = 6{,}5 \cdot 10^{-8}$ dine; $M = g\ 6 \times 10^{27}$; $m = g\ 1000$; $R = cm\ 637 \cdot 10^6$. Sostituendo si ottiene:

$$L_m = erg \frac{6{,}5 \times 10^{-8} \times 6 \times 10^{27} \times 10^3}{637 \times 10^6} = erg\ \ 61\,224\,490 \times 10^7 =$$

$$= kgm \frac{61\,224\,490}{9{,}8},\ (\S\ 131) = \textbf{kgm 6 250 000} \text{ circa.}$$

Cioè quanto occorrerebbe per sollevare 62,5 *tonn.* all'altezza di 1 *metro.*

b) Problemi da risolvere.

(In questi esercizi si suppongano i pianeti sferici, e le loro orbite circolari).

1. Due paesi, di egual latitudine, differiscono di longitudine per 12° 24′ 16″; qual'è la loro distanza geografica in *km*, se la latitudine è di 45°?

2. Quanto tempo impiegherebbe un treno diretto, con la velocità di 60 *km* all'ora, ad arrivare: sulla Luna, sul Sole, su Marte?

3. Con che velocità si muove nello spazio un punto dell'equatore terrestre, per effetto della rotazione di esso sul suo asse, o per la rivoluzione attorno al Sole?

4. Supposto di rappresentare la Terra con un cerchietto del diametro di 1 *cm*, con che diametro dovremo rappresentare la Luna, il Sole e gli altri pianeti?

5. Supposto di rappresentare la Terra con un punto, distante dal Sole 10 *cm*, a che distanza dovremo rappresentare gli altri pianeti?

6. Essendo la velocità della luce di 300 000 *km* al secondo, calcolare quanto tempo essa impiega dai varî pianeti alla Terra.

7. Verificare la 3ª legge di Keplero per gli otto pianeti.

8. Quanto pesa sul Monte Bianco (*m* 4800 sul mare) un corpo che al livello del mare pesa 100 *kg*? (Si prenda il raggio terrestre = *km* 6370).

9. Calcolare il lavoro occorrente a portare la Luna a distanza infinita dalla Terra.

10. Nell'ipotesi del problema precedente, calcolare la velocità che si dovrebbe imprimere alla Luna, nella direzione della congiungente i centri della Terra e della Luna.

11. Supponendo che cessasse il moto di rivoluzione della Terra e della Luna, e quindi questa cada sulla Terra, calcolare le velocità dei due corpi al momento dell'urto.

12. In qual punto della congiungente il centro della Terra con quello della Luna, si annulla la gravità? (§ 182; nella Tab. del § 179, e al § 176 vi sono i dati occorrenti).

13. A quale distanza dal centro della Terra, sul piano dell'equatore, si annulla la gravità per la forza centrifuga? (§ 182).

MECCANICA DEI FLUIDI

IDROSTATICA

193. **L'idrostatica,** o *statica dei liquidi, studia le proprietà dei liquidi in quiete.*

Proprietà caratteristiche dei liquidi sono, come si è visto al § 8: la **fluidità** e l'invariabilità di volume. Per la fluidità i liquidi non hanno forma propria, ma assumono sempre quella del recipiente che li contiene. Si trae profitto dell'invariabilità di volume, per la misura del volume dei liquidi e dei solidi (§ 9).

194. **Volume specifico - Peso specifico - Densità.** — Corpi dello stesso volume, ma di sostanza diversa, pesano diversamente; così, ad es., un dado di ferro pesa più di un dado di legno di egual grandezza; ed un bicchiere pieno di acqua pesa meno dello stesso bicchiere pieno di mercurio.

Parimenti, per formare lo stesso peso con corpi di sostanza diversa, occorre prenderne un volume diverso. La Fig. 254 mostra la lunghezza comparativa di bacchette di diversa sostanza, ma di egual sezione, per formare lo stesso peso; e la Fig. 255 mostra a che altezza arrivano pesi eguali di liquidi diversi, posti in recipienti di eguale sezione.

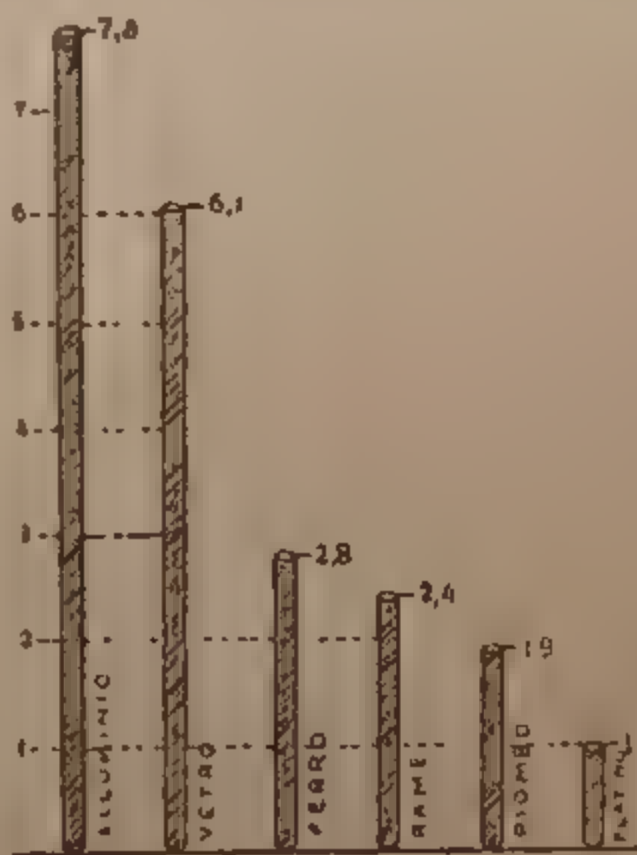
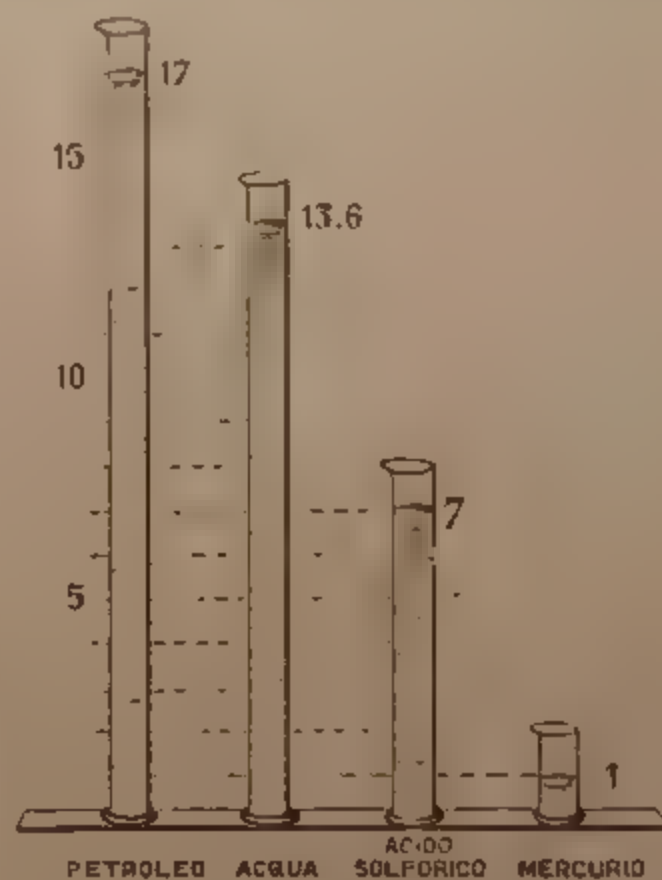



Fig. 254.

Fig. 255.

Si chiama **volume specifico** *di un corpo, il volume dell'unità di peso di esso.* Sia P il peso e V il volume del corpo; sarà:

Volume specifico: $$v = \frac{V}{P}.$$

Si chiama **peso specifico assoluto** *di un corpo, il peso dell'unità di volume di esso.* Sia P il peso e V il volume del corpo; sarà:

Peso specifico assoluto: $$p_a = \frac{P}{V} \qquad 1)$$

Si chiama **peso specifico relativo** (all'acqua) *il rapporto tra il peso del corpo ed il peso di un egual volume di acqua distillata a 4° C.* Sia P il peso del corpo e P' quello di un egual volume di acqua distillata a 4° C, è:

Peso specifico relativo: $$p_r = \frac{P}{P'} \qquad 2)$$

Si chiama **densità** *di un corpo la massa dell'unità di volume di esso.* Chiamando M la massa e V il volume del corpo, [illegible]

Densità: $$d = \frac{M}{V} \qquad 3)$$

Siccome in pratica il peso P e la massa M di un corpo sono misurati dallo stesso numero, e parimenti il volume V del corpo e il peso P' di un egual volume di acqua sono misurati dallo stesso numero, così *peso specifico assoluto, peso specifico relativo e densità, per uno stesso corpo sono espressi dallo stesso numero*; e usualmente si dice indifferentemente peso specifico o densità, quantunque in realtà siano cose diverse.

Dalla 1) si ricava:

$$P = V \cdot p; \qquad 4)$$

cioè il peso di un corpo può calcolarsi moltiplicandone il volume per il peso specifico; il peso P sarà espresso in *grammi, chilogrammi* o *tonnellate*, a secondo che il volume V sarà espresso in cm^3, in dm^3, o in m^3.

Esempio. *Quanto pesa un blocco di marmo, a forma di cubo, avente cm 80 di lato?* Peso spec. del marmo = 2,7. Il volume del blocco è:

$$V = \text{cm}^3\ 80^3 = \text{cm}^3\ 512000 = \text{dm}^3\ 512 \qquad \text{quindi:}$$
$$P = Vp = \text{kg}\ (512 \times 2{,}7) = \text{kg}\ 1382{,}4.$$

La tabella seguente contiene il peso specifico di alcuni corpi fra i più noti:

TABELLA

SOSTANZA	Peso specifico	SOSTANZA	Peso specifico
SOLIDI		LIQUIDI	
Abete, legno secco	0,48	Acido nitrico	1,51
Acciaio, ferro	7,81	Acido solforico	1,84
Alluminio	2,65	Acqua distillata	1,00
Argento	10,51	Acqua del mare	1,027
Avorio	1,92	Alcool	0,81
Ghiaccio	0,91	Benzina	0,75
Marmo	2,7	Cloroformio	1,52
Oro	19,36	Essenza di trementina	0,87
Ottone	8,3	Etere	0,74
Piombo	11,35	Glicerina	1,28
Platino	21,36	Latte	1,03
Rame	8,90	Mercurio a 0°	13,59
Sughero	0,24	Olio d'oliva	0,91
Vetro	2,6 circa	Petrolio	0,80
Zinco	6,9	Solfuro di carbonio	1,29

Come si vede, il corpo *più pesante* (a pari volume) è il platino che pesa 21,4 volte più dell'acqua. Tra i liquidi il *più pesante* è il mercurio, che pesa 13,59 volte più dell'acqua, ed è ancora più pesante dei metalli usuali: ferro, rame, piombo, ecc.

Una bottiglia da 1 litro, piena di mercurio, pesa *kg* 13,59!

195. **Compressibilità ed elasticità dei liquidi.** — Per lungo tempo si credette che i liquidi fossero incompressibili. Si cita un'esperienza degli Accademici del Cimento, i quali nel 1661 tentarono di provare, senza riuscirvi, che i liquidi si comprimono. Presero un involucro sferico di lamiera d'argento, lo riempirono completamente d'acqua, chiudendo ermeticamente la piccola apertura da cui l'acqua fu introdotta; indi picchiarono con un martello sull'involucro. Se l'acqua fosse stata incompressibile, la sfera non avrebbe potuto ammaccarsi. Fatto l'esperienza, la sfera si ammaccò; ma contemporaneamente la superficie esterna dell'argento si ricoprì di minutissime goccioline, come fine rugiada. Ciò indicava che l'acqua usciva da piccolissimi pori della lamiera. Onde, se l'acqua usciva, non si potè provare che essa si comprimeva; si provò invece che anche l'argento è poroso (§ 17).

Più tardi, si riuscì a provare che i liquidi si comprimono, sebbene di pochissimo. La compressibilità dei liquidi si misura col *piezometro*.

196. **Piezometro.** — Esso è formato da un'ampolla *B* di vetro, Fig. 256, che porta in alto un cannello *ED capillare*, cioè con foro piccolissimo, e graduato.

Fig. 256.

L'ampolla *B* è contenuta in un recipiente *AA'* ben chiuso, e munito di un cannello di vetro *OC*, pure capillare e graduato. In *B* si mette il liquido da studiare fino ad una divisione *D* del cannello; su di esso vi è mercurio, che può rimanere sopra, sebbene più pesante, perchè il tubo è capillare. *A'A* è pieno d'acqua fino alla divisione *O* del cannello. Ciò posto, si esercita una forte pressione sul mercurio di *D*, per mezzo di una pompa (omessa nella Figura) collegata al tubo *P*. Si osserva allora che il liquido nel cannello scende da *D* ad *E*, cioè il liquido di *B* diminuisce di volume.

Può sorgere il dubbio che l'abbassamento *DE* anzichè a una compressione del liquido, sia dovuto a una dilatazione dell'ampolla *B*, per l'azione della pressione. Per questo si è circondato *B* col recipiente di controllo *AA'*; esercitando la pressione dentro *B*, si vede nel cannello *OC* il liquido salire da *O* a *C*. L'ampolla *B* si è quindi veramente dilatata; ma si osserva che (*OC*) è minore di (*DE*). Cioè l'abbassamento da *D* ad *E* è in parte dovuto ad una compressione del liquido, misurata dalla differenza tra il volume (*DE*) e il volume (*OC*). Cessando la pressione con la pompa, il liquido da *E* ritorna nuovamente in *D*; ciò dimostra che il *liquido è elastico*.

197. Leggi della compressibilità dei liquidi. — Le variabili in questo fenomeno sono:

la forza F con cui si preme sul liquido,
il volume V del liquido contenuto nel piezometro B,
l'area della superficie s premuta, cioè la sezione del cannello in E.
la qualità del liquido premuto,

e con queste quantità varia la compressione C, cioè la diminuzione di volume del liquido studiato.

Con l'esperienza si è trovato che:

La compressione di un liquido: è proporzionale direttamente alla forza premente ed al volume del liquido; inversamente all'area della superficie premuta; ***varia da liquido a liquido.***

Queste leggi possono esprimersi con la formula:

$$C = K\frac{FV}{s}. \tag{5}$$

Il coefficiente K chiamasi **coefficiente di compressibilità**, e varia da liquido a liquido. Per l'acqua è appena $K = 0{,}000046$ (F in kg, s in cm²); gli altri liquidi si comprimono tanto più quanto più sono volatili; l'alcool si comprime circa il doppio e l'etere circa il triplo dell'acqua.

Stante la piccolissima compressibilità, si ritiene praticamente costante la densità di un liquido alle diverse profondità.

Esempio. *Di quanto si comprimono 300* cm³ *d'acqua, se la forza esercitata su di essa è di 20* kg *per ogni* cm²*?*

Per la 5) sarà:

$$C = \text{cm}^3\,(0{,}000046 \times 20 \times 300) = \text{cm}^3\,0.276.$$

198. La pressione. — Si abbia un mattone a forma di parallelepipedo rettangolo, delle dimensioni di *cm* (20 × 10 × 5), che pesi 2 *kg*. Possiamo appoggiarlo su un tavolo in tre modi diversi, come indica la Fig. 257. Nella posizione A la superficie di appoggio è:

$$s_1 = cm^2\,(20 \times 10) = cm^2\,200;$$

nella posizione B è:

$$s_2 = cm^2\,(20 \times 5) = cm^2\,100;$$

nella posizione C è:

$$s_3 = cm^2\,(10 \times 5) = cm^2\,50.$$

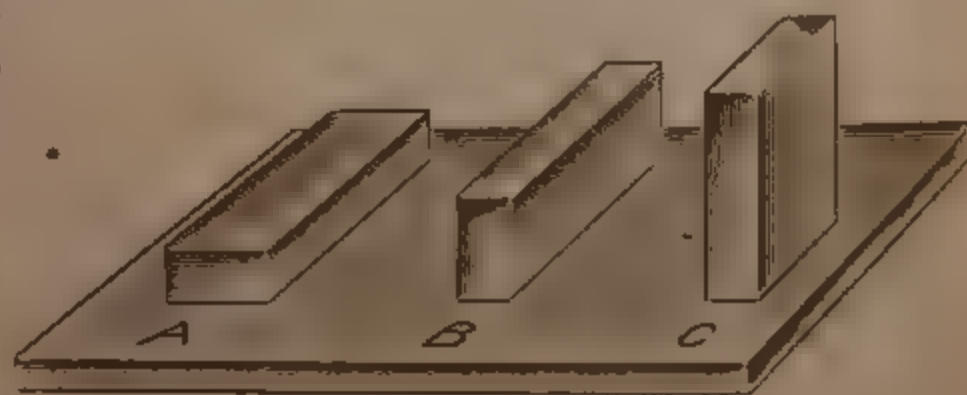



Fig. 257.

In tutti e tre i casi il mattone fa forza sul tavolo con tutto il peso di 2 *kg*. Ma nel 1° caso questo peso si ripartisce su una base di 200 *cm²*; quindi ogni *cm²* sopporta $g\,(2000 : 200) = g\,10$. Nel 2° caso ogni *cm²* sopporta $g\,(2000 : 100) = g\,20$, e nel 3° caso $g\,(2000 : 50) = g\,40$. Questi numeri 10 – 20 – 40 indicano la pressione esercitata dal mattone sul tavolo nei tre casi. Concludendo:

Fig. 258.

La pressione è la forza esercitata sull'unità di superficie.

Se abbiamo 4 cilindri di metallo, *tutti dello stesso peso*, ma di sezione diversa, e li mettiamo nella sabbia, vediamo che essi affondano diversamente (Fig. 258), poichè esercitano sulla sabbia *pressione* diversa. Vediamo così che la forza non è la sola cosa da considerare per l'effetto prodotto, ma bisogna tener conto anche della pressione.

Sia F la forza che preme sulla superficie s; la pressione sarà:

6) $$p = \frac{F}{s}$$ da cui:

7) $$F = p \, . \, s.$$

Si diminuisce la pressione esercitata da un corpo, aumentando la superficie di contatto. Per tale ragione si adoperano le *racchette* (Fig. 259) per non

Fig. 259.

affondare camminando sulla neve; gli sciatori (Fig. 260) possono scivolare sulla neve, ponendo sotto le scarpe lunghe assicelle di legno; si può passare su un pavimento costruito di fresco, camminando su assi di legno messivi sopra; ecc.

Fig. 260.

199. **Unità di pressione.** — Dalla 6) del paragrafo precedente si ottiene $p = 1$ per $F = 1$ ed $s = 1$; cioè:

Unità di pressione è quella esercitata dall'unità di forza sull'unità di superficie.

Se l'unità di forza è la dine (§ 103) e per unità di superficie si prende il cm^2, si ricava *l'unità assoluta di pressione*, che è *una dine per* cm^2; essa si chiama **la baria.**

Praticamente per unità di pressione si prende quella esercitata da 1 kg. su un cm². È ancora molto usata come unità **l'atmosfera** che è la pressione media esercitata sulla terra dall'atmosfera a livello del mare, ed equivale a 1033 *grammi* per cm^2, (§ 221).

200. **Principio di Pascal.** — La pressione esercitata su un punto di un solido, per la rigidità di questo rimane localizzata in quel punto. Essendo invece i liquidi fluidi, se si esercita una pressione in un punto, essa si trasmette da punto a punto in tutte le direzioni; ed essendo i liquidi

anche elastici, la pressione si trasmette integralmente. Da ciò scaturisce il seguente principio, dovuto a Pascal [1].

La pressione esercitata in un punto di un liquido, si trasmette con eguale intensità in tutte le direzioni.

La dimostrazione sperimentale si fa con un apparecchio, costituito da una sfera cava di metallo, avente parecchi piccoli fori in vari punti della sua superficie (Fig. 261). Essa è sormontata da un cilindro, dentro cui scorre uno stantuffo a tenuta. Sfera e cilindro sono pieni d'acqua, che non esce spontaneamente dai forellini, perchè il cilindro è chiuso dallo stantuffo; premendo però su questo, l'acqua esce dai fori, *formando zampilli di eguale lunghezza.* Poichè la lunghezza dello zampillo dipende dalla pressione, il principio è dimostrato. Gli zampilli hanno la direzione dei raggi della sfera, cioè perpendicolare alla superficie di questa; quindi:

La pressione esercitata dai fluidi è in ogni punto in direzione perpendicolare alla superficie premuta.

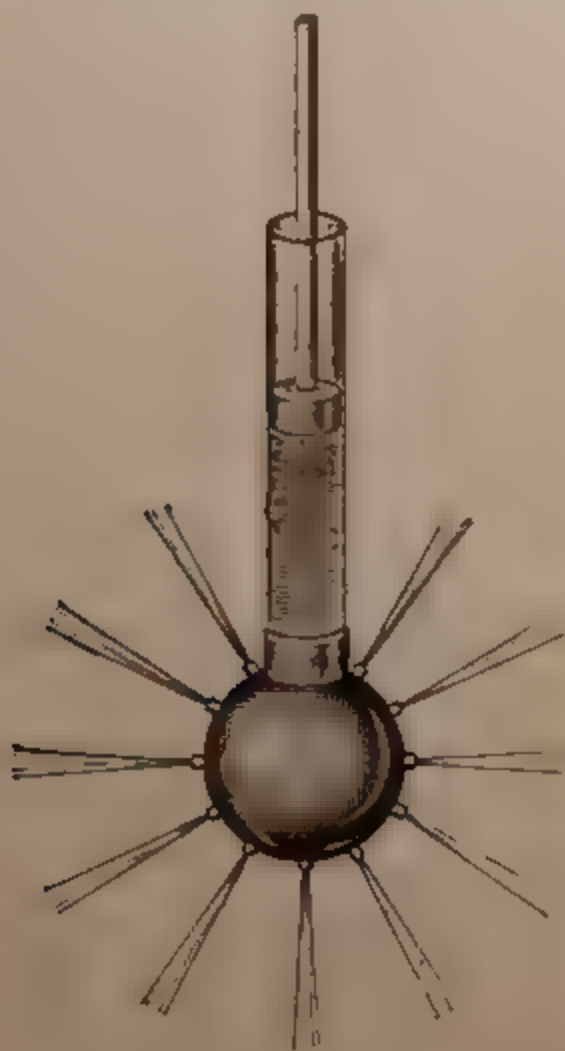



Fig. 261.

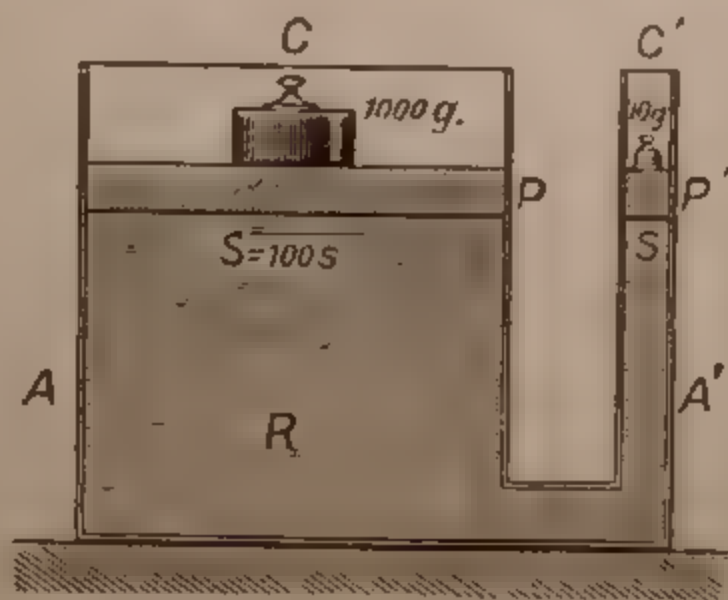



Fig. 262.

201. Torchio idraulico. — La pressione si trasmette egualmente su tutti i punti; ma la forza totale con cui un liquido preme su una parte della parete del recipiente, sarà la somma di tutte le pressioni esercitate sui varî punti della superficie premuta, e quindi dipende dall'estensione di questa superficie. Ciò, del resto, si deduce dalla 7) del § 198, la quale dice che per un dato valore di p, la forza F cresce proporzionalmente ad s, cioè:

La forza con cui è premuta una data superficie, è proporzionale all'area di questa.

Se, p. es., applichiamo in un recipiente chiuso R (Fig. 262), tutto pieno di liquido, un cilindro A' con uno stantuffo P' della sezione $s = 1\ cm^2$, ed in un altro punto un altro cilindro A munito anch'esso di stantuffo P della sezione $S = 100\ cm^2$, esercitando su P' la forza di 10 g, lo stantuffo P è sollecitato a salire con una forza di $(10 \times 100)\ g$; e può infatti sostenere un peso di 1000 g.

---

(1) Pascal Blaise, fisico e matematico francese; n. a Clermont-Ferrand nel 1623, m. a Parigi nel 1662.

Su tale principio è fondato il torchio idraulico. Uno stantuffo b di piccola sezione (Fig. 263), è manovrato da una manovella M; aspira acqua da un serbatoio S, e la comprime sotto un altro stantuffo cd, di sezione assai maggiore. Su questo, per il principio precedente, si eserciterà una forza, che è tante volte quella esercitata su b, quante volte la sezione cd è rispetto a quella b. Questa forza pertanto è grandissima, e lo stantuffo cd sollevandosi, spinge fortemente una piattaforma mobile P contro

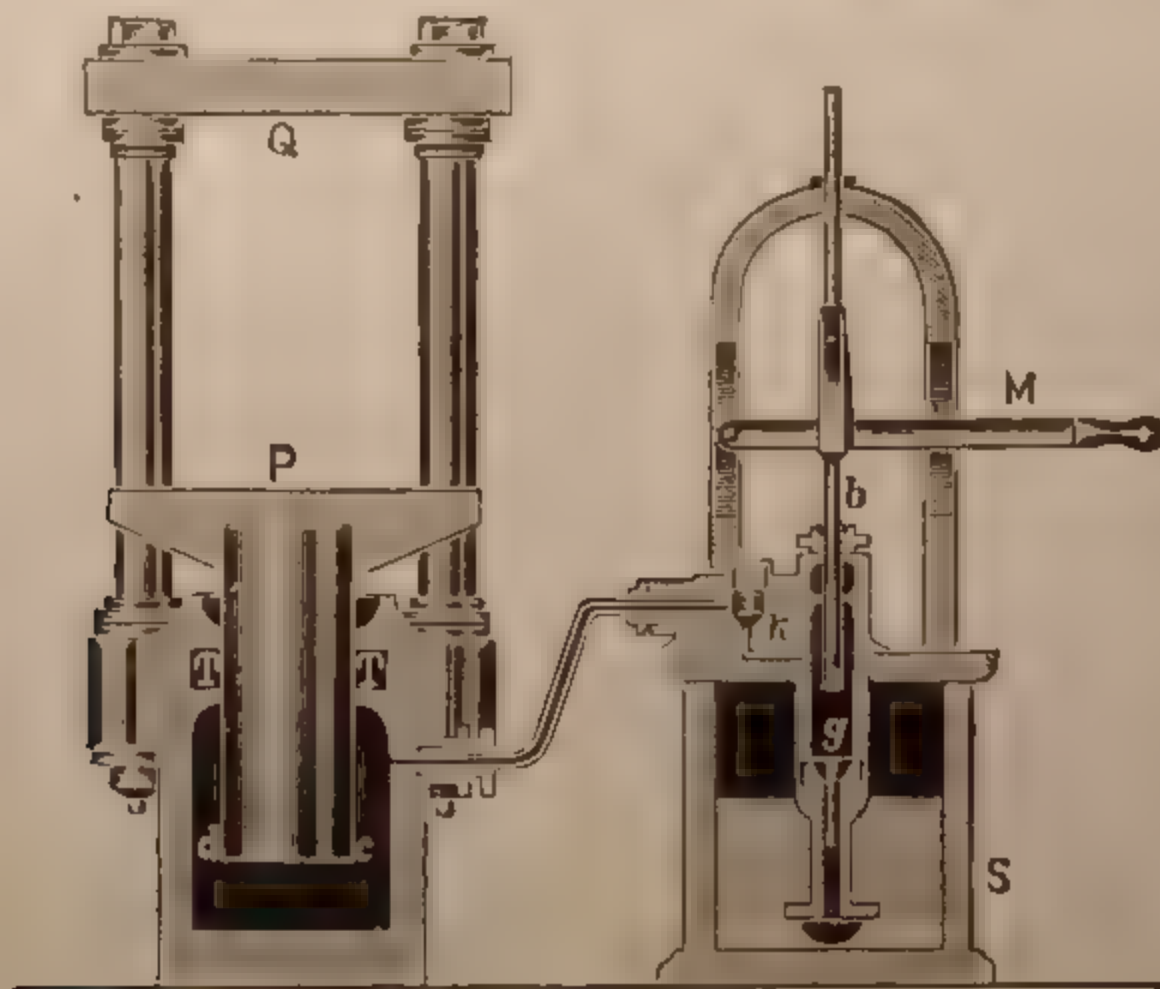



Fig. 263.

un'altra piattaforma fissa Q; fra le due piattaforme si pongono i corpi da schiacciare.

Il torchio idraulico è applicato per spremere dei semi, comprimere le balle di cotone; o per sollevare forti pesi, come i magli delle acciaierie, ecc.

202. **Superficie libera o di livello.** — Così si chiama la superficie, (non in contatto col recipiente), che separa il liquido dall'ambiente sovrastante.

Se il recipiente contenente il liquido non è troppo piccolo o troppo grande, e *se il liquido è in quiete e soggetto solo alla gravità, la superficie di livello ha la forma di un piano orizzontale.*

Infatti, se fosse una superficie non piana o comunque inclinata, una particella come M (Fig. 264) non potrebbe rimaner ferma. Su di essa agisce la gravità, rappresentata da MP; questa forza, decomposta in due (§ 62) equivale alle MR ed MS, la prima delle quali spinge la particella M in basso; cioè il *liquido non sarebbe in quiete*, contrariamente all'ipotesi. La particella M è in equilibrio solo se si trova su una superficie perpendicolare alla direzione della gravità; perchè solo in questo caso la gravità non produce movimento su di essa. Cioè ogni particella M deve essere su un piano orizzontale (§ 82).

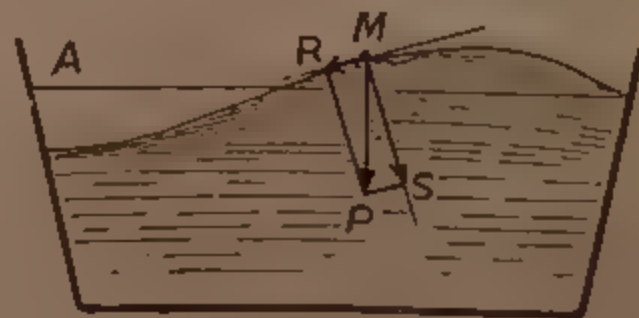



Fig. 264.

In masse grandi, come il mare, non possiamo considerare come parallele le verticali nei vari punti della superficie; in questo caso la superficie di livello, che è una superficie equipotenziale (§ 187), è una sfera. In *casi capillari*, agiscono sul liquido altre forze, e vedremo in seguito (§ 267) qual'è la forma della superficie in tal caso. Ora osserveremo solo che, quando sul liquido agiscono altre forze oltre la gravità, la superficie del liquido in ogni punto sarà sempre perpendicolare alla risultante delle forze agenti in quel punto; infatti in tali condizioni ogni molecola viene premuta in quel punto contro il liquido sottostante, ed è perciò in equilibrio.

203. **Pressioni generate dalla gravità.** — Poichè i liquidi sono pesanti, esercitano col loro peso delle pressioni. Si abbia un liquido contenuto in un

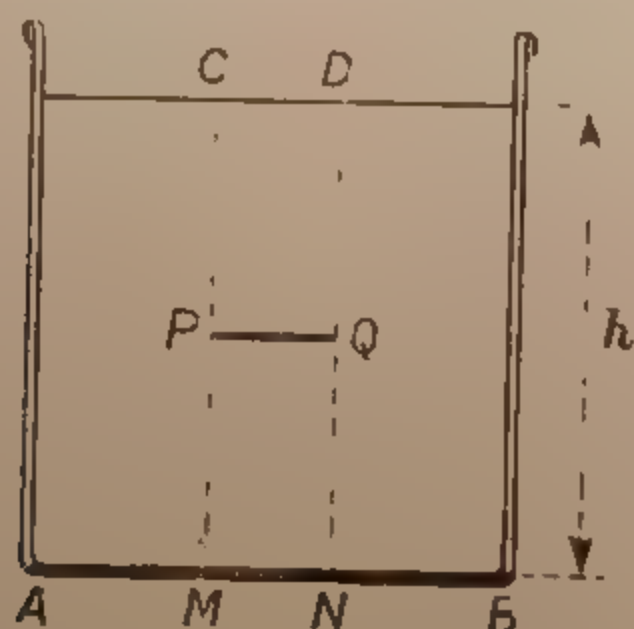
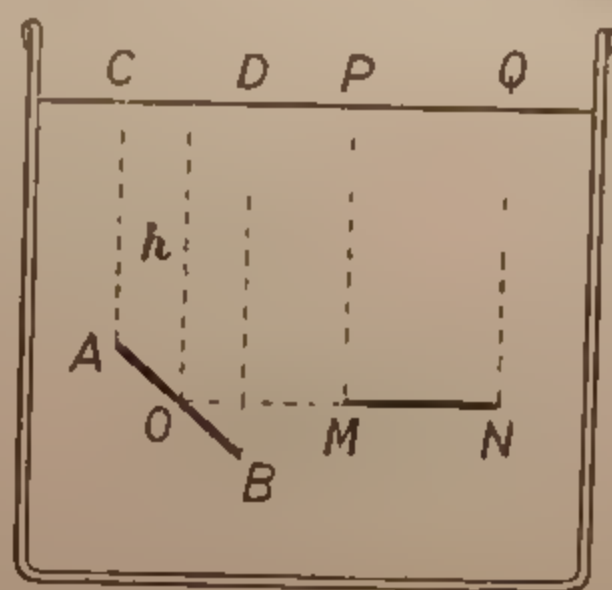



Fig. 265. Fig. 266.

recipiente, avente la forma di un cilindro retto, (Fig. 265). Sul fondo (AB) di questo si eserciterà una forza dovuta *a tutto* il peso del liquido contenuto nel recipiente; cioè tale forza è eguale al peso della colonna liquida che ha per base il fondo (AB) e per altezza la distanza h di AB dal livello del liquido.

Se ora consideriamo solo una parte (MN) del fondo, ad es., una sezione $^1/_{10}$ di (AB), sarà anche $^1/_{10}$ di tutta la forza che preme su AB, quella che grava su (MN). Cioè, su (MN) si esercita una forza eguale al peso della colonna liquida $MNCD$, che ha per base (MN) e per altezza h. Se la sezione si trova a metà del liquido, p. es., in PQ, la forza sarà solo quella esercitata dalla colonna liquida $PQCD$; cioè sarà eguale al peso della colonna liquida che ha per base (PQ) e per altezza (PC); finalmente in modo eguale si computerà la forza, se invece della sezione (PQ) orizzontale, consideriamo una sezione comunque inclinata. Ma s'intende in quest'ultimo caso, che la forza premente sulla sezione (AB) (Fig. 266), non è data dal peso della colonna liquida $ABCD$; ma dal peso della colonna $MNPQ$, avente per base la sezione $(MN) =$ sezione (AB) e per altezza h.

Concludendo, avremo in ogni caso:

La forza premente esercitata da un liquido soggetto solo alla gravità, su una sezione comunque considerata, è perpendicolare a questa sezione, ed è eguale al peso di una colonna liquida, che ha per base quella sezione e per altezza la distanza dal baricentro di tale sezione alla superficie libera del liquido.

Si dice più brevemente che *tale forza, su una data sezione, è eguale al peso della colonna liquida sovrastante.*

Dal principio precedente, scaturiscono le leggi di Stevin:

In un liquido in quiete, soggetto solo alla gravità, la pressione:

1. Ha lo stesso valore su tutti i punti di uno stesso piano orizzontale.

2. È indipendente dalla forma del recipiente.

3. Cresce proporzionalmente alla profondità contata a partire dalla superficie di livello.

4. Cresce proporzionalmente alla densità del liquido.

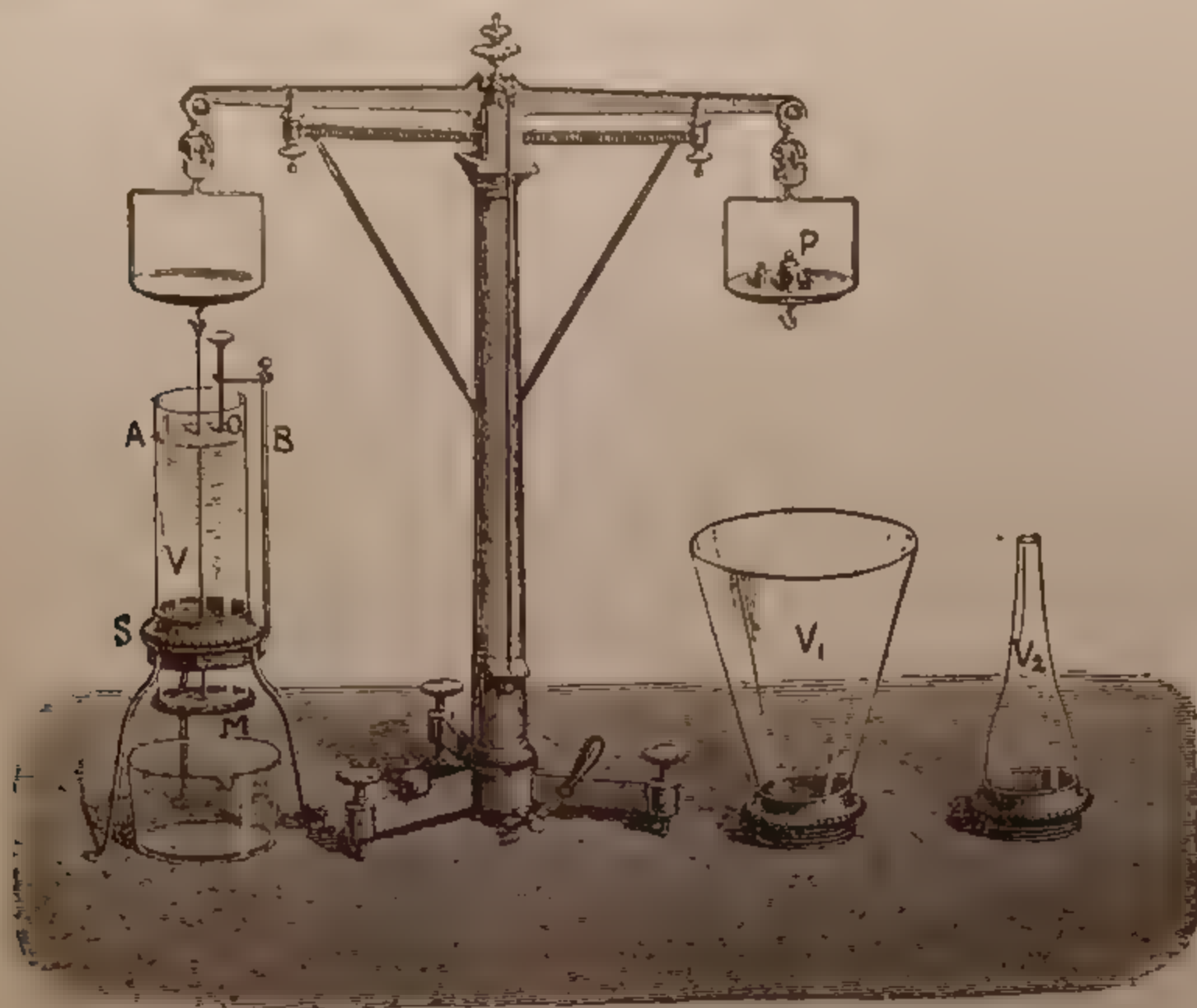



Fig. 267.

La 2ª legge è importante, e la verifichiamo per la pressione sul fondo dei recipienti nel modo seguente:

Sotto un piattello di una bilancia speciale (Fig. 267) si sospende con un filo un disco di metallo M, che s'appoggia, chiudendolo, sul fondo di un vaso V aperto anche inferiormente, e sostenuto da un sostegno S.

Si riempie V di acqua fino a un certo livello A, indicato dall'affioramento della puntina O di un'asticella sorretta da una bacchettina B; e si fa equilibrio alla pressione dell'acqua su M, per mezzo di pesi P posti sull'altro piattello della bilancia. Si trova che questi pesi P si mantengono eguali se a V sostituiamo vasi di forma diversa: p. es., un altro vaso V_1 allargantesi in alto ad imbuto, od un altro V_2 che invece si restringe; purchè tutti abbiano il fondo di eguale area, e siano riempiti dello stesso liquido e fino alla stessa altezza A che il vaso V.

204. **Botte di Pascal.** — Dal punto precedente [illegible] spiegazione la seguente esperienza, dovuta a Pascal. Questi prese una botte e la riempì di acqua; poi vi adattò sopra un lungo e stretto tubo T (Fig. 268), riempiendo questo tubo con pochi ettogrammi d'acqua, la botte scoppiò. Ciò perchè la forza interna agente sulla botte era uguale al peso di una colonna liquida avente per base la superficie della botte e per altezza quella di tutto il tubo; in altre parole, invece di sostenere il solo peso dell'acqua contenuta nel tubo, la botte doveva sostenere il peso enorme dell'acqua che sarebbe stata contenuta in un recipiente di base equivalente alla superficie della botte, *ed alto quanto tutto il tubo.*

Fig. 268.

205. **Pressione laterale.** — La misura anzidetta della pressione idrostatica, vale anche se la sezione a su cui essa si esercita, è sulla parete laterale del recipiente (Fig. 269). Su di essa si esercita ancora una forza eguale al peso di una colonna liquida che ha per base a e per altezza la distanza dal centro di a al livello del liquido; come si è detto al § 200, essa è perpendicolare alla sezione a considerata. Quindi su a agisce, contro il recipiente, una forza F_1 nella direzione della freccia. Tuttavia per questa forza il vaso non si muove; perchè vi è una forza F_2 contraria ad F_1, sulla sezione b di faccia ad a. Ma se si annulla una di queste forze, p. es. la F_2, facendo un foro in b, ne uscirà

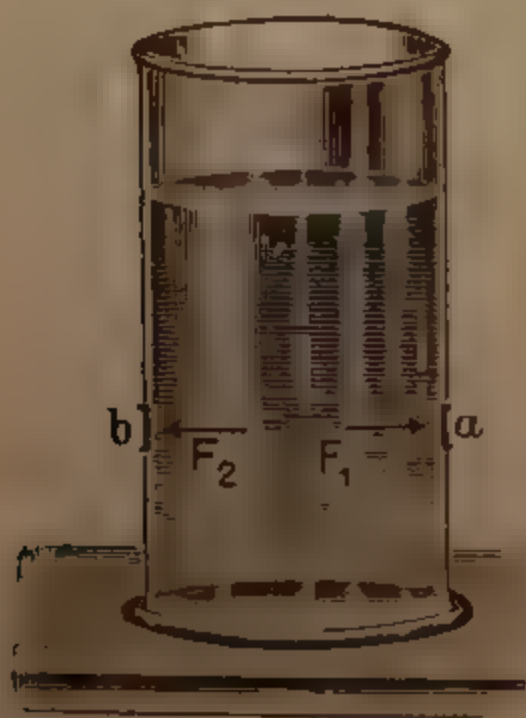



Fig. 269.

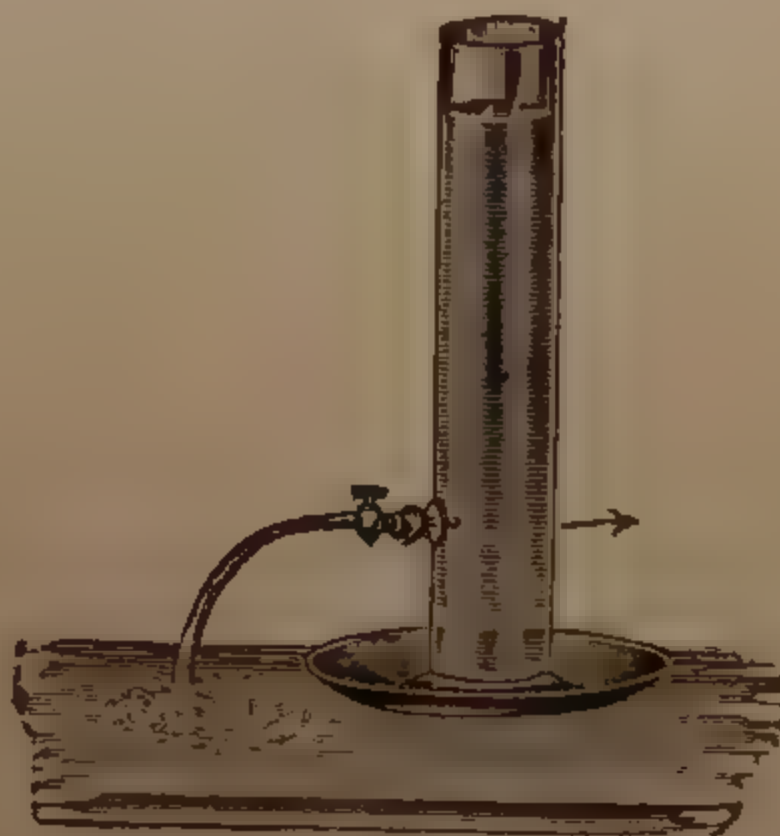



Fig. 270.

il liquido; ma rimarrà la forza F_1 su a, che ora farà muovere il recipiente, se esso può muoversi. Ciò si dimostra mettendo il recipiente su un carrello o su un galleggiante, come in Fig. 270; in questo caso esso si muove in senso contrario al getto, come indica la freccia.

Lo stesso fenomeno si dimostra con **l'arganetto idraulico.** Esso è un recipiente R (Fig. 271) che può ruotare attorno ad un asse verticale; comunica

inferiormente con un tubo orizzontale AB, ripiegato alle estremità a forma di Z. Riempiendo R di acqua, questa zampilla dalle estremità A e B del tubo inferiore; agiscono allora sul tubo due forze, in senso contrario al getto, costituenti una coppia (§ 67), che farà ruotare tutto il recipiente nel senso della freccia.

Su questo principio sono basate le girandole ad acqua per innaffiare i giardini, e le turbine a reazione, (§ 262).

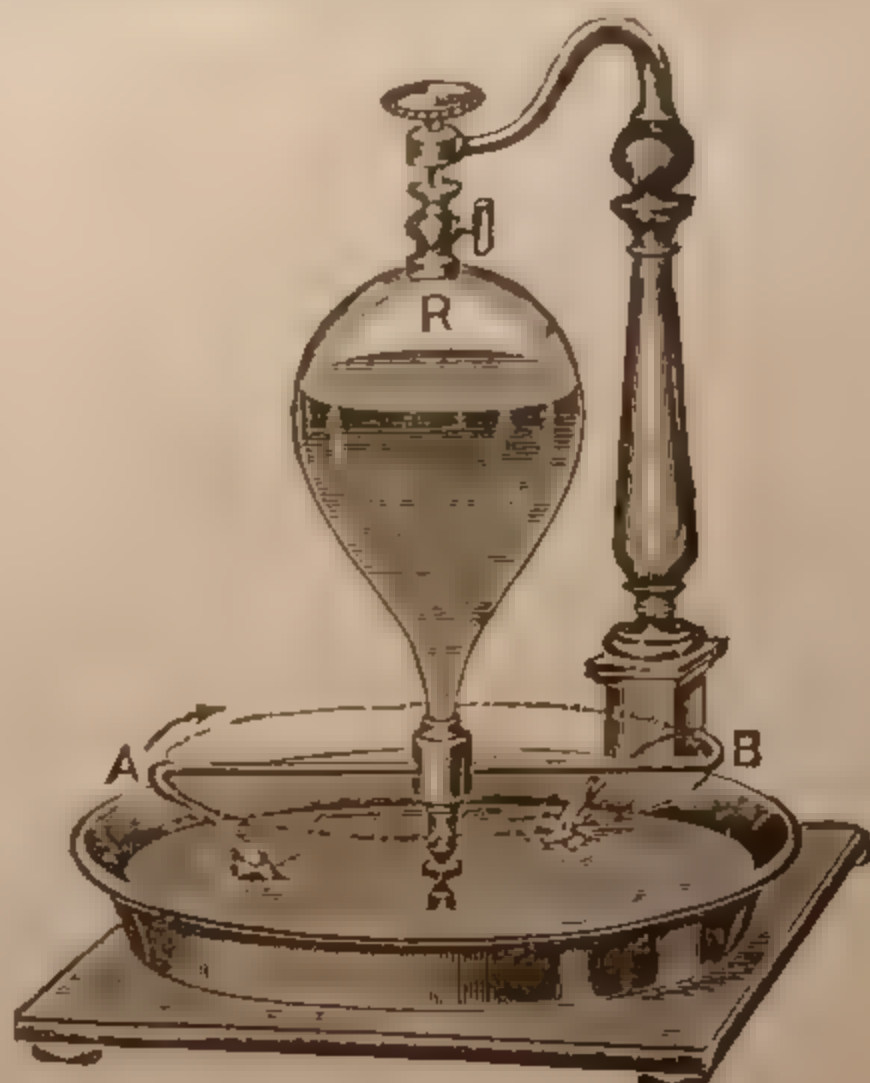



Fig. 271.

206. **Paradosso idrostatico.** — Si prendano tre vasi, rappresentati in sezione nella Fig. 272, muniti di fondo di sezione (MN) eguale; si riempiano dello stesso liquido, sino alla stessa altezza LL'. Per la 2ª legge di Stevin (§ 203), la pressione sul fondo è eguale nei tre vasi. Pur tuttavia, se si poggiano per il fondo, successivamente, sul piattello di una bilancia, questa se è in equilibrio con uno dei vasi non lo è con gli altri.

Parrebbe così che questa esperienza non sia d'accordo con la legge citata; da ciò il nome di **paradosso**. Il disaccordo è solo apparente; la bilancia misura non solamente la pressione sul fondo; ma anche le componenti verticali delle pressioni che si esercitano sulle pareti laterali.

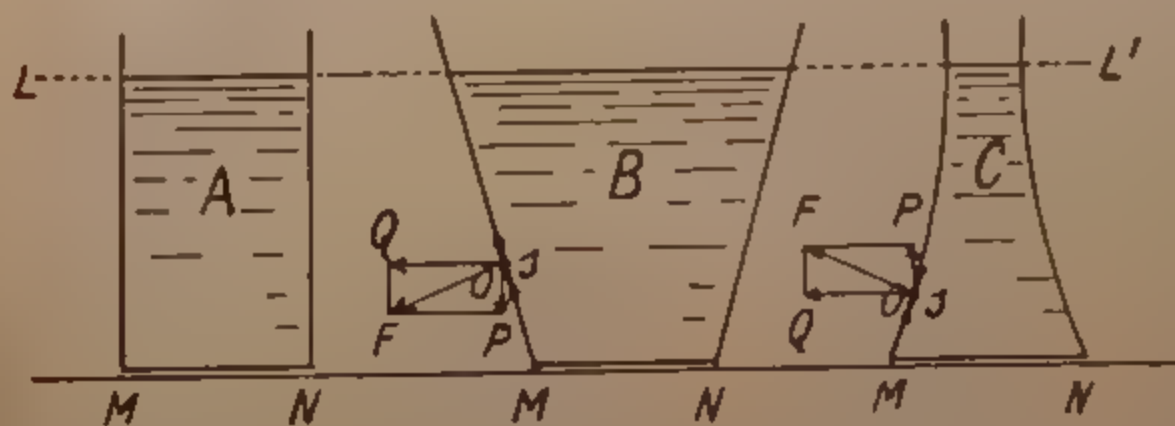



Fig. 272.

Così, nel vaso A, le pressioni laterali, aventi direzione perpendicolare alle pareti del vaso, non ammettono alcuna componente verticale, e non esercitano alcuna azione sul piattello della bilancia.

Nel caso del vaso B, su una sezione qualsiasi s della parete laterale, agisce una forza OF, perpendicolare ad s, che si scompone nelle due OP (verticale) ed OQ (orizzontale); la OP, per la rigidità del vaso, è trasmessa sul piattello della bilancia e *si aggiunge* alla pressione sul fondo: *la bilancia segna una pressione maggiore che per A.*

Nel caso del vaso C, la forza OF agente sulla sezione s, si scompone ancora nelle due OP (verticale) ed OQ (orizzontale); la OP, trasmessa al piattello della bilancia, *si sottrae* alla pressione sul fondo: *la bilancia segna una pressione minore che per A.*

In conclusione, la bilancia misura il peso di tutto il liquido contenuto in ciascun vaso; che è diverso nei tre casi, pur essendo eguale la pressione sul fondo.

207. **Spinta dal basso in alto.** — Si è detto che su qualunque sezione s (Fig. 273) in seno a un liquido, agisce una forza P dall'alto al basso, eguale al peso della colonna liquida sovrastante. Questa forza dovrebbe far muovere la sezione s; ma essendo tutto il liquido in quiete, deve esistere una forza F contraria a P, che le faccia equilibrio. Quindi:

Fig. 273.

Su qualunque sezione, in un liquido in quiete, esiste una spinta verticale dal basso in alto, eguale al peso della colonna liquida sovrastante.

Fig. 274.

Si dimostra sperimentalmente prendendo un cilindro C di vetro, senza fondo (Fig. 274), che si può chiudere con un disco D, tenuto a principio con un filo. Immergendo C in un recipiente contenente acqua, si può lasciare il filo, che D non cade; ciò dimostra che la spinta esiste. Si versi ora dell'acqua in C, a poco a poco; quando essa arriva allo stesso livello esterno, il disco D cade; dunque la spinta che si esercitava su D, era proprio eguale al peso della colonna liquida sovrastante.

208. **Vasi comunicanti.** — Si abbiano due recipienti M ed N, di forma qualsiasi, comunicanti fra loro (Fig. 275) e contenenti liquidi eguali o diversi. Consideriamo una sezione $(CD) = s$ nel tubo di comunicazione; su essa si esercitano due forze: P_1 dovuta al liquido di M e P_2 al liquido di N.

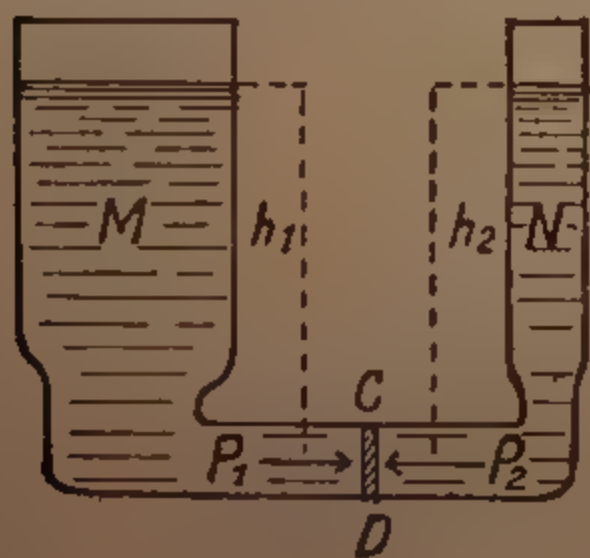



Fig. 275.

La forza P_1 è eguale al peso di una colonna liquida, che ha per base (CD) e per altezza la distanza h_1 dal centro di (CD) al livello del liquido di M (§ 203). Il volume di questa colonna è $V = s h_1$; quindi, chiamando d_1 la densità di tale liquido, per la 4) del § 194 è:

$$P_1 = V \cdot d_1 = s \cdot h_1 \cdot d_1 .$$

Parimenti, la forza P_2 è eguale al peso della colonna liquida, che ha per base CD e per altezza h_2; cioè, se d_2 è la densità del liquido di N:

$$P_2 = s \cdot h_2 \cdot d_2 .$$

Essendo i liquidi in equilibrio, dev'essere (numericamente) $P_1 = P_2$; altrimenti un liquido spingerebbe l'altro, e lo metterebbe in movimento. Cioè dev'essere:

$$s\, h_1 d = s\, h_2 d_2; \qquad \text{da cui:} \qquad h_1 d_1 = h_2 d_2 . \qquad 8)$$

Ora, distinguiamo due casi:

1. Se nei due vasi vi è lo stesso liquido, è: $d_1 = d_2$, e quindi dalla 8) risulta:

$$h_1 = h_2$$

Cioè:

In due o più vasi comunicanti, lo stesso liquido si dispone allo stesso livello, qualunque sia la forma di essi.

La verifica sperimentale si fa con l'apparecchio della Fig. 276, formato da più vasi A, B, C, D, di forma e dimensioni diverse. Mettendo in uno di questi un liquido, esso sale in tutti gli altri e si dispone alla medesima altezza; se uno di questi vasi D è troncato, il liquido da esso zampilla e il getto arriva (teoricamente) all'altezza che ha il liquido negli altri vasi.

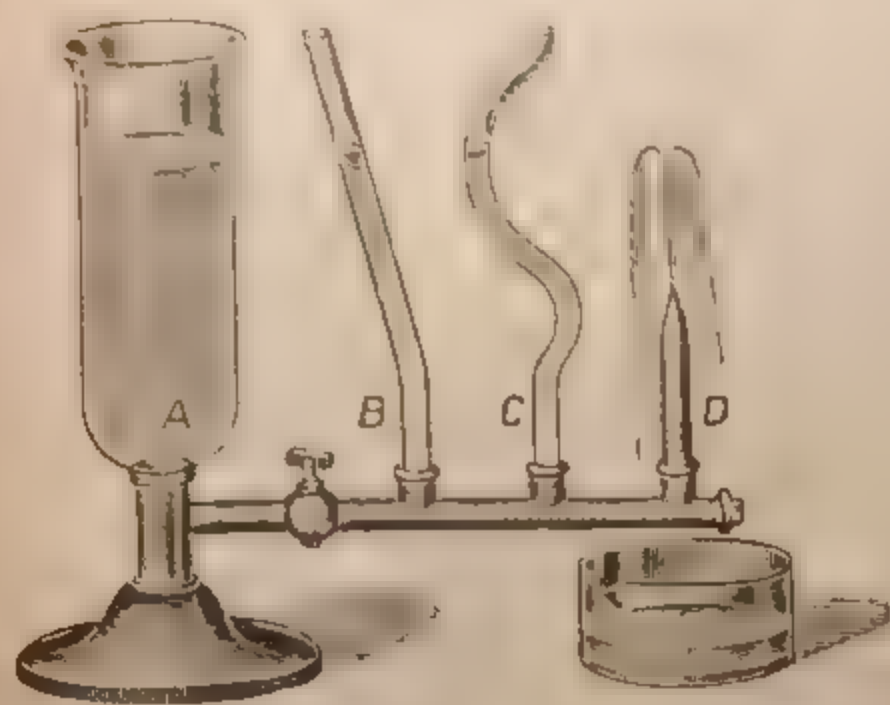



Fig. 276.

2. Se in M ed N poniamo liquidi diversi, cioè $d_1 \lesseqgtr d_2$, la condizione 8) può scriversi sotto forma di proporzione:

$$h_1 : h_2 = d_2 : d_1$$

Cioè:

Liquidi diversi si dispongono ad altezze inversamente proporzionali alle densità.

Se infatti nei due rami di un tubo ricurvo ad U (Fig. 277) poniamo da una parte mercurio ($d_1 = 13{,}59$) e dall'altra acqua ($d_2 = 1$), sarà:

$$h_2 = 13{,}59\, h_1 .$$

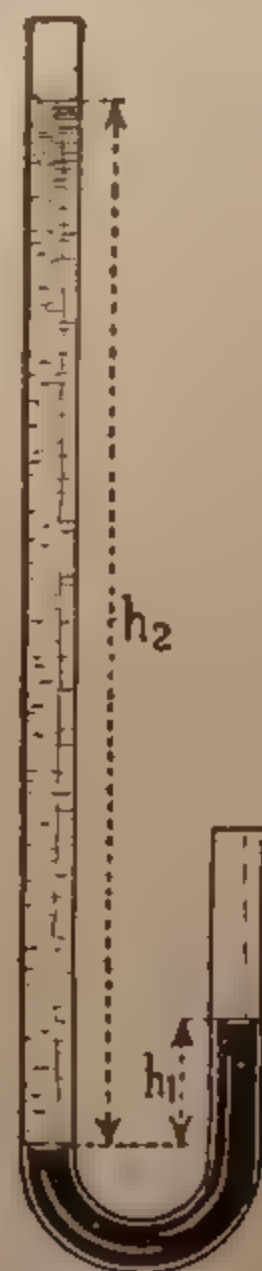



Fig. 277.

209. **Livelle.** — Il principio dei vasi comunicanti ha molte applicazioni di cui citiamo le principali:

La livella ad acqua serve in topografia, per determinare la differenza di livello tra due punti del terreno. È composta di due bicchieri di vetro A

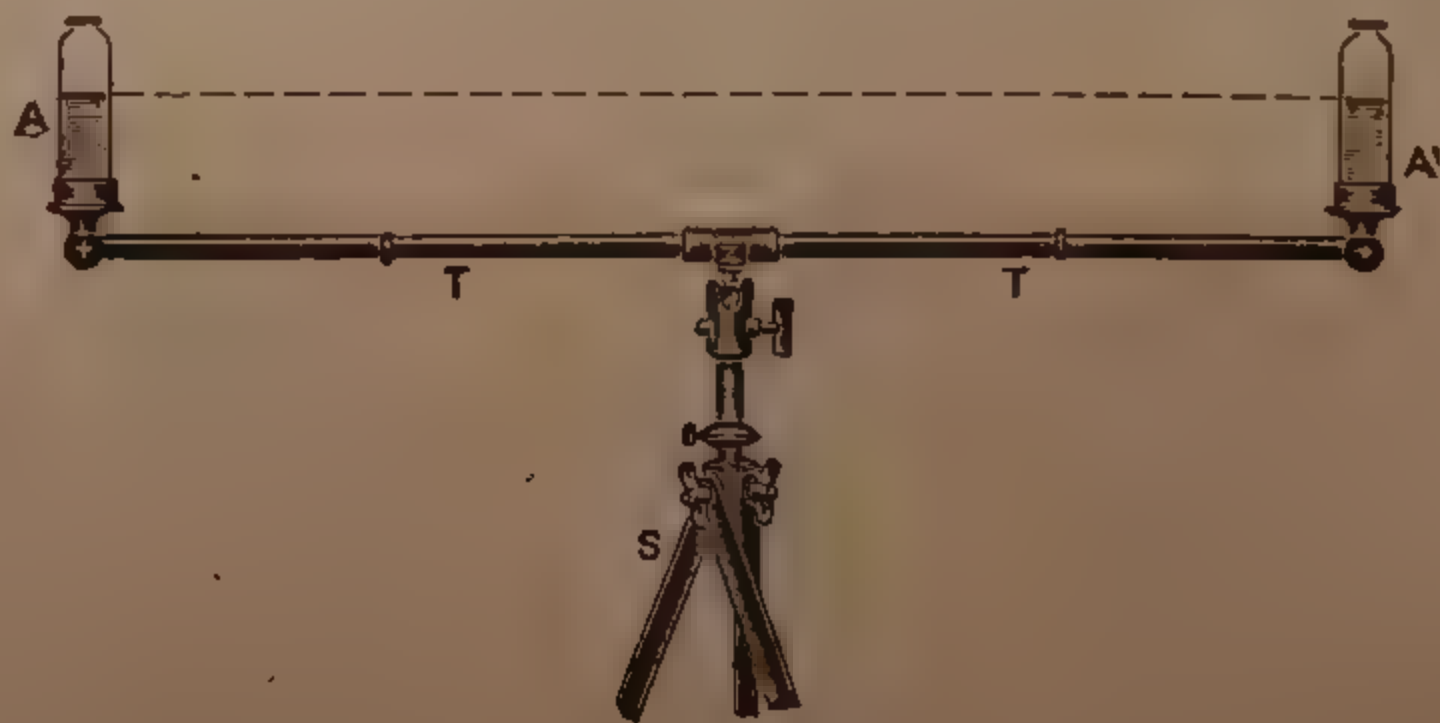



Fig. 278.

ed A' (Fig. 278) congiunti da un tubo T di metallo, che è sostenuto da un trepiedi. Riempendo d'acqua l'apparecchio, essa si dispone nei due bicchieri allo stesso livello; cioè le due superfici di livello dell'acqua nei due bicchieri, appartengono al medesimo piano orizzontale.

Ciò posto, si dispongono nei due punti A e B fra [illegible] cerca [illegible] livello (Fig. 279) due aste graduate M ed M', chiamate *biffe*, [illegible] un punto intermedio si colloca la livella. Guardando con l'occhio nella direzione dei due livelli dell'acqua, si ha una retta (visuale) orizzontale xy. Si osserva prima da una parte qual'è la divisione della

Fig. 279.

biffa M tagliata dalla detta visuale; sia a tale divisione (cioè sia alta a centimetri dal suolo). Guardando dall'altra parte, si osserva qual'è la divisione b tagliata dalla stessa visuale sull'altra biffa M'; la differenza $h = b - a$ è la differenza di livello cercata tra A e B.

La livella a bolla d'aria serve per vedere se un piano è orizzontale. Si compone di un tubo di vetro leggermente ricurvo, rappresentato separatamente in alto della Fig. 280. Esso è pieno quasi totalmente di alcool, tranne che per una piccola bolla d'aria N, ed è racchiuso in un tubo d'ottone T, che ne lascia scoperta la parte centrale. Il tubo T è sostenuto da una base di appoggio BB piana.

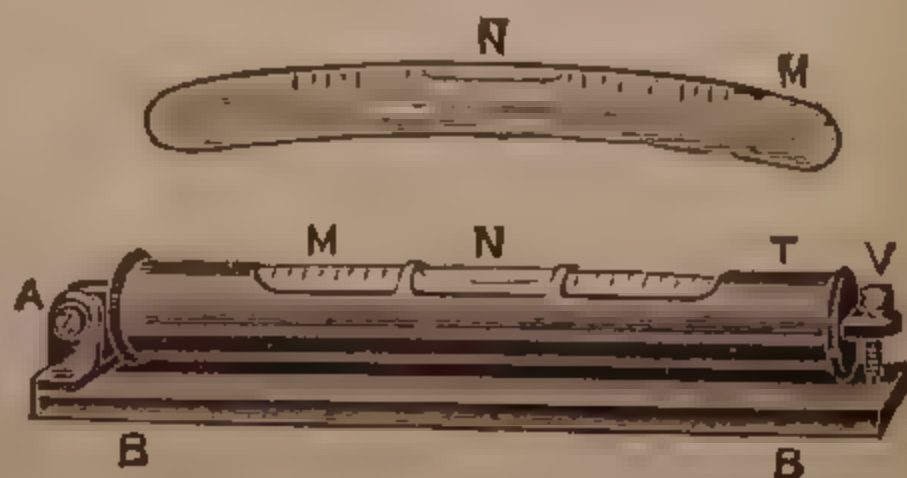



Fig. 280.

La bolla d'aria, per la sua leggerezza, si dispone nel punto più alto del tubo; quindi, se la base BB è su un piano orizzontale, la bolla è in mezzo del tubo, fra le due lineette centrali di una graduazione incisa nel vetro. Se la base poggia invece su un piano inclinato, la parte più alta del tubo non è più quella centrale, e la bolla si sposta verso la estremità più alta.

210. **Pozzi e fontane.** — Supponiamo che sotto terra esista uno strato permeabile (sabbia, ghiaia), compreso fra due strati impermeabili (argilla o roccia), e lo strato permeabile comunichi con un serbatoio A di acqua (lago, ghiacciaio, ecc.), (Fig. 281); esso si imbeve e si riempie d'acqua e si avrà una falda d'acqua MN. Foriamo il terreno in C o in D, cioè scaviamo un pozzo fino ad arrivare alla falda dell'acqua; questa salirà nel pozzo e si fermerà al livello BA che ha nel serbatoio A; l'acqua dal pozzo potrà cavarsi con secchie o pompe. Se spingiamo nel terreno un tubo di ferro in un punto F fino alla falda dell'acqua, questa salirà ancora fino al livello BA, e potrà uscire perennemente da un tubo di efflusso laterale: si ha un

pozzo artesiano, se il tubo è troncato al di sotto di BA come in E, si otterrà uno zampillo.

Per la *conduzione di acqua potabile* nelle città, l'acqua proviene da un serbatoio ove è accumulata, e posto ad altezza superiore alle case; da esso partono i tubi di ferro di distribuzione collocati sotto terra, che sboccano nei rubinetti posti nei diversi appartamenti; aprendo questi rubinetti l'acqua esce con velocità tanto maggiore, quanto più forte è il dislivello tra il rubinetto ed il serbatoio.

Fig. 281.

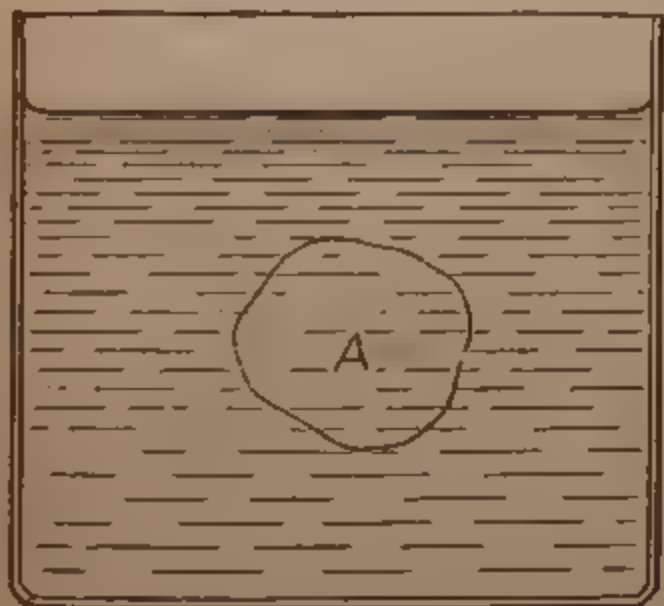
211. **Principio d'Archimede.** — Si abbia un vaso contenente un liquido (Fig. 282); immaginiamo col pensiero, una porzione A di questo liquido, come se fosse separata, con un velo sottilissimo, dal liquido circostante.

Questa porzione di liquido, per la gravità, dovrebbe cadere in basso; ma poichè tutto è in quiete, deve agire su A una forza che fa equilibrio alla gravità; cioè una spinta verticale *verso l'alto*, eguale al peso della porzione A. Questa spinta è la risultante di tutte le spinte che A riceve in ogni punto dal liquido circostante.

Fig. 282.

Se ora sostituiamo ad A un corpo solido avente la medesima forma di A, anche su di esso il liquido circostante eserciterà la stessa spinta di prima, eguale cioè al peso della porzione di liquido A, che è il liquido spostato dal corpo immerso. Si ha così il celebre principio d'Archimede [1]:

Un corpo immerso in un liquido, riceve una spinta verticale dal basso in alto, eguale al peso del liquido spostato.

La verifica sperimentale si fa con la bilancia idrostatica. È questa una bilancia comune, i cui piattelli sono sostenuti da asticelle corte, e sono muniti inferiormente di ganci; il giogo, inoltre, si può alzare di parecchi centimetri, per mezzo di una cremagliera, (Fig. 283). Si appendono, sotto uno dei piattelli, due cilindri di ottone, uno massiccio e l'altro cavo, aventi lo stesso volume; difatti il cilindro massiccio sta esattamente in quello cavo. I due cilindri si appendono uno sotto l'altro; di sotto sta quello massiccio.

(1) Archimede; n. a Siracusa il 287 a. C., m. ivi il 212 a. C.; fu celebre matematico e fisico.

Si fa equilibrio con dei pesi o con una zavorra qualsiasi, posta sull'altro piattello; indi si abbassa il gioco, finchè il cilindro massiccio si immerge completamente nell'acqua, contenuta in un vaso sottostante V. Si vedrà la bilancia traboccare dall'altra parte; il che dimostra l'esistenza della spinta. Riempiendo però d'acqua il cilindro cavo, l'equilibrio si ristabilirà; dunque la spinta è proprio eguale al peso di tanta acqua quanta ne contiene il cilindro cavo, cioè quanta ne sposta il cilindro immerso.

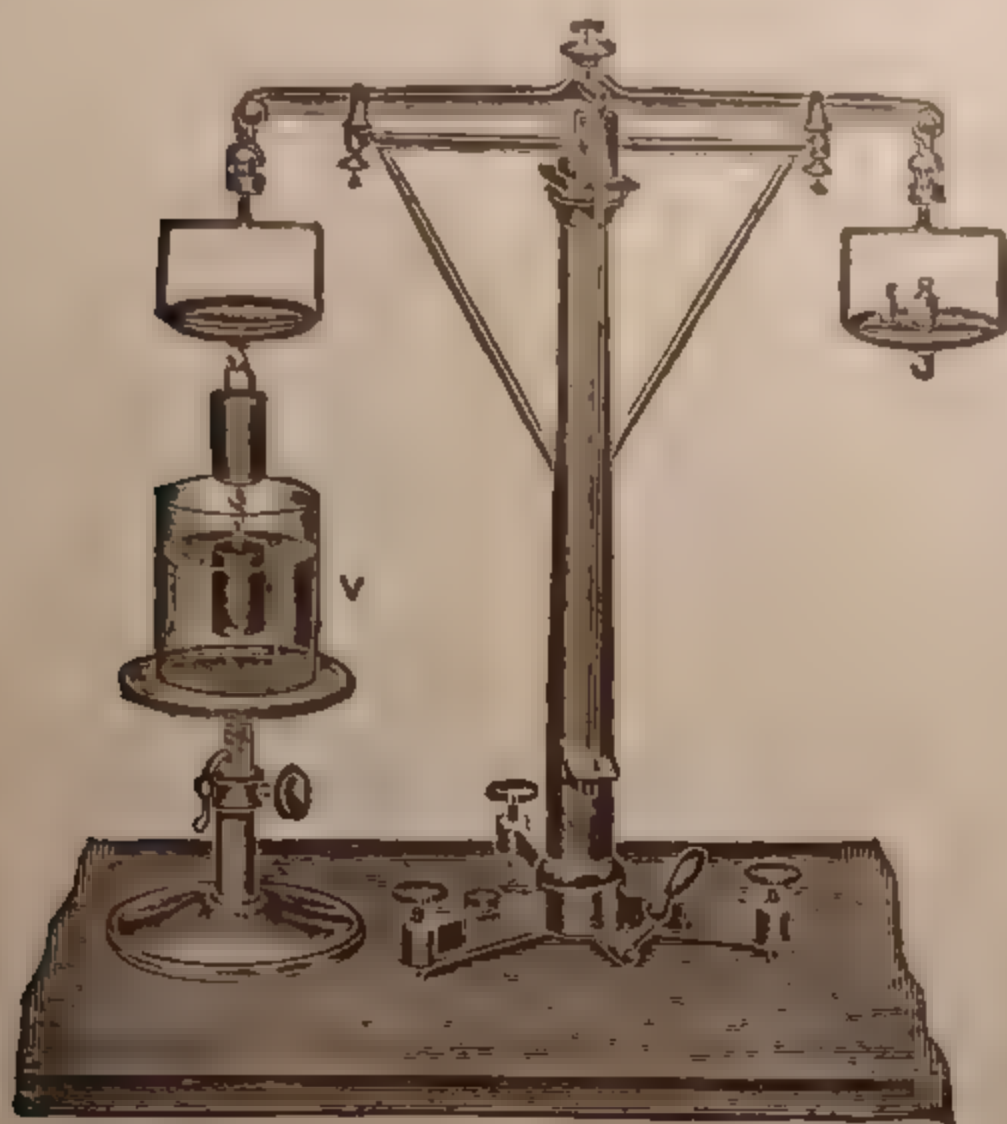



Fig. 283.

Si noti che questa spinta, contrastando il peso, produce lo stesso effetto che se il corpo immerso diventasse più leggero. Ma sarebbe un errore dire, come si diceva in antico, che il corpo immerso *perde tanto peso* quanto è quello del liquido spostato.

212. **Equilibrio dei galleggianti.** — Su un corpo immerso in un liquido agiscono due forze: il suo peso P e la spinta S. Possono darsi tre casi:

1. $P > S$; il peso supera la spinta ed il corpo va a fondo Ciò avviene se il peso del corpo è maggiore del peso di egual volume di liquido; cioè se il peso specifico del corpo è maggiore di quello del liquido. Così, p. es., per una pietra nell'acqua.

2. $P = S$; le due forze si equilibrano, ed il corpo resta sospeso, immobile, dentro il liquido. Ciò avviene se il peso specifico del corpo è eguale a quello del liquido; come, p. es., per alcune qualità di legno, nell'acqua.

3. $P < S$; la spinta supera il peso del corpo, e questo viene sollevato in alto, cioè **galleggia.** Ciò avviene se il peso specifico del corpo è minore di quello del liquido. Es., un pezzo di sughero nell'acqua.

Fig. 284.

Può darsi che il peso specifico di un solido sia maggiore di quello di un liquido e minore di quello di un altro. Allora tale corpo affonderà nel primo liquido; ma galleggerà nell'altro. Così il ferro (p. sp. = 7,8) affonderà nell'acqua (p. sp. = 1), ma galleggerà sul mercurio (p. sp. = 13,59).

Un uovo fresco galleggia in acqua satura di sale; va a fondo nell'acqua pura; rimane sospeso in mezzo, nell'acqua con poco sale, (Fig. 284).

Nel 3° caso, allorchè il galleggiante è fermo sul liquido, deve esservi ancora equilibrio fra il peso e la spinta; e poichè questa è risentita solo dalla parte immersa, ed è sempre eguale al peso del liquido spostato, così si avrà che:

il peso totale del galleggiante è eguale al peso del liquido spostato dalla parte immersa.

Un medesimo galleggiante quindi, in liquidi diversi, emergerà tanto più, quanto più il liquido è denso.

213. **Ludione - Sottomarini.** — Variando il peso di un corpo immerso in un liquido, senza variarne il volume, si può a piacere farlo affondare o risalire a galla. Ciò avviene nel **diavoletto di Cartesio** (1) o **ludione.** Esso è formato da una figurina di vetro, raffigurante un diavoletto, vuota internamente, e comunicante con l'esterno per un forellino O, alla punta della coda, (Fig. 285). Il diavoletto, contiene tanta acqua, quanto basta per farlo galleggiare in un vaso V pieno d'acqua; per il resto è pieno d'aria. Si chiude il vaso V con una membrana di gomma, e si esercita su questa una pressione con le dita. La pressione si trasmette all'acqua e costringe un poco di questa ad entrare per O nel diavoletto, comprimen-

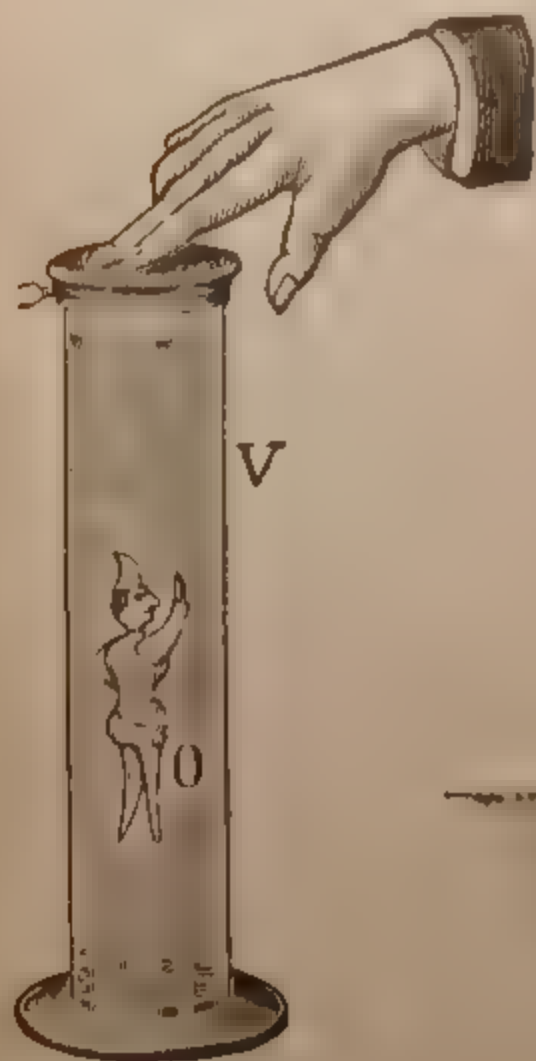
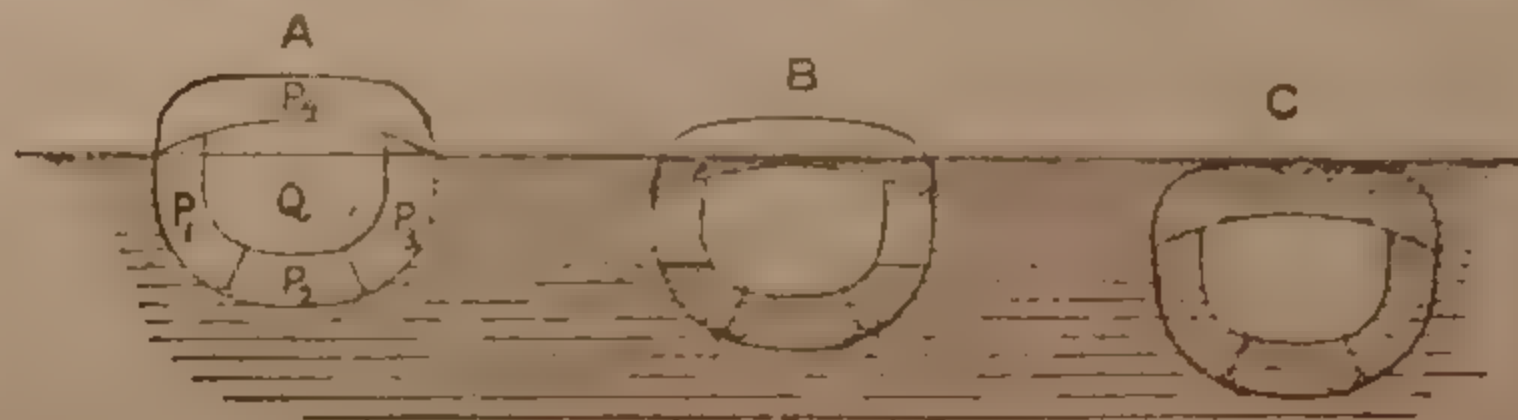



Fig. 285. Fig. 286.

dovi l'aria soprastante; il diavoletto, riempiendosi di più diventa più pesante e affonda. Cessando la pressione sulla membrana, l'aria interna del diavoletto, compressa, scaccia fuori l'eccesso d'acqua ch'era entrata; il diavoletto si alleggerisce e risale a galla.

Qualcosa di simile avviene nei **sottomarini.** Sono questi dei bastimenti completamente chiusi, e circondati da un doppio scafo (Fig. 286); lo spazio fra i due scafi è diviso in diversi scomparti $P_1 .... P_4$ e forma un serbatoio per l'acqua. Se questo serbatoio è vuoto, come in A, il sottomarino galleggia; mandandovi acqua per mezzo di pompe opportune, esso può empirsi in parte, il sottomarino diventa più pesante e s'immerge alquanto, come in B. Riempiendo del tutto il serbatoio, il sottomarino affonda come in C. Aprendo opportune valvole, l'acqua viene scacciata all'esterno; il serbatoio si vuota, e il sottomarino risale a galla.

---

(1) Cartesio o Descartes, Réné du Perron; n. a La Haye nel 1596, m. a Stoccolma nel 1650.

La Fig. 287 mostra il sottomarino in prospett[illegible]rso, un sistema ottico formato da lenti e spec[illegible]rge all'estremità di un lungo tubo e permette la [illegible]

Fig. 287.

211. **Metacentro.** — Su un corpo immerso in un liquido, come abbiamo visto al § 212, agiscono due forze: la forza di gravità P, eguale al peso del corpo, verticale, applicata nel baricentro G di esso; e la spinta S, eguale al peso del liquido spostato, anch'essa verticale ed applicata nel baricentro C del liquido spostato; questo punto lo chiamiamo **centro di spinta.**

Se il corpo è in equilibrio allorchè è totalmente immerso nel liquido, è $P = S$. Supponiamo che il corpo sia omogeneo; i due punti G e C coincidono; comunque si rivolti il corpo dentro il liquido, le due forze P ed S eguali e contrarie, si fanno sempre equilibrio: **il corpo è in equilibrio indifferente,** (Fig. 288 - *a*).

Se il corpo non è omogeneo, è, ad esempio, una palla di legno con un segmento Q di metallo (Fig. 288 - *b*), il baricentro si sposta verso Q, mentre

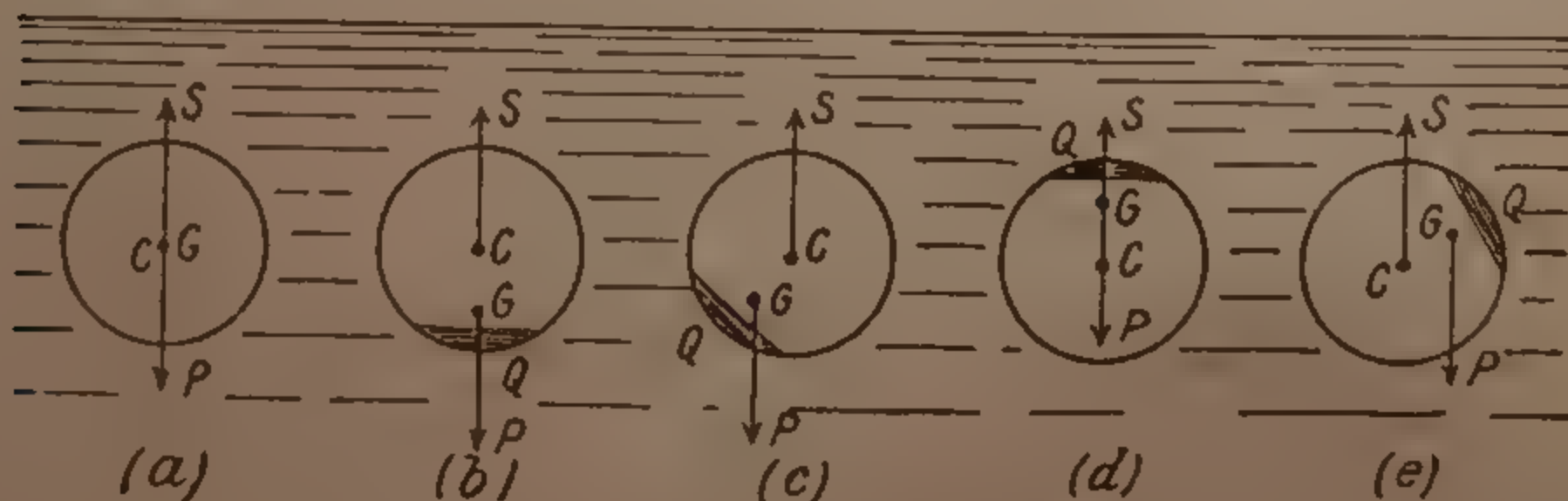



Fig. 288.

il centro di spinta rimane nello stesso punto C di prima. Nella posizione (*b*) le due forze P ed S sono ancora in equilibrio, ed il corpo rimane fermo. Spostandolo alquanto, e portandolo nella posizione (*c*), le due forze P ed S

formano una coppia (S-P), che fa ruotare il corpo, sino a ricondurlo nella posizione (b) di prima; il corpo è in equilibrio stabile.

Se il segmento di metallo Q è nella parte superiore, come in (d), le due forze GP e CS sono ancora in equilibrio (se G e C sono sulla medesima verticale), ed il corpo è fermo. Ma se si sposta anche di poco, portandolo nella posizione (c), le due forze P ed S formano ancora una coppia; la quale però fa ruotare il corpo, allontanandolo sempre più dalla posizione di prima, sino a portarlo nella posizione (b) dell'equilibrio stabile: **il corpo è in equilibrio instabile.**

Riepilogando: *l'equilibrio di un corpo in quiete, tutto immerso in un liquido, è stabile, instabile, o indifferente, a secondo che il suo baricentro è sotto, oppure sopra il centro di spinta, o coincide con esso.*

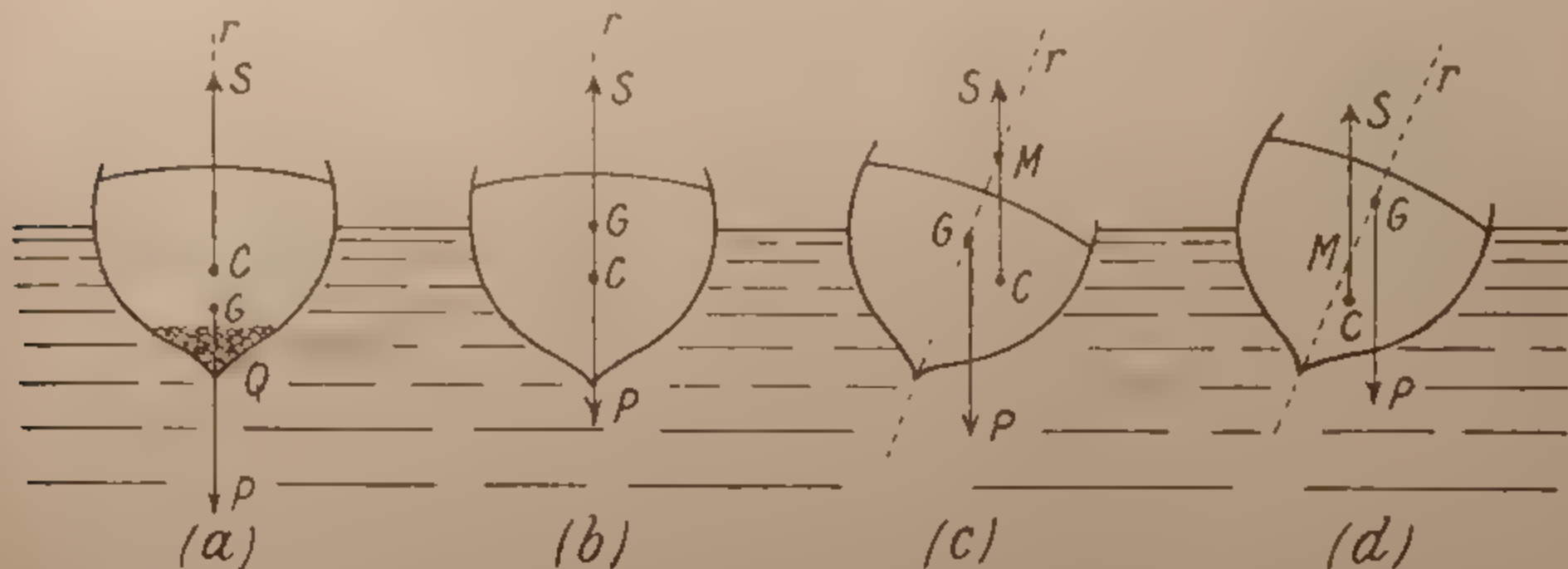



Fig. 289.

Supponiamo ora che il corpo sia un galleggiante, ad es., un bastimento, che rappresentiamo in sezione nella Fig. 289. Anche ora $P = S$; la forza P è applicata nel baricentro di tutto il galleggiante, la spinta S nel centro di spinta, o baricentro del liquido spostato.

Nel caso (***a***), se il bastimento ha un carico Q in basso, il baricentro G è *sotto* al centro di spinta C, e l'equilibrio è stabile, in questo caso i due punti G e C giacciono sull'asse di simmetria r della sezione considerata.

Può esservi equilibrio stabile anche se il baricentro è *sopra* al centro di spinta, come in (***b***). Infatti, se il bastimento s'inclina come in (***c***), la posizione del baricentro non cambia; ma quella del centro di spinta sì, perchè varia la forma del liquido spostato. Sia C la nuova posizione del centro di spinta; le forze GP e CS formano ancora una coppia, che riporta il bastimento nella posizione (***b***); cioè ancora l'equilibrio è stabile. La retta CS incontra l'asse di simmetria r in un punto M, che si chiama il **metacentro.** In questo caso adunque, *il baricentro è sotto al metacentro.*

Se invece il baricentro è alto, come in (***d***), per esservi carichi esorbitanti sul ponte del bastimento, può darsi che il centro di spinta C sia in un punto tale che la coppia S - P anzichè raddrizzare, faccia capovolgere il bastimento. L'equilibrio allora è *instabile*; in questo caso il *baricentro è sopra al metacentro.*

Se infine G ed M coincidono, l'equilibrio è indifferente, ed il bastimento rimane in equilibrio, comunque inclinato. Riepilogando:

L'equilibrio di un galleggiante è stabile, instabile, o indifferente, a secondo che il baricentro è sotto, oppure sopra il metacentro, o coincide con esso.

Allo scopo di abbassare il baricentro, per ottenere un equilibrio stabile, nei bastimenti il macchinario e i carichi più pesanti sono disposti nella parte più bassa del bastimento.

215. **Areometri.** — Il peso specifico dei liquidi si può determinare più comunemente con gli *areometri a peso costante.*

Essi sono fondati sul principio indicato al § 212-3, che un galleggiante in liquidi diversi emerge tanto più quanto più il liquido è denso. La densità di un liquido può quindi dedursi dal punto fino a cui s'immerge in esso un opportuno galleggiante.

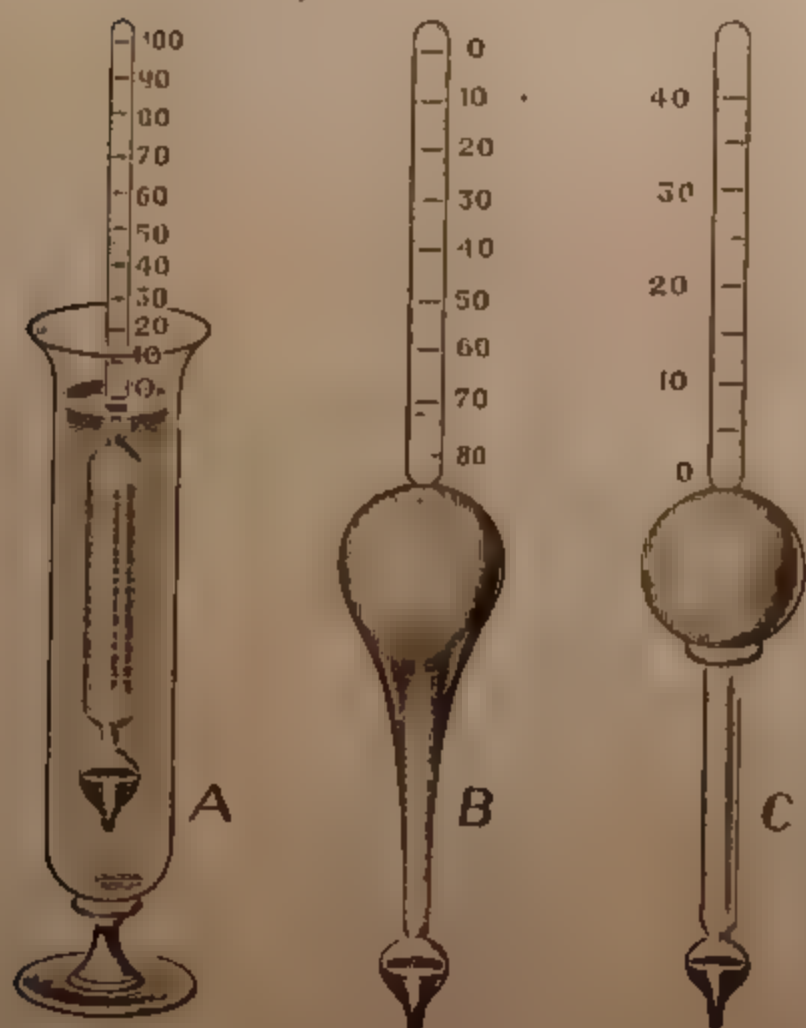
Gli **areometri a peso costante** sono appunto galleggianti, generalmente di vetro, aventi la forma indicata in Fig. 290; hanno nome diverso, secondo il modo con cui è fatta la graduazione del cannello.

Gli **areometri di Baumé** hanno una graduazione empirica. Il **pesa-sali** (*B* della Fig. 290) serve per liquidi più densi dell'acqua. Si gradua così: si segna *0* nel punto in cui affiora nell'acqua distillata a 12° *C*, zavorrando il tubo con mercurio o pallini di piombo, posti all'estremità inferiore, quanto occorre perchè lo *0* sia all'estremità superiore del cannello; si pone poi l'areometro in una soluzione di 15 *g* di sal da cucina in 85 *g* di acqua, e si segna 15 nel punto di affioramento in questa soluzione; l'intervallo si divide in 15 parti eguali, e si estende la graduazione al di sotto, per tutto il cannello. Questo areometro segna 66° (cioè s'immerge fino alla divisione 66) nell'acido solforico concentrato.

Fig. 290.

Il **pesa-eteri** (*C* della Fig. 290) serve per liquidi meno densi dell'acqua. Per graduarlo, si segna *0* nel punto di affioramento in una soluzione di g. 10 di sal da cucina in g. 90 d'acqua, zavorrando in modo che lo *0* sia alla estremità inferiore del cannello; si segna 10 nel punto di affioramento nell'acqua pura e si divide l'intervallo in 10 parti eguali, estendendo la graduazione al di sopra per tutto il cannello; l'areometro segna 36° nell'alcool del commercio.

Gli areometri Baumé vanno scomparendo dall'uso, sostituiti dai **densimetri**, la cui graduazione fornisce direttamente la densità del liquido.

L'**alcoolometro centesimale di Gay-Lussac** (*A* della Fig. 290), molto adoperato, indica la percentuale di alcool in una soluzione formata *solo di acqua e alcool.* La graduazione si fa segnando: *0* nel punto di affioramento nell'acqua pura (a 15° *C*), che deve essere in basso al cannello; e poi 10, 20, 30.... nel punto di affioramento in soluzioni di 10, 20, 30.... cm^3 di alcool, completate con tanta acqua quanta occorre per formare ogni volta 100 cm^3 di mescolanza. Ciascuno degli intervalli ottenuti si suddivide in 10 parti uguali; i tratti non risultano equidistanti; ma più serrati verso lo *0* che verso

il 100; il che giustifica perchè non basti la determinazione dei punti estremi, per fare la graduazione. Messo l'alcoolometro in una soluzione di acqua ed alcool, se affonda, ad es., sino alla divisione 85, vuol dire che vi sono 85 parti [illegible]ool e 15 di acqua: si dice che è alcool ad 85°. L'alcoolometro non è esatto per il vino, che non è formato solo di acqua ed alcool.

Vi sono areometri per vedere se il latte e scremato o annacquato, e si chiamano **lattodensimetri**; ma non sono troppo raccomandabili, perchè le indicazioni non sono sicure. Infatti, le variazioni di densità dovute all'innacquamento possono essere compensate da aggiunta di altre sostanze estranee (amido, polvere di marmo, ecc.); onde per il latte, il miglior mezzo di analisi è sempre quello del microscopio, che oltre alle sostanze estranee, permette di scoprire la presenza di germi infettivi, non deducibili da variazioni di densità, e che pure costituiscono l'elemento principale da considerare per la buona qualità del latte.

Per tutti gli areometri c'è da osservare, che sono esatti solo se adoperati in liquidi alla temperatura a cui furono graduati, (di solito a 15° C).

216. **Problemi sull'idrostatica.** (I valori non dati del peso specifico, si ricaveranno dalla Tabella del § 294).

a) Problemi risoluti.

1. *Un serbatoio cilindrico è formato di lamiera di ferro, dello spessore* s = mm *1,5, ed ha il raggio* r = cm *80 e l'altezza* h = m *3,20; è appoggiato su uno zoccolo prismatico di calcestruzzo a base quadrata, avente il lato* l = m *2. Quale dev'essere l'altezza di questo zoccolo, perchè il terreno sopporti la pressione di* kg *35 per* dm², *allorchè il serbatoio è pieno d'acqua?* (Peso spec. del ferro: $d_1 = 7{,}8$; id. medio del calcestruzzo: $d_2 = 2{,}5$).

Risoluzione. — L'area della superficie del serbatoio è:

$$S_1 = 2\pi r\,(r + h) = \text{dm}^2\,[2 \times 3{,}1416 \times 8 \times (8 + 32)] = \text{dm}^2\ 2010{,}6.$$

Il volume del ferro che forma la lamiera è:

$$V_1 = S_1 \,.\, s = \text{dm}^3\,(2010{,}6 \times 0{,}015) = \text{dm}^3\ 30{,}16$$

Il peso del serbatoio vuoto è:

$$P_1 = V_1 d_1 = \text{kg}\,(30{,}16 \times 7{,}8) = \text{kg}\ 235{,}25.$$

Il volume del serbatoio è:

$$V_2 = \pi r^2 h = \text{dm}^3\,(3{,}1416 \times 8^2 \times 32) = \text{dm}^3\ 6434.$$

Il peso spec. dell'acqua è 1, quindi l'acqua del serbatoio pesa:

$P_2 = \text{kg}\ 6434.$ L'area della base dello zoccolo è:

$$S_2 = l^2 = \text{dm}^2\ 20^2 = \text{dm}^2\ 400$$

Il volume dello zoccolo, se x è la sua altezza, è:

$V_3 = l^2 x = \text{dm}^3\,(20^2 \,.\, x) = \text{dm}^3\ 400\,x;$ ed il suo peso:

$$P_3 = V_3 d_2 = \text{kg}\,(400x \times 2{,}5) = \text{kg}\ 1000\,x.$$

Il peso totale dell'insieme è perciò:

$$P = P_1 + P_2 + P_3 = \text{kg}\,(235{,}26 + 6434 + 1000\,x) = \text{kg}\,(6669{,}26 + 1000\,x$$

La pressione sul terreno è:

$$p = \frac{P}{S_2} = \text{kg}\ \frac{6669.25 + 1000\,x}{400} \quad \text{per } dm^2$$

Eguagliando tale valore a quello dato per ipotesi, si ha l'equazione del problema:

$$\frac{6669.25 + 1000\,x}{400} = 35\,; \quad \text{da cui:} \qquad x = \text{dm}\,\frac{400 \times 35 - 6669.25}{1000} = \text{dm } 7{,}3 \text{ circa.}$$

2. *Un pezzo di piombo, appeso ad un piattello di una bilancia, è equilibrato da un peso di g 750. Si vuol sapere da quali pesi sarà esso equilibrato, se si immergerà nell'acqua, nella glicerina, e nell'acido solforico.*

Risoluzione. — Dalla formula $P = Vd$, ricaviamo che il volume V di quel piombo è:

$$V = \frac{P}{d} = \text{cm}^3\,\frac{750}{11{,}35} = \text{cm}^3\ 66{,}08.$$

Ora *cm³* 66,08 di acqua	pesano	g 66,08 × 1	= g	66,08
» » 66,08 » glicerina	»	» 66,08 × 1,28	= »	84,58
» » 66,08 » acido solforico	»	» 66,08 × 1,84	= »	121,59

Quindi per l'equilibrio occorrono:

nell'acqua	g (750 — 66,08) =	g 683,92
nella glicerina	» (750 — 84,58) =	» 665,42
nell'acido solforico	» (750 — 121,59) =	» 628,41.

3. *Un cilindro di ferro, alto cm 12, è disposto, verticalmente, nel mercurio; di quanto vi affonda?*

Risoluzione. — Siano V e d volume e densità del cilindro di ferro, V_1 e d_1 volume e densità del mercurio spostato dalla parte immersa; deve essere, per l'ultima legge, (§ 212-3):

$$Vd = V_1 d_1.$$

Ma i volumi di cilindri di egual raggio, stanno tra loro come le altezze; quindi se h è l'altezza di tutto il cilindro di ferro ed x quella della parte immersa sarà:

$$h\,d = x\,d_1; \qquad \text{da cui:} \qquad x = \frac{h\,d}{d_1}.$$

Nel caso proposto:

$$x = \text{cm}\,\frac{12 \times 7{,}81}{13{,}59} = \text{cm } 6{,}9.$$

Come era intuibile, la soluzione è indipendente dal raggio del cilindro.

4. **Problema d'Archimede.** — *Una corona d'oro pesa g 1200; si sospetta che contenga dell'argento; per riconoscere la frode, si pesa immersa nell'acqua e si trova: g 1127,5. Contiene essa argento e quanto?*

Risoluzione. — La spinta che subisce la corona immersa nell'acqua è:

$S = \text{g}\,(1200 - 1127{,}5) = \text{g}\ 72{,}5\,;$ quindi la sua densità è:
$d = 1200 : 72{,}5 = 16{,}5\,.$ La densità dell'oro è: $d_1 = 19{,}4$; quella dell'argento è: $d_2 = 10{,}5$; essendo: $d_1 > d > d_2$, la corona è una lega di entrambi i metalli, e contiene perciò argento. Sia v_1 il volume dell'oro contenuto nella corona e v_2 quello dell'argento; il peso di quell'oro sarà:

1) $\qquad x = v_1 d_1 \qquad$ e quello dell'argento: $\qquad y = v_2 d_2\,.$

Per ipotesi è: $\quad x + y = \text{g}\,1200; \quad$ cioè: $\quad v_1 d_1 + v_2 d_2 = 1200.$

Se [illegible] nell'acqua [illegible] g 72,5, altrettanti cm^3 è il suo volume; quindi si ha:

$v_1 + v_2 = 72,5$ (Ammettiamo che il volume della lega sia uguale alla somma dei volumi dei metalli componenti, il che a rigore non è; si ricordi l'esperienza del § 17).

Sicchè abbiamo il sistema di 1° grado:

$$\begin{cases} v_1 + v_2 = 72,5 \\ v_1 d_1 + v_2 d_2 = 1200. \end{cases}$$

Risolvendo si trova la soluzione:

$$v_1 = \frac{1200 - 72,5\, d_2}{d_1 - d_2}; \qquad v_2 = \frac{72,5\, d_1 - 1200}{d_1 - d_2}.$$

Sostituendo a d_1 e d_2 i loro valori numerici, si ricava:

$v_1 = \text{cm}^3\ 49,3$; $v_2 = \text{cm}^3\ 23,2$. Sostituendo nelle 1):

$$x = v_1 d_1 = \text{g}\ (49,3 \times 19,4) = \text{g}\ \mathbf{956,4}.$$
$$y = v_2 d_2 = \text{g}\ (23,2 \times 10,5) = \text{g}\ \mathbf{243,6}.$$

b) Problemi da risolvere.

1. Quanto pesa una barra cilindrica di ferro, il cui diametro è di *mm* 40 e la lunghezza *m* 4,50? quanto peserebbe se fosse di rame, di alluminio, di legno?

2. Quale dev'essere la capacità di una bottiglia per contenere *kg* 28 di mercurio, o *g* 2500 di etere, o *g* 750 di glicerina?

3. Una colonna pesa 15 t. e riposa su uno zoccolo a base quadrata che pesa 2 t. Quale dev'essere il lato della base dello zoccolo, se il suolo non deve sopportare una pressione superiore a 1 *kg* per cm^2?

4. 150 cm^3 di etere, alla pressione di 20 *atm*, diminuiscono di mm^3 390. Qual'è il coefficiente di compressibilità dell'etere?

5. In un torchio idraulico lo stantuffo minore ha il diametro di *mm* 20, ed è premuto con la forza di *kg* 50, applicata all'estremità di una leva di 2° genere, lunga *m* 1,20; lo stantuffo è connesso alla leva a *cm* 20 dal fulcro. Lo stantuffo maggiore ha il diametro di *cm* 15. Calcolare la forza con cui si solleva questo stantuffo. Verificare in questa macchina il principio delle velocità virtuali (§ 133, si trascurino gli attriti).

6. Una diga, destinata a ritenere l'acqua di un lago artificiale, ha la lunghezza di *m* 78; la profondità media dell'acqua è di *m* 20. Qual'è la forza totale con cui l'acqua preme sulla diga?

7. In due vasi comunicanti si pongono acqua e benzina; se l'acqua arriva all'altezza di *m* 1,10, a quale altezza si innalza la benzina?

8. Tre vasi comunicano per mezzo di uno strettissimo tubo orizzontale. Nei vasi laterali sono due liquidi diversi, le cui densità sono rispettivamente d_1 e d_2, e le altezze al di sopra del livello nel vaso intermedio sono h_1 e h_2. Nel vaso intermedio vi è un liquido di densità ignota; le superfici di separazione dei tre liquidi sono nel tubo di comunicazione. Determinare la densità incognita e l'altezza del liquido nel vaso intermedio, al di sopra del tubo di comunicazione.

9. Si sospetta che in una palla di rame del peso di *kg* 5,23, vi sia nell'interno una cavità; pesandola immersa nell'acqua si trova il peso di *kg* 4,475. Si domanda se il sospetto è fondato, e in tal caso qual'è il volume della cavità interna.

10. Con un pezzo di piombo di peso P si vuol costruire una sfera cava, in modo che nell'acqua del mare s'immerga esattamente a metà. Calcolare il raggio della sfera, e lo spessore del piombo di cui è formata. Caso particolare: $P = kg\ 100$.

11. Un cilindro retto di ghiaccio galleggia sull'acqua del mare, con l'asse verticale. Qual'è la sua altezza totale, sapendo che esso si eleva di *cm* 90 al di sopra del livello dell'acqua?

12. Un disco di sughero alto *cm* 4, e col diametro di *cm* 20, è posto sull'acqua con le basi orizzontali; su di esso si pone una sfera di piombo, del diametro di *cm* 3, appoggiata al centro della base superiore. Fino a che altezza s'immerge il disco?

13. Dato che un corpo pesa più al polo che all'equatore (§ 102), una nave, con lo stesso carico, s'immerge di più nelle vicinanze del polo o presso l'equatore? (Ricordare la legge del § 212, e che la variazione di peso è subita anche dal liquido...).

14. Un cono circolare retto, di raggio base r ed altezza h, è costituito da un tronco di cono di ferro sormontato da un cono di platino. Si domanda il volume del ferro e quello del platino, sapendo che il cono, immerso nel mercurio con l'asse verticale e per la base, è in equilibrio allorchè la parte in ferro è totalmente immersa. (Si prendano come incognite i due volumi cercati, di cui si può stabilire la somma e il rapporto; quest'ultimo si ricava facendo uso della condizione di equilibrio dei galleggianti).

15. Per la fabbricazione dei gioielli si adopera usualmente una lega di 18 parti d'oro e 6 di rame (oro a 18 karati); qual'è la densità di questa lega, ammettendo che il suo volume sia la somma dei volumi dei metalli componenti?

16. Il raggio della superficie esterna di un involucro sferico di metallo è r ed il peso specifico del metallo è d. Calcolare lo spessore della parete, sapendo che la sfera posta nell'acqua emerge di una calotta di cui l'area della superficie è πa^2.

17. Un galleggiante nell'acqua è costituito da un cilindro di abete alto *cm* 30 a cui è attaccato inferiormente un cilindro di rame con una base in comune, alto *cm* 1. Determinare la lunghezza della parte immersa e la distanza tra il baricentro e il centro di spinta.

AEROSTATICA

La pressione atmosferica.

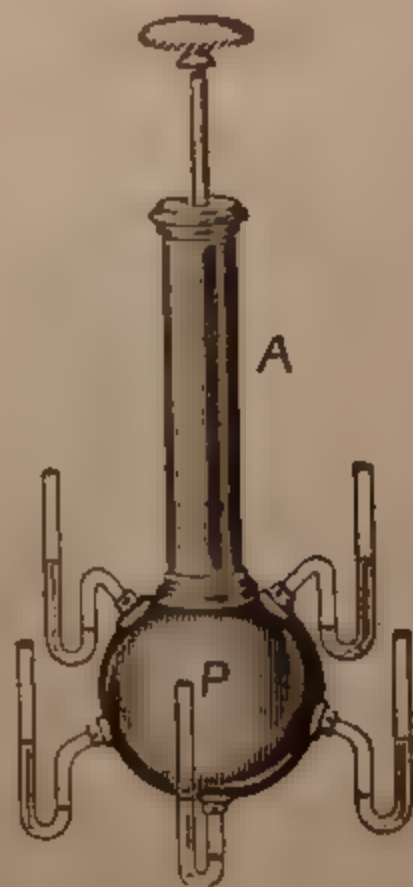
217. **L'acrostatica** o *statica dei gas studia le proprietà dei gas in quiete.* Ricordiamo (§ 8) che i gas, come i liquidi, sono scorrevoli, e prendono perciò la forma del recipiente che li contiene; ma *si espandono*, e quindi non hanno volume proprio, ma occupano sempre tutto il volume del recipiente che li contiene. Dimostrammo anche (§§ 14-15) che i gas sono molto *compressibili*, ed *elastici*.

Fig. 291.

218. **Principio di Pascal nei gas.** — Essendo anche i gas fluidi ed elastici, si estende ad essi il principio di Pascal:

La pressione esercitata in un punto di un gas, si trasmette con eguale intensità in tutte le direzioni.

Per dimostrarlo prendiamo un palloncino P pieno d'aria, al quale sono attaccati in diversi punti dei tubi di vetro ad U, il cui gomito contiene un liquido (Fig. 291). Al palloncino è applicato un cilindro A, in cui scorre uno stantuffo a tenuta; premendo su questo, il liquido s'innalza in tutti i tubi della medesima altezza.

Come nei liquidi, intenderemo anche ora per pressione di un gas, la forza con cui esso preme sull'unità di superficie. L'unità di pressione, è ancora quella definita nel § 199.

219. **I gas pesano.** — Anticamente si credeva che l'aria non pesasse. Si cita ancora un'esperienza di Aristotile, il quale pesò una vescica dapprima ritorta, cioè vuota, e poi ben gonfiata col fiato; non trovò alcuna differenza di peso. Diremo in seguito (§ 239) la ragione di questo fatto.

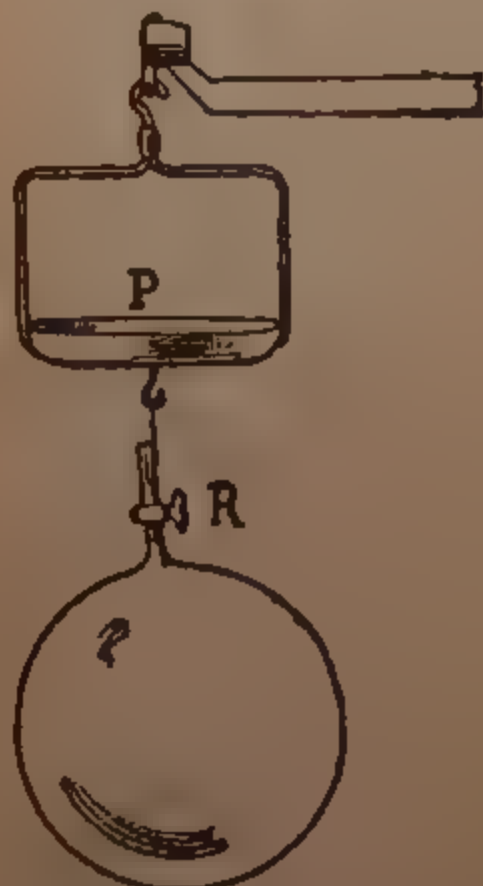



Fig. 292.

Ma già Galileo riuscì a dimostrare che comprimendo aria in un grosso fiasco, esso aumentava di peso. Oggi si dimostra che l'aria e tutti i gas pesano. Si prende un grosso pallone di vetro, il cui collo è chiuso da un rubinetto R (Fig. 292). Si fa il vuoto nel pallone, per mezzo della macchina pneumatica (§ 246), si chiude il rubinetto e si sospende il pallone sotto un piatto P di una bilancia idrostatica, equilibrandolo con una zavorra sull'altro piatto. Aprendo ora il rubinetto, nel pallone entra l'aria e la bilancia trabocca dalla sua parte: dunque l'aria entrata ha un peso. Mettendo dei pesi sull'altro piatto fino a riottenere l'equilibrio, si ricava il peso dell'aria entrata; divi-

dendo questo peso per il volume del pallone, si ottiene il peso dell'unità di volume di aria. Regnault trovò che:

Un litro di aria secca, a 0° C, alla pressione di 76 cm di mercurio (§ 221), (o come si dice, in condizioni normali), *pesa g 1,293.*

Questo peso non è trascurabile, perchè l'aria contenuta in una stanza può pesare parecchie centinaia di *kg*; gli altri gas hanno peso diverso. Così un m^3 di anidride carbonica pesa *g* 1977, e un m^3 di idrogeno (che è il gas più leggero) pesa appena *g* 89.

TABELLA

GAS	Peso in *g* di 1 litro a 0° e a 76 *cm*	Densità relativa all'aria
Aria secca.	1,293	1,0000
Ossigeno	1,430	1,1056
Azoto.	1,256	0,9713
Idrogeno	0,089	0,0693
Cloro	3,180	2,4502
Anidride carbonica. . .	1,977	1,5290
Metano	0,716	0,5576
Ammoniaca	0,791	0,5901

Esempio. *Quanto pesa l'aria di una stanza, delle dimensioni di* m³ *(5 × 6 × 4,50)*?
Il volume della stanza è: v = m³ (5 × 6 × 4,50) = m³ 135; quindi il peso dell'aria è (in condizioni normali): P = *kg* (1,293 × 135) = kg 174,5.

220. Pressione atmosferica. — Poichè l'aria pesa, dovrà esercitare sui corpi *una forza premente* che, su una data superficie, sarà *eguale* (come per i liquidi, § 203) *al peso di una colonna d'aria, che ha per base quella superficie, e per altezza la distanza da quella superficie al limite dell'atmosfera.* Essa si chiama la *pressione atmosferica*, ed è rilevante, come si dimostra con le seguenti esperienze:

Fig. 293.

1. **Un bicchiere d'acqua, pieno fino all'orlo, si ricopre alla bocca con un foglio di carta; tenendo questa col palmo della mano, si capovolge il bicchiere; togliendo la mano, l'acqua non cade** (Fig. 293). Ciò perchè la sostiene la pressione atmosferica, che è *maggiore del peso dell'acqua.*

2. **Pipetta.** – Se l'orifizio del recipiente è piccolo, non è necessaria la carta per sostenere l'acqua. Così avviene nella *pipetta*, che serve a togliere piccole quantità di liquido, da un recipiente che lo contiene. Essa è formata da un tubo, solitamente di vetro, della forma della Fig. 294, aperto ad entrambe le estremità. Si immerge la punta *B* nel liquido da estrarre, e si aspira da *A* con la bocca; con ciò dentro il tubo diminuisce la pressione e l'aria esterna spinge il liquido dentro la pipetta: questa si riempie. Si chiude allora l'estremità *A* col dito, e si può sollevare la pipetta, senza che il liquido esca; togliendo il dito il liquido esce.

3. Si prende un uovo ben sodo, e se ne toglie il guscio. Indi si prende una bottiglia vuota, vi si introduce un po' di carta e la si accende, gettandovi dentro un cerino acceso. Appena la carta ha finito di bruciare, si pone l'uovo sgusciato sul collo, con la parte più stretta in basso (Fig. 295). Si vedrà a poco a poco l'uovo penetrare nella bottiglia e cadervi dentro. Ciò perchè la carta bruciando scalda l'aria della bottiglia, la dilata e la scaccia fuori; si forma così una rarefazione come se l'aria fosse estratta con la macchina pneumatica; la pressione esterna allora premendo sull'uovo, lo spinge dentro.

Fig. 294.

Fig. 295.

4. **Crepavesciche.** – Su un foglio di questo libro la pressione atmosferica è di parecchi quintali; tuttavia il foglio la sopporta, perchè la pressione agisce su entrambe le faccie. Ma se togliamo la pressione su una delle faccie, il foglio non può più sopportare l'altra pressione, e si rompe.

È ciò che avviene nel *crepavesciche*, che è un cilindro di vetro, aperto ad entrambe le estremità; si chiude superiormente con una vescica, o con un foglio di carta, ben legato, a tenuta d'aria. Posto il cilindro sul piatto della macchina pneumatica ed estraendo l'aria, la pressione diminuisce all'interno di esso; la pressione esterna dapprima fa incurvare e poi rompe la carta con forte rumore, (Fig. 296).

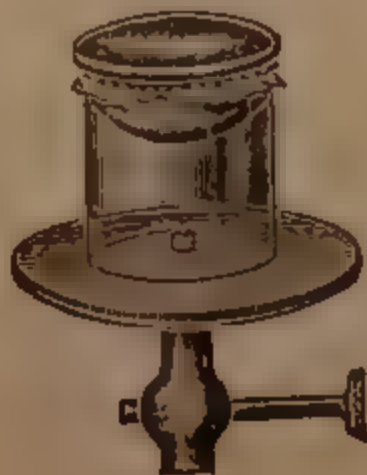



Fig. 296.

Fig. 297.

Se invece di carta si lega una lamina di gomma, questa non si rompe; ma assume la forma di una calotta, (Fig. 297). Ciò dimostra che anche ora *la pressione si esercita egualmente in tutti i punti della superficie premuta e perpendicolarmente a questa.*

5. **Emisferi di Magdeburgo.** – Il nome è dovuto alla *città* di Magdeburgo, ove fu eseguita la prima volta l'esperienza, da Otto de Guericke, borgomastro di quella città.

Sono due emisferi cavi di metallo, muniti di un largo orlo, ove combaciano esattamente a tenuta d'aria (Fig. 298); uno degli emisferi è munito di

un rubinetto e di un raccordo, per adattarlo alla macchina pneumatica. Fatti combaciare i due emisferi, si staccano facilmente se dentro vi è ancora l'aria; facendo invece il vuoto, e chiudendo il rubinetto, occorre uno sforzo grandissimo per staccarli, cioè per vincere la pressione atmosferica esterna che li tiene uniti, (Fig. 299).

Fig. 298. Fig. 299.

Nell'esperienza fatta a Magdeburgo nel 1654, in una pubblica piazza, gli emisferi erano così grossi, che non riuscivano a staccarli quattro cavalli che tiravano, con corde, in senso opposto, (Fig. 300).

Si noti che l'esperienza riesce in qualunque senso siano rivolti gli emisferi; ciò conferma che la pressione atmosferica agisce in tutte le direzioni.

6. **Ventose.** – Si spiega con la pressione atmosferica come, aspirando con la bocca l'aria dal buco di una chiave, questa resta attaccata al labbro; e come aderiscano al cristallo di una vetrina quei dischi di gomma muniti di uncino, adoperati per sostenere piccoli oggetti. In modo simile agiscono le *ventose*, con cui i polipi si attaccano alle loro vittime.

Fig. 300.

221. **Esperienza di Torricelli.** — Le esperienze precedenti sono qualitative ma non quantitative; cioè dimostrano l'esistenza della pressione atmosferica, ci dicono anche ch'essa è rilevante, ma non ne dànno la misura. Fu Evangelista Torricelli (1) il primo ad eseguire tale misura nel 1643, con una celebre esperienza che porta il suo nome.

---

(1) Torricelli Evangelista, allievo di Galileo; n. a Faenza nel 1608, m. a Firenze nel 1647.

Si prende una canna di vetro, lunga circa un metro, grossa circa quanto un dito, chiusa a un estremo ed aperto all'altro. Si riempie completamente di mercurio, se ne chiude l'estremità col dito e si capovolge in una vaschetta contenente mercurio (fig. 301); togliendo il dito quando l'estremità del tubo è sotto il mercurio, in modo da esser sicuri che non entri aria nel tubo, si vede scendere il mercurio e fermarsi a *circa 76 cm sopra il livello nella vaschetta*. Poichè sopra il mercurio, dentro il tubo, non vi è niente, neanche l'aria, cioè vi è il **vuoto barometrico o torricelliano**, e quindi non vi è niente che eserciti pressione, la causa che tiene sollevato il mercurio nel tubo è la pressione atmosferica che si esercita sul mercurio della vaschetta. Dunque:

La pressione atmosferica equivale al peso di una colonna di mercurio alta circa 76 *cm*.

A riprova di ciò si tolga la pressione esterna, collocando tutto l'apparecchio, tubo e vaschetta, dentro una grande campana di vetro, in cui si toglie l'aria con la macchina pneumatica; il mercurio scenderà nel tubo fino al livello nella vaschetta. Oppure, si ripeta l'esperienza di Torricelli, facendo uso di un tubo munito di un rubinetto all'estremità superiore A, e si faccia rientrare l'aria nella camera barometrica, aprendo questo rubinetto; si vedrà egualmente scendere il mercurio al livello esterno della vaschetta. In entrambi questi casi si equilibrano le due pressioni sul mercurio del tubo e della vaschetta, ed esso si dispone allo stesso livello, per il principio dei vasi comunicanti.

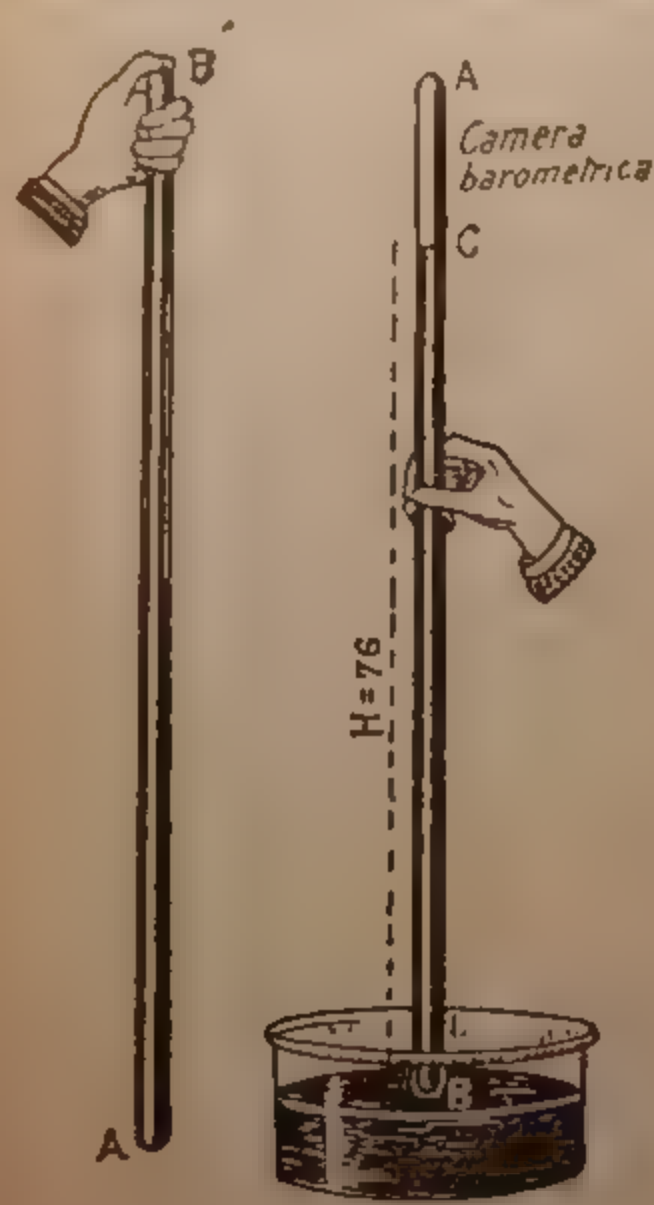
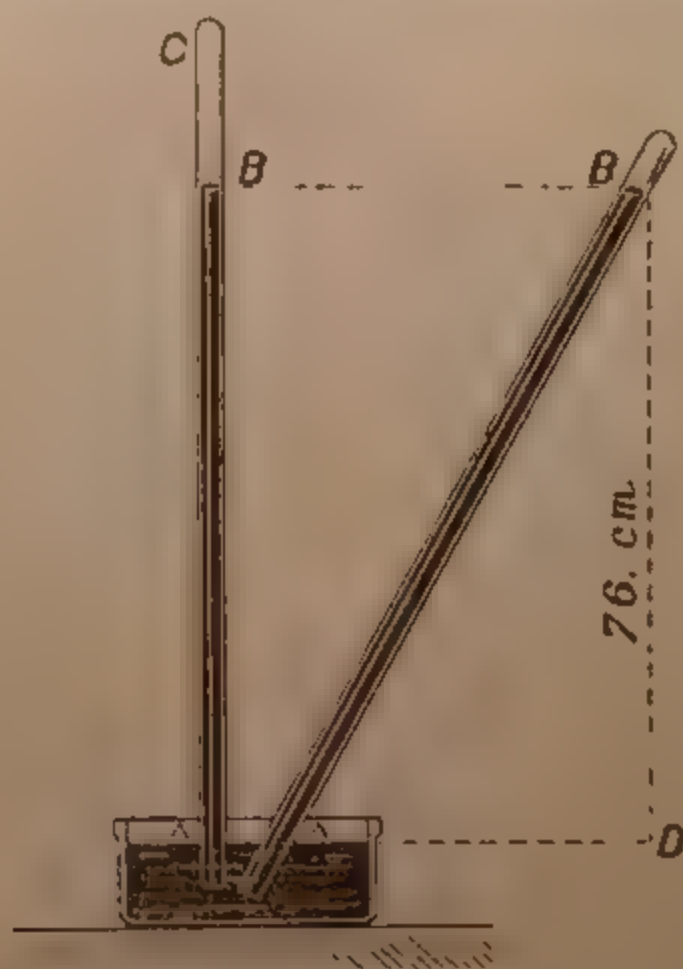



Fig. 301.

Fig. 302.

L'altezza del mercurio è indipendente dalla forma, diametro, inclinazione, del tubo; il mercurio si ferma alla stessa altezza in tubi di diametro e forma diversa; così pure, inclinando il tubo (Fig. 302), il mercurio si dispone ancora alla medesima altezza dal livello nella vaschetta.

Sulla sezione di 1 cm^2, una colonna di 76 *cm* di altezza ha il volume di 76 cm^3, e il peso del mercurio è allora, per la solita 4) del § 162:

$$p = g\,(13,59 \times 76) = 1033 \text{ grammi.}$$

Per questo assumemmo tale valore come equivalente alla *pressione di un'atmosfera* (§ 199).

Per formare lo stesso peso con l'acqua, occorrono *cm* 1033, cioè *m* 10,33.

Es.: *Se nell'esperienza di Torricelli si adoperasse acido solforico, anzichè mercurio, quanto dovrebbe essere alto il tubo di vetro?*

Poichè la pressione atmosferica è di *g* 1033 per *cm*², per formare tale peso con acido solforico, di densità $d = 1,84$, occorre il volume:

$$v = \frac{P}{d} = \text{cm}^3\, \frac{1033}{1,84} = \text{cm}^3\ 561$$

che, su 1 *cm*² di base, corrisponde all'altezza di *cm* 561 o *m* 5,61. Il tubo di vetro deve avere un'altezza maggiore di *m* 5,61.

La forza con cui l'atmosfera preme su un corpo alla superficie terrestre, è al solito, per la 7) del § 198, proporzionale alla superficie del corpo; e può assumere perciò valori grandissimi. Su una pagina di questo libro sorpassa già i 300 *kg*; un uomo normale sopporta una forza di oltre 7 *tonn*, che può sopportare perchè agisce anche nell'interno del corpo, in modo analogo a quanto avviene per la carta del crepavesciche, (§ 220 - 1); e la forza con cui l'atmosfera preme sulla superficie totale della Terra supera i 5 *quadrilioni di tonnellate!*

222. **Barometro normale.** — Il valore della pressione atmosferica non è costante; esso varia da luogo a luogo con l'altitudine (§ 227), e nello stesso luogo col tempo. Per averne, quando si vuole, la misura, si ricorre ai *barometri*; essi sono **a mercurio e metallici.**

Il **barometro normale** riproduce l'esperienza di Torricelli. Ma occorre un tubo di almeno *cm* 2,5 di diametro; perchè altrimenti il mercurio, per capillarità (§ 268), rimane alquanto più basso del suo vero livello; si farà bollire il mercurio nel tubo, per scacciarne le bollicine d'aria e l'umidità, che raccogliendosi poi nella camera barometrica, eserciterebbero alquanta pressione sul mercurio; la lettura dell'altezza barometrica si può fare con grande esattezza col *catetometro*, che non descriviamo. All'apparecchio è annesso un termometro *T* (Fig. 303), per leggere la temperatura ambiente. Ciò è necessario per fare la cosidetta *correzione della temperatura*, all'altezza del mercurio letta sull'apparecchio. Difatti, se la temperatura aumenta, il mercurio diminuisce di densità, cioè diventa più leggero; quindi per fare equilibrio alla pressione atmosferica, occorre una colonna di mercurio un po' più alta che se la temperatura fosse a 0°. Per fare questa correzione, si fa uso di una formula, o meglio di apposite tabelle.

Fig. 303.

223. **Barometro di Fortin.** — Il barometro normale è abbastanza esatto; ma non è trasportabile, quindi è poco adoperato. Oggi si usa molto, in tutti i casi, il **barometro di Fortin.** Esso è rappresentato in complesso nella Fig. 304, mentre la Fig. 305 mostra più dettagliatamente la vaschetta, che è la parte più importante dell'apparecchio. È costituito di un tubo di vetro, più grosso in alto, per evitare l'errore di capillarità; ma più piccolo nella parte rimanente, per risparmio di peso. L'estremità inferiore del tubo è immersa in un pozzetto, formato da un

bicchiere di vetro *C*, il cui fondo è costituito da un sacchetto di pelle di camoscio *L*, che può alzarsi o abbassarsi mediante una vite *S*, manovrabile dall'esterno. Il tutto è contenuto in una custodia di ottone. Per trasportare l'apparecchio, si avvita *S* finchè il pozzetto e tutto il tubo si riempiono di mercurio; indi si capovolge tutto l'apparecchio, si mette in un astuccio di cuoio, e si porta a spalla come un fucile. Per eseguire la misura, si raddrizza l'apparecchio, si svita *S* finchè il mercurio, nel poz-

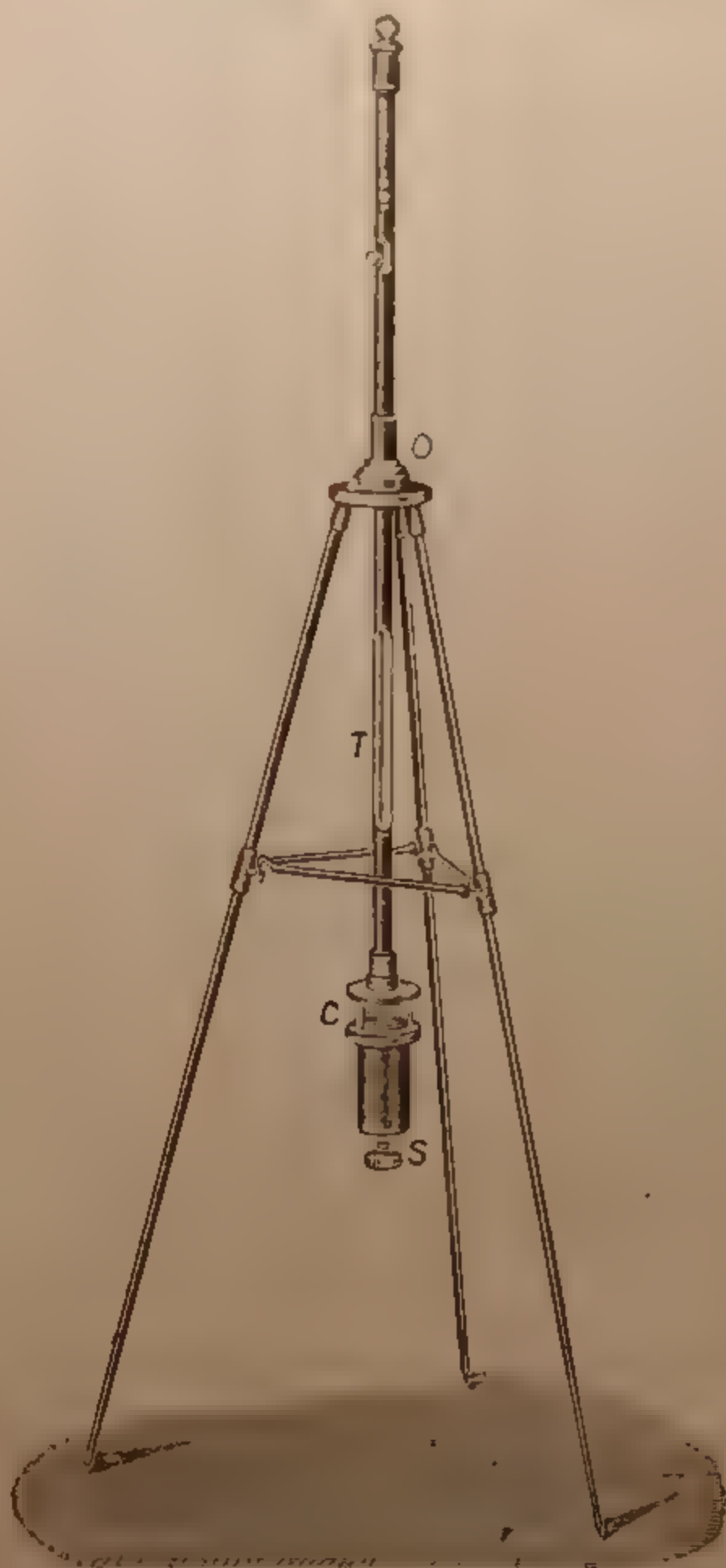
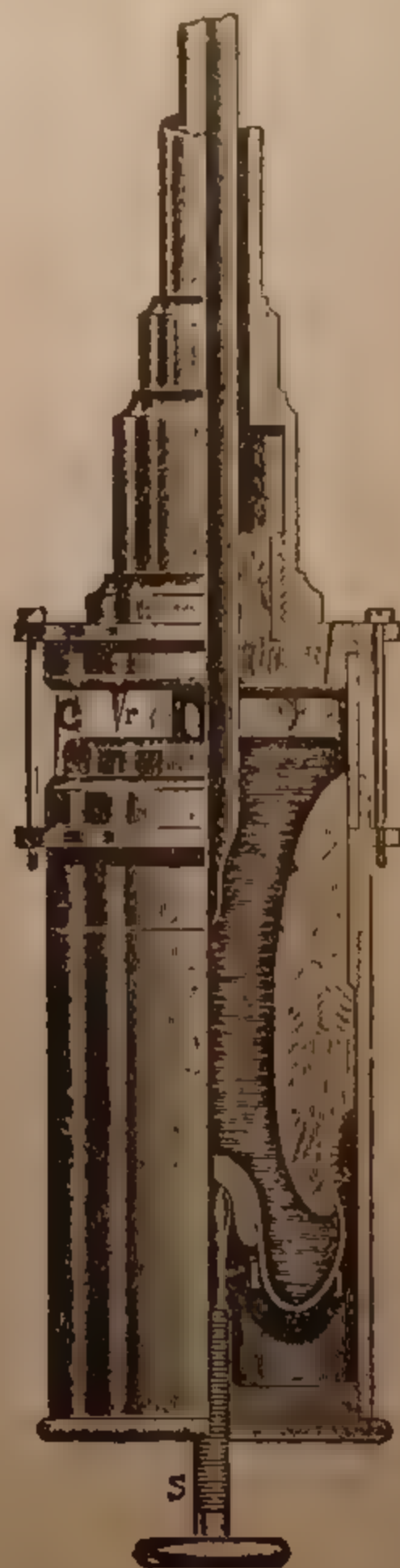



Fig. 304. Fig. 305.

zetto, arriva a sfiorare una puntina *r* di avorio, e si legge l'altezza del mercurio nel tubo, per mezzo di un nonio (§ 21), su una graduazione fatta sulla custodia di ottone che circonda il tubo di vetro. Questo, vicino al pozzetto, è fasciato con un pezzetto di pelle, che chiude l'intervallo tra il tubo di vetro e la custodia di ottone, ed impedisce al mercurio della vaschetta di uscire all'esterno; ma è sufficientemente porosa, da permettere all'aria esterna di penetrare nella vaschetta ed esercitare la sua pres-

sione sul mercurio. Un termometro T dà l'indicazione della temperatura, per la correzione da farsi.

Il tubo barometrico deve mantenersi verticale; altrimenti la lettura fatta sulla graduazione della custodia sarebbe errata. Per questo si fa uso di una *sospensione cardanica* O (Fig. 304); con questo nome si chiama un sistema di due anelli, imperniati con due assi X ed O fra loro perpendicolari (Fig. 306); in mezzo vi è il tubo A del barometro. Questo snodo fa sì che il tubo può muoversi in tutti i sensi, come se fosse sostenuto da un filo flessibile, e quindi assumere la posizione verticale, sotto l'azione della gravità.

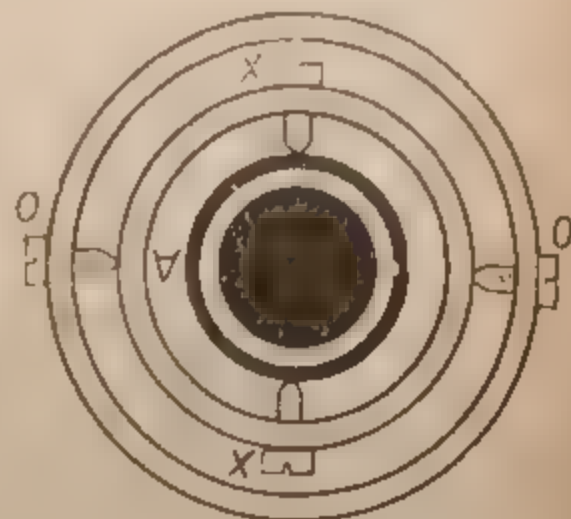



Fig. 306.

224. **Barometri metallici.** — I barometri a mercurio sono assai sensibili ed esatti; ma sono ingombranti e fragili. Quando non occorra una grande esattezza, si ricorre ai *barometri metallici*, molto adoperati nella pratica. Ve ne sono di due tipi:

L'**aneroide** è formato da un tubo metallico T a sezione schiacciata, chiuso alle estremità, piegato ad anello, e sostenuto alla sua metà dentro una scatola che fa da custodia, (Fig. 307). Nel tubo è stato fatto il vuoto. La forza

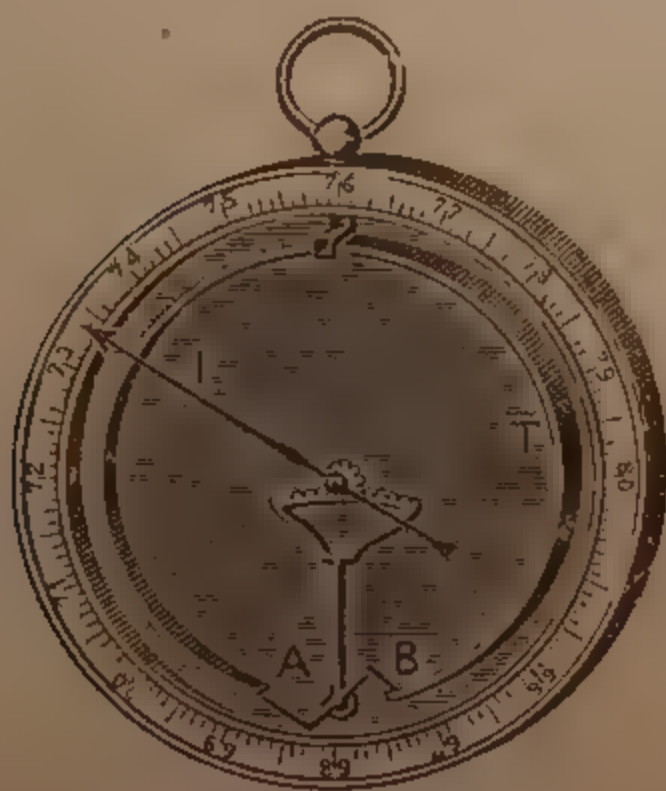
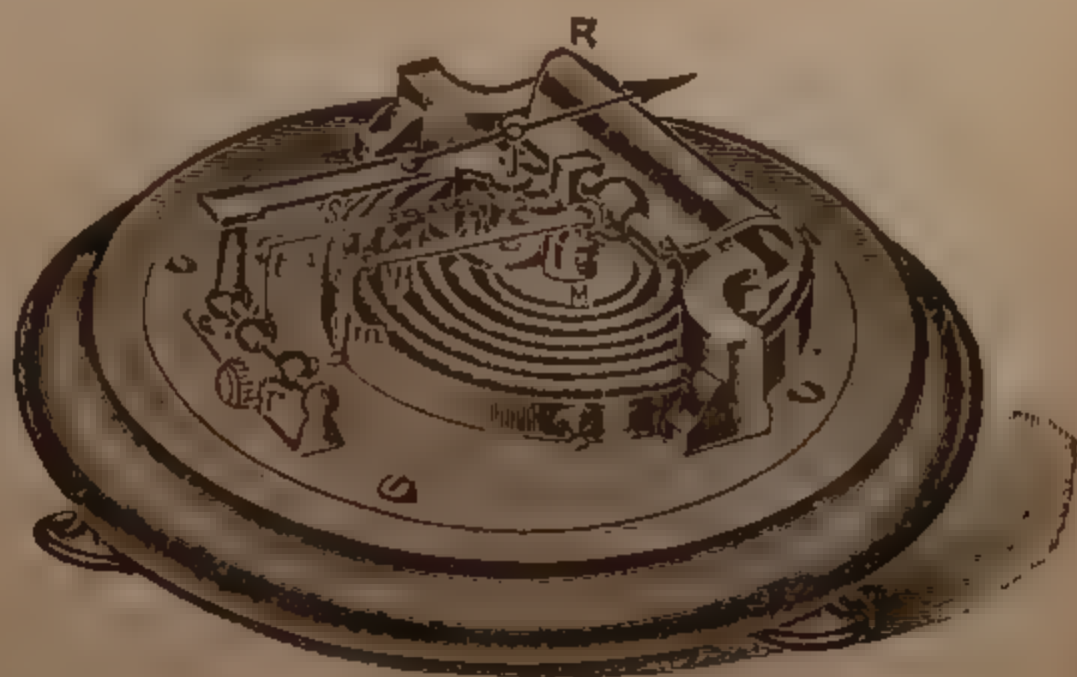



Fig. 307. Fig. 308.

con cui l'atmosfera preme sul tubo, dipendendo dalla superficie premuta, è maggiore sulla parete laterale convessa del tubo che su quella concava (verso il centro), di area minore. Un aumento della pressione atmosferica fa perciò avvicinare le estremità A e B del tubo; mentre per una diminuzione di essa le estremità si allontanano, per l'elasticità del tubo. Questi movimenti, piccolissimi, vengono ampliati e trasmessi ad un indice I, la cui punta si muove avanti ad una graduazione, che corrisponde alle altezze del barometro a mercurio, ed è fatta per confronto con questo.

L'**olosterico** (spesso chiamato anch'esso *aneroide*) adoperato più comunemente, è formato da una scatoletta metallica rotonda M, col coperchio ondulato e flessibile (Fig. 308); nell'interno di essa vi è il vuoto. La pressione atmosferica schiaccerebbe la scatola, se una forte molla di acciaio R non ne tenesse sollevato il coperchio, facendole equilibrio. Le variazioni

della pressione atmosferica si traducono in deformazioni piccole di questo coperchio: si amplificano anche ora e si trasmettono ad un indice, che segna il valore della pressione su apposita graduazione.

I barometri metallici col tempo si sregolano. Occorre ogni tanto confrontarli col barometro a mercurio, e correggere la posizione dell'indice; girando un'apposita vite, che si vede da un foro praticato solitamente nella parte posteriore della scatola.

225. **Barografo.** — Per il grande interesse che ha la conoscenza della pressione atmosferica ad ogni ora del giorno, si sono costruiti barometri, i quali scrivono su un foglio di carta il valore della pressione atmosferica in ogni tempo. Si chiamano **barometri registratori o barografi**; la Fig. 309 ne rappresenta uno dei più usati. È basato sul principio del barometro olosterico; ma anzichè una sola vi sono più scatolette S di metallo sovrapposte, in modo da sommarne le deformazioni ed ottenere un movimento assai più ampio che nell'olosterico. Questo movimento è trasmesso ad una leva L, la cui estremità porta una *penna* P, contenente inchiostro speciale non evaporabile; essa poggia su un foglio di carta, avvolto su un cilindro di metallo C. Questo contiene nell'interno un orologio, che gli fa compiere un giro in un tempo stabilito; p. es., in una settimana. La penna P, alzandosi o abbassandosi per la variazione della pressione atmosferica, lascia sulla carta una linea sinuosa, che permette di rilevare il valore di essa pressione in un'ora qualsiasi della settimana.

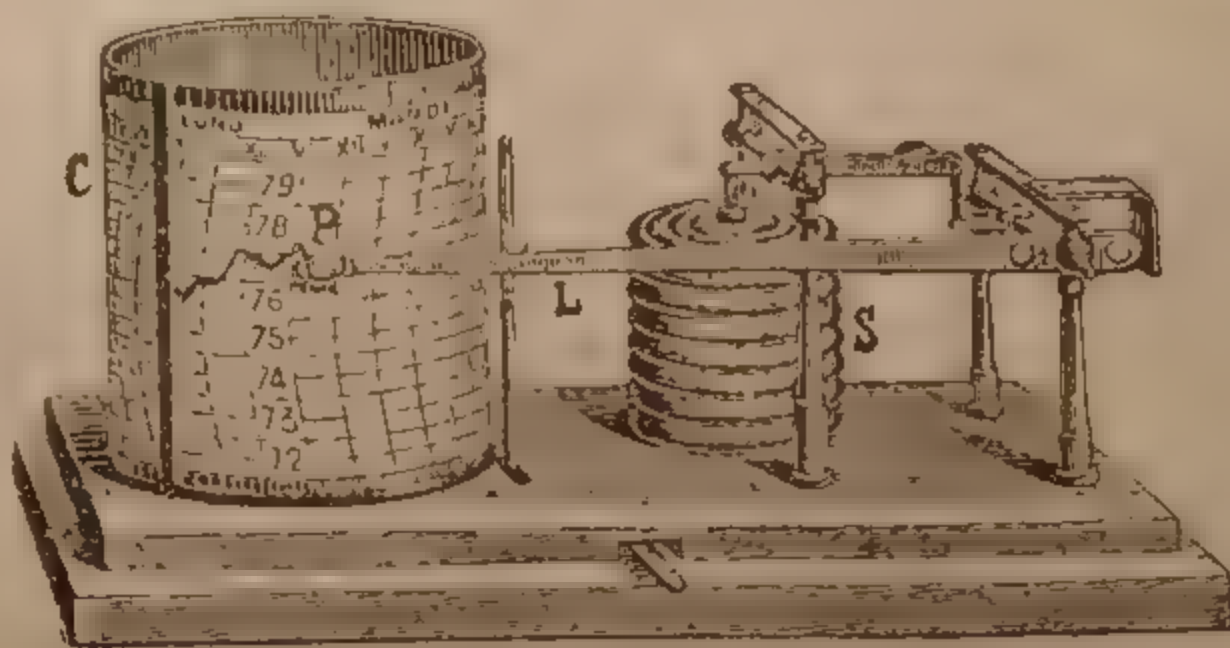



Fig. 309.

226. Problemi sulla pressione atmosferica.

a) Problemi risoluti.

1. *Quanti litri d'aria (nelle condizioni normali) occorrono per formare un peso eguale a quello di 150 cm³ di mercurio?*

Risoluzione. — Il peso di 150 cm^3 di mercurio (a 0° C) è:

$$P = Vd = g\,(150 \times 13{,}59) = g\ 2038{,}5.$$

Poichè un litro d'aria pesa g 1,293 (§ 219), per formare tal peso occorrono:

$$v = \frac{P}{1{,}293} = l\ \frac{2038{,}5}{1{,}293} = l\ 1576{,}6.$$

2. *Qual'è la forza necessaria per staccare due emisferi di Magdeburgo di raggio* **r**? (Si suppone nell'interno il vuoto perfetto).

Risoluzione. — Rappresentiamo in sezione, nella Fig. 310, i due emisferi attaccati, col vuoto internamente. Consideriamo una sezione qualsiasi $(A\,B) = s$ della super-

ficie di uno di essi, e sia s così piccola, da poterla considerare come piana. Su tale sezione l'atmosfera esercita una forza che è:

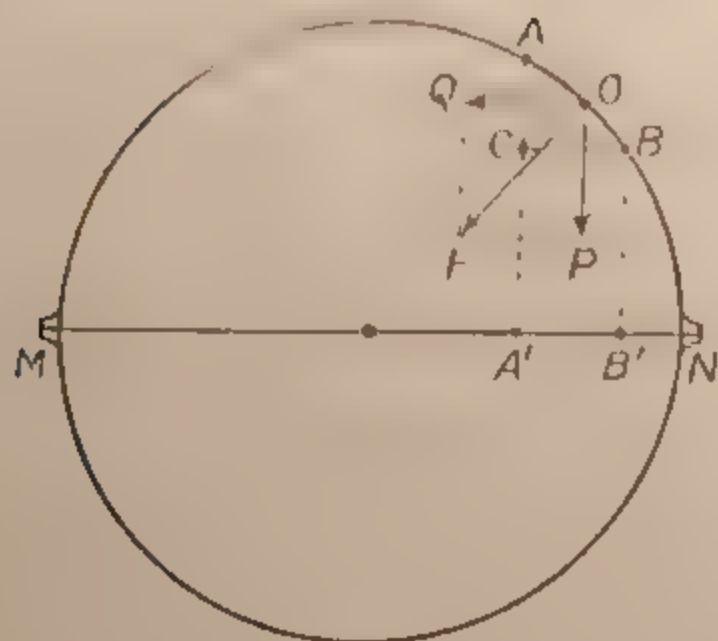



Fig. 310.

$$1) \qquad F = 1033 \times s \, .$$

Rappresentiamo questa forza con OF; scomponiamola nelle due: OP perpendicolare al piano del cerchio massimo (MN), base dei due emisferi, ed OQ parallela a tal piano. La componente OQ non esercita alcuna azione che si opponga al distacco dei due emisferi; quindi la forza da vincere è solamente la OP. I triangoli OPF ed ACB sono simili, perchè entrambi rettangoli, ed $\widehat{FOP} = \widehat{ABC}$ perchè hanno i lati perpendicolari e sono entrambi acuti; quindi si ha la proporzione:

$$(OP) : F = (CB) : s \, .$$

Sostituiamo ad F il valore 1), a $CB = A'B'$, perchè lati opposti di un rettangolo; e semplificando per s:

$$(OP) : 1033 = (A'B') : 1 \, ; \qquad \text{da cui:}$$

$(OP) = 1033\ (A'B')$. Cioè, la forza esercitata dall'atmosfera sulla sezione (AB) equivale, per il distacco dei due emisferi, alla forza che l'atmosfera eserciterebbe sulla proiezione $(A'B')$ di (AB) sul piano MN. Quindi, considerando tutte le sezioni elementari che formano l'emisfero (MAN), *la pressione atmosferica si oppone al suo distacco, con una forza eguale a quella che essa esercita sul cerchio massimo* (MN).

Se il raggio degli emisferi è r (cm), l'area del cerchio massimo è $S = \pi r^2$ (cm²), e la pressione atmosferica su di esso:

$$\mathbf{P = 1033 \times \pi r^2 \text{ (grammi).}}$$

Tale è la forza di trazione che occorre adunque applicare a ciascun emisfero.

Osservazione. Non bisogna dire che la forza totale necessaria per staccare i due emisferi sia $2P$; perchè, se si considera la forza P su un emisfero, l'altra pure P sull'altro emisfero è reazione della prima. Infatti, si potrebbe fissare uno degli emisferi ad una parete, e allora basta la forza P sull'altro per staccarlo.

b) Problemi da risolvere.

1. Una botte di lamiera di ferro, di forma cilindrica, ha il diametro di *cm* 80 e l'altezza di *m* 1,50. Essa è chiusa a tenuta d'aria, e contiene aria a 0°, compressa alla pressione di 3 *atm*. Calcolare: il peso dell'aria contenuta nella botte; la forza totale sopportata dalle pareti.

2. Calcolare il valore della pressione atmosferica su una pagina di questo libro.

3. Calcolare quale diametro minimo devono avere gli emisferi dell'esperienza di Magdeburgo, di cui a Fig. 300, supponendo che ogni cavallo esercitasse uno sforzo di trazione di 150 *kg*.

4. Esprimere in *barie* (§ 199) la pressione atmosferica.

5. Un tubo barometrico contiene mercurio sino all'altezza di *cm* 70 dal livello della vaschetta, e sul mercurio una colonna di acido solforico dell'altezza di *cm* 30. Qual'è il valore della pressione atmosferica?

Applicazioni del barometro.

227. **Altimetria.** Il barometro può servire per la misura della **altitudine**, cioè dell'altezza di un luogo sul livello del mare. Ciò è basato sul fatto, che aumentando l'altezza da terra diminuisce la pressione atmosferica; essendo nota la legge con cui sono legate l'altezza e la pressione atmosferica, dalla misura di questa si può ricavare l'altitudine cercata.

La diminuzione dell'altezza barometrica al livello del mare, è di circa 1 *mm* per 10 *m* d'innalzamento; ma va diminuendo per le altezze superiori. La legge con cui diminuisce la pressione atmosferica con l'altezza è alquanto complessa; secondo Laplace e Gauss essa si esprime con la formula:

$$1) \qquad z = 18\,405 \log \frac{H}{h} \left(1 + \frac{t + t'}{500}\right) (1 + 0{,}00\,255 \cos 2\varphi)$$

nella quale: H e h sono le altezze barometriche nel luogo di cui si vuole l'altitudine e in un altro luogo, più in basso, di altitudine nota, t e t' le temperature dell'aria nei due luoghi, φ la latitudine (questa fa variare il peso del mercurio, § 102), e z la distanza verticale in metri dei due luoghi. Più semplicemente, con sufficiente approssimazione, per altitudini non superiori ai 10 *km*, si può applicare la seguente **legge di Laplace:**

La pressione atmosferica decresce in progressione geometrica, mentre l'altitudine cresce in progressione aritmetica.

Diamo alcuni valori della pressione alle diverse altezze:

altitudine *m*:	0	400	800	1200	1600	2000	2500	3000	3500	4000	4500	5000
press. atm. *mm*:	760	724	690	658	627	598	562	530	495	457	438	410

La 1) dice che per ottenere una sufficiente approssimazione nella misura dell'altitudine, occorre fare osservazioni contemporanee non solo della pressione barometrica, ma anche della temperatura e dell'umidità dell'aria, oltre che nel punto in cui si deve misurare l'altitudine, anche in un altro punto di altitudine nota. In tal modo si può benissimo raggiungere l'approssimazione di 1 *m* su 2000 *m*, pari a quella dei metodi trigonometrici. Mentre il dedurre l'altitudine da una semplice lettura del barometro, come fanno gli alpinisti, può condurre ad un errore anche del 10%.

Barometri metallici aventi una doppia graduazione, l'una per la pressione atmosferica, l'altra per l'altitudine corrispondente, sono adoperati dagli alpinisti e dagli aviatori, e si chiamano *altimetri*, (Fig. 311 (*a*)).

228. **Previsione del tempo.** — La pressione media, a livello del mare, è di 760 *mm*; tale pressione quindi indica tempo *variabile*. Se la pressione atmosferica diminuisce, per es., a 750 *mm*, vuol dire che l'aria è più leggera del normale; il che avviene se contiene umidità (il vapore d'acqua è più leggero dell'aria); tale pressione quindi è indizio di *pioggia*.

Un abbassamento maggiore del barometro, non può più spiegarsi con l'umidità; se in una regione vi è bassa pressione (si chiama un **ciclone**)

l'aria sarà spinta dai punti di massima pressione (cioè un anticiclone) verso tale regione, e si stabilisce un vento più o meno forte, quindi l'abbassarsi del barometro a 740-730 *mm* è indizio rispettivamente di *vento* e *uragano*.

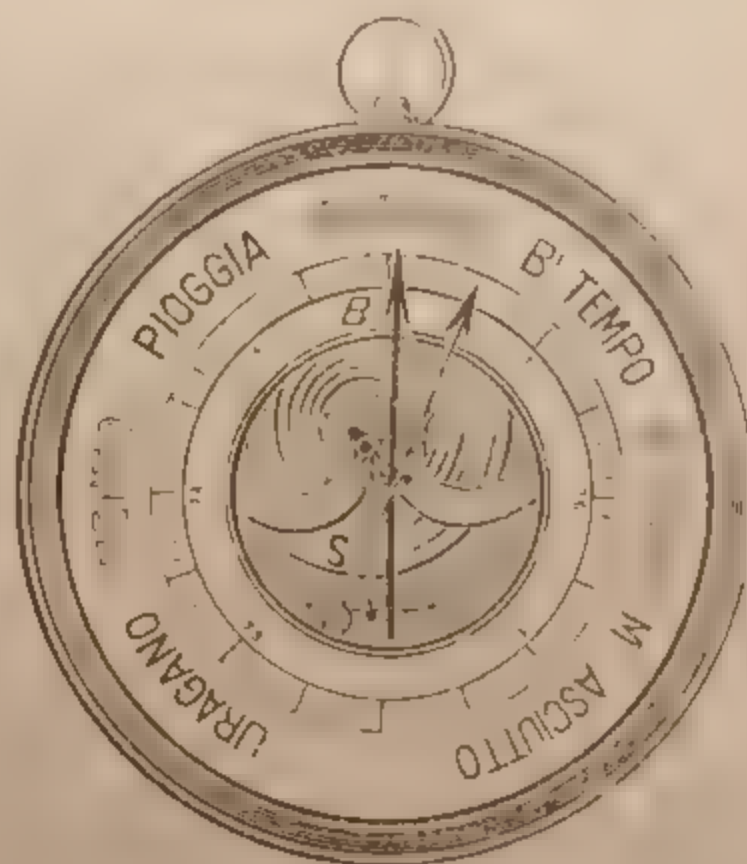



Fig. 311 (*a*). Fig. 311 (*b*).

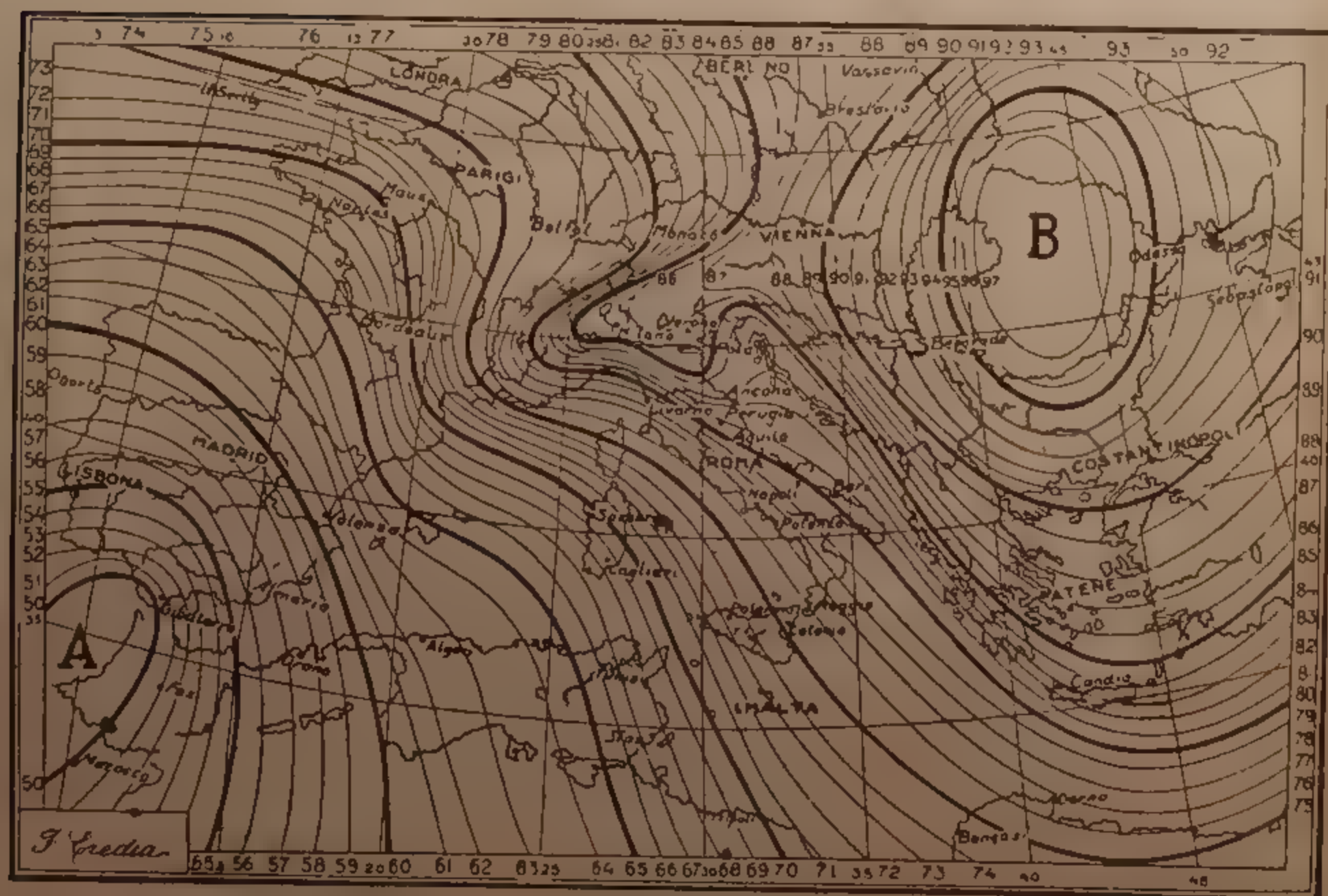



Fig. 312.

Viceversa, se il barometro sale a 770-780 *mm*, è indizio di *bel tempo* e a 790 *mm* di tempo *molto asciutto*.

Un barometro con tali indicazioni accanto alla graduazione, serve pertanto per la previsione del tempo, (Fig. 311 (*b*)). Però queste indicazioni non

sono assolute, ma relative al valore della pressione barometrica nelle regioni circostanti; occorre cioè conoscere il valore della pressione atmosferica nei vari luoghi di una vasta regione. Ciò non può farlo un privato; ma lo fa un apposito Ufficio Centrale di Meteorologia, residente nella Capitale, che giornalmente riceve per telegrafo i dati meteorologici dai vari Osservatorî della Nazione e dell'Estero. Unendo con una linea continua, su una carta geografica, i punti di una regione in cui la pressione atmosferica ha lo stesso valore, si ottiene una linea chiamata **isobara**. La Fig. 313 mostra l'insieme delle isobare sull'Europa, in un dato giorno. In essa si vede chiaramente che il punto A di minima pressione (*ciclone*) è sulla costa occidentale del Marocco, ed il punto B di massima pressione (*anticiclone*) è in Ungheria; è facile quindi prevedere la direzione del vento da B verso A; cioè, per l'Italia, dal Nord-Est [1]. La velocità del vento si deduce dalla differenza di pressione e dalla distanza fra A e B.

In base ai dati ricevuti e alle carte corrispondenti, l'Ufficio Centrale compila un *Bollettino meteorologico*, che contiene la previsione del tempo a 24 ore di distanza. Ciò nonostante, neanche tale previsione è sicura; dipendendo le condizioni meteorologiche da varie cause variabili anche da un'ora all'altra, e da locali configurazioni del terreno. La previsione del tempo a maggiore distanza, come quella degli almanacchi, è quindi illusoria.

Esercizio. Si eseguisca la grafica dell'altitudine coi dati del § 227, e da essa si ricavi:

1. I valori dell'altitudine se il barometro segna *mm*: 702, 580, 445.
2. I valori della pressione atmosferica alle altitudini di *m*: 650, 2800, 4200.

Relazione tra pressione e volume.

229. **Legge di Boyle.** — Abbiamo visto, qualitativamente, che i gas sono molto compressibili (§ 14); vogliamo ora meglio studiare le leggi di questo fenomeno.

Il volume di un gas può variare con la pressione e con la temperatura. Tralasciamo ora l'influenza della temperatura, che studieremo poi in *Termologia*; cioè supponiamo che la temperatura del gas si mantenga costante. Allora, nella compressibilità dei gas, le variabili del fenomeno sono solamente la *pressione* ed il *volume*. Una relazione tra esse fu trovata dall'inglese Boyle [2] nel 1662, e dal francese Mariotte [3] nel 1676; essa si chiama **la legge di Boyle o di Mariotte**, e si enuncia così:

A temperatura costante, i volumi di una data massa gassosa sono inversamente proporzionali alle pressioni.

Cioè: raddoppiando, triplicando... la pressione, il volume del gas diventa la metà, un terzo..., e viceversa. Chiamando V il volume del gas alla pres-

(1) La direzione del vento varia alquanto, per la rotazione della Terra sul suo asse.
(2) Boyle Robert; n. a Lismore nel 1627, m. a Londra nel 1691.
(3) Mariotte Edme, n. a Digione verso il 1620; m. a Parigi nel 1684.

sione H, e V' il volume del medesimo gas alla pressione H', [illegible] dice che:

$$V : V' = H' : H ; \qquad \text{risolvendo:}$$

$$VH = V'H'; \qquad \text{o anche:} \qquad VH = \text{costante}; \qquad 1)$$

da cui l'altro enunciato:

Il prodotto del volume di una data massa di gas per la sua pressione, è una quantità costante.

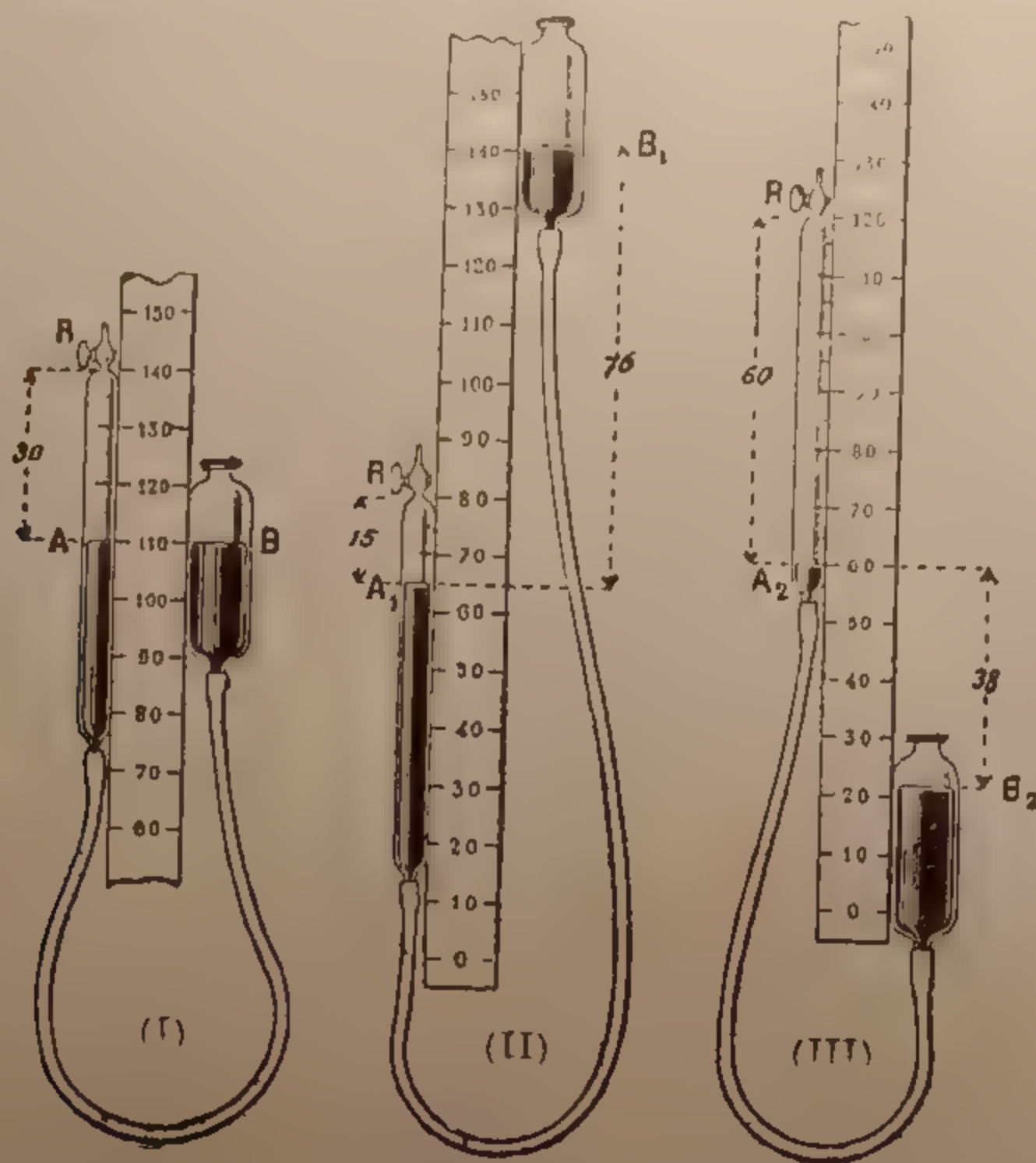



Fig. 313.

La dimostrazione sperimentale si può eseguire nella seguente maniera. Lungo un'asta verticale graduata, sostenuta da un piede, omesso nella Fig. 313, possono scorrere due tubi di vetro A e B, uniti da un robusto tubo di gomma. B è aperto in cima, e comunica perciò con l'aria esterna; A è graduato, e si può chiudere con un rubinetto R.

Siano A e B alla stessa altezza (Fig. 313 - I), ed R aperto; si mette mercurio nei due tubi, che si dispone allo stesso livello. Si chiude R, e rimarrà rinserrata in A una certa massa d'aria, alla pressione 1 (un'atmosfera) e che occuperà un certo volume, p. es. 30 divisioni.

Alziamo ora il tubo B e portiamolo in B_1 (o abbassiamo A) (Fig. 313 - II), in modo che tra il mercurio dei due tubi si stabilisca un dislivello di 76 *cm*, allora sull'aria racchiusa in A si esercita un'altra atmosfera di pressione, ed in totale 2 *atm*; cioè la pressione è *raddoppiata*; orbene, si osserva che il mercurio è salito in A_1 fino alla divisione 15; cioè il volume dell'aria è

ridotto a metà. Alzando ancora B, in modo che il dislivello del mercurio fra i due tubi sia $76 \cdot 2 = 152$ *cm*, l'aria di A si riduce ad *un terzo*; ecc.

Se invece di alzare B lo abbassiamo al di sotto di A, finchè il dislivello del mercurio fra A_2 e B_2 sia $76 : 2 = 38$ *cm*, (Fig. 313 - III), allora l'aria in A_2 è alla pressione di *mezza* atmosfera, ed il suo volume diventa *doppio*, occupando 60 divisioni, ecc.

230. **Deviazioni dalla legge di Boyle.** — La legge di Boyle non è rigorosa; esperienze più accurate di Régnault (fino a 30 *atm*) e di Amagat[1] (fino a 2000 *atm*) dimostrarono che la legge è solo approssimata; ma è tanto più approssimata quanto più il gas è lontano dalla liquefazione. Per i gas come l'aria, l'idrogeno, l'azoto, ecc., difficilmente liquefacibili, in pratica la legge si ritiene soddisfatta. A rigore la legge è esatta per i gas **perfetti o ideali**; che sarebbero i gas non liquefacibili e quindi non esistenti in natura.

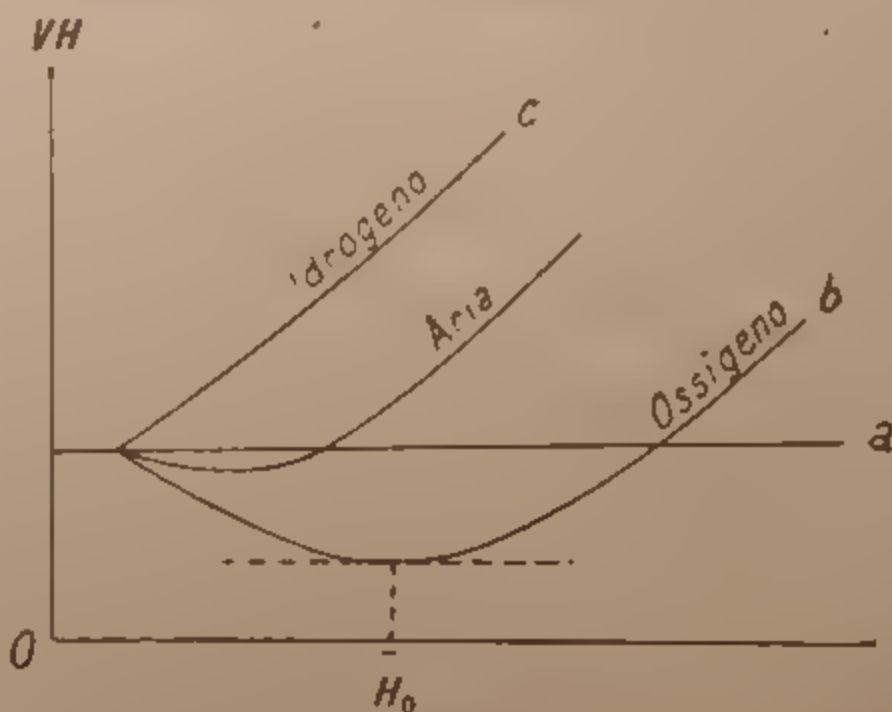
Fig. 314.

Riportando come ascisse i valori della pressione H, e come ordinate i valori corrispondenti del prodotto VH, si ottengono per l'idrogeno, l'aria e l'ossigeno, i diagrammi della Fig. 314. Se la legge di Boyle fosse esatta, cioè $VH =$ costante, i diagrammi dovrebbero essere rette parallele all'asse delle ascisse. Osservando invece la curva dell'ossigeno, se essa prima piega in basso, vuol dire che per piccoli valori della pressione VH diminuisce, cioè *il gas si comprime di più di quello che vuole la legge*. Per un dato valore H_0 della pressione, la curva è per un piccolo tratto coincidente con la parallela r all'asse delle ascisse; cioè in quel tratto *il gas segue la legge di Boyle*. Aumentando la pressione la curva sale, cioè il *gas si comprime meno di quello che vuole la legge di Boyle*. Così avviene in generale per tutti i gas. Fa eccezione l'idrogeno; per il quale la curva non ha alcun tratto discendente; cioè *l'idrogeno si comprime sempre meno di quello che vuole la legge di Boyle*.

Variando la temperatura del gas, varia la forma dei diagrammi. A temperature molto basse anche la curva dell'idrogeno mostra a principio un tratto discendente, come avviene per gli altri gas.

231. **Legge di Dalton.** — Si può estendere la legge di Boyle alla mescolanza di più gas. Dalton[2] enunciò la seguente legge:

La pressione esercitata dal miscuglio di più gas, è uguale alla somma delle pressioni, che eserciterebbe ciascun gas, se occupasse da solo tutto il volume della mescolanza.

---

(1) Amagat Émile, dell'Univ. cattolica di Lione; n. nel 1841, m. nel 1915.
(2) Dalton Iohn; n. a Eagesfield nel 1766, m. a Manchester nel 1844.

232. Densità dei gas. — Se il volume di una data massa di gas diminuisce con la pressione, viceversa ne aumenta la densità o il peso specifico, cioè, *a temperatura costante la densità di un gas cresce proporzionalmente alla pressione.*

Il peso specifico di un gas si suole riferire all'aria, anzichè all'acqua; cioè si definisce: *il rapporto tra il peso di un gas, ed il peso di un egual volume* ***d'aria secca, a 0° C e a 760*** mm *di pressione.*

Ma così definito, il peso specifico di un gas non è costante, ma varia, come s'è detto sopra, con la pressione. Interessa invece avere, per un dato gas, un numero fisso che ne misura il peso specifico. Per ciò si preferisce adottare la seguente definizione:

Il peso specifico di un gas è il rapporto tra il suo peso e quello di un egual volume di aria secca, nelle stesse condizioni di pressione e di temperatura.

Tralasciamo qui di descrivere i metodi usati per la determinazione del peso specifico dei gas e dei vapori, essendo quest'argomento svolto nella Chimica, per la quale questo dato ha grande importanza. Nella Tabella del § 219, abbiamo riportato i valori del peso specifico di alcuni fra i gas più noti.

233. Manometri a mercurio. — Si chiamano **manometri** gli apparecchi che servono a misurare la pressione di un fluido; essi possono essere a **mercurio** e **metallici**. I manometri a mercurio possono essere ad **aria libera** e ad **aria compressa**.

234. Manometro ad aria libera. — È formato da un tubo di vetro, solitamente ricurvo ad U (Fig. 315). Esso ha una branca più lunga ed aperta; l'altra branca comunica col recipiente A, contenente il fluido del quale si vuole misurare la pressione. Un rubinetto R permette di interrompere tale comunicazione. Nel tubo è contenuto del mercurio; se in A vi è pressione eguale a quella esterna, il mercurio si dispone nelle due branche *allo stesso livello.* Se invece in A vi è pressione diversa da quella esterna, il mercurio sale nella branca S se la pressione in A è minore, sale invece in T se la pressione in A è maggiore della esterna. Sia P la pressione in A, H la pressione esterna, h il dislivello del mercurio nelle due branche. La pressione in A sarà:

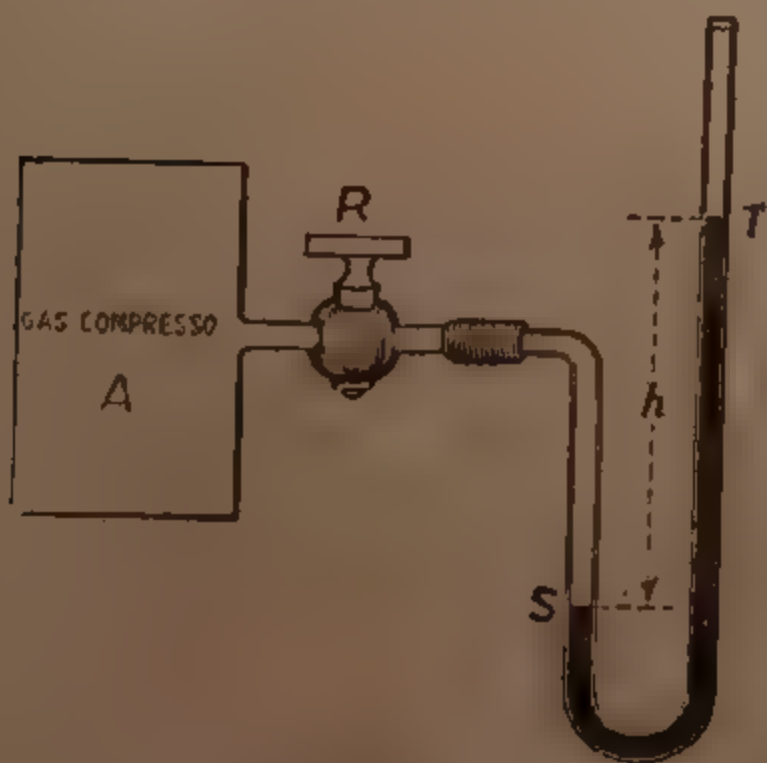
Fig. 315.

$$P = H \pm h \qquad (2)$$

e sarà misurata in *centimetri di mercurio* se anche H ed h son espressi in centimetri; il segno + si assume nel caso che la pressione in A è maggiore di quella esterna; il segno — nel caso opposto.

Se la pressione in A è molto grande, anzichè esprimere P in centimetri, si può ridurre in atmosfere, dividendo per 76:

Es. $H = 76$ cm, $h = 320$ cm; sarà:

$$P = \text{cm } (76 + 320) = \text{cm } 396 = \text{atm } (396 : 76) = \text{atm } 5{,}2.$$

[illegible] il mercurio è nelle due branche allo [illegible] *non si deve dire che in A non vi è pressione*, o vi è pressione zero, perchè la pressione è nulla solo nel vuoto assoluto. Si deve dire che in A vi è eguale pressione che all'esterno, cioè di 1 atmosfera. Se la differenza di livello *h* è di 76 *cm*, in A non vi è la pressione di 1 *atm*, ma vi è 1 *atm* al di sopra della pressione esterna, cioè effettivamente 2 *atm*; ecc.

Se la pressione in A è piccola, invece del mercurio si adopera l'acqua, che a parità di pressione si dispone ad altezza 13,59 volte che il mercurio.

Il manometro ad aria libera è sensibile (si può facilmente leggere il dislivello del mercurio fino a 0,1 *mm*, che corrisponde ad $^{1}/_{7600}$ di *atm*) ed è esatto; inoltre sensibilità ed esattezza si mantengono costanti, qualunque sia la pressione in *A*. Ma per pressioni grandi si esige un tubo assai alto; così, p. es., per misurare la pressione di 100 *atm*, occorre un tubo di *m* 76 d'altezza. L'apparecchio è perciò assai incomodo, e non adattabile all'industria; esso si adopera quasi esclusivamente nella Scienza, ove non si bada alla comodità, ma all'esattezza della misura.

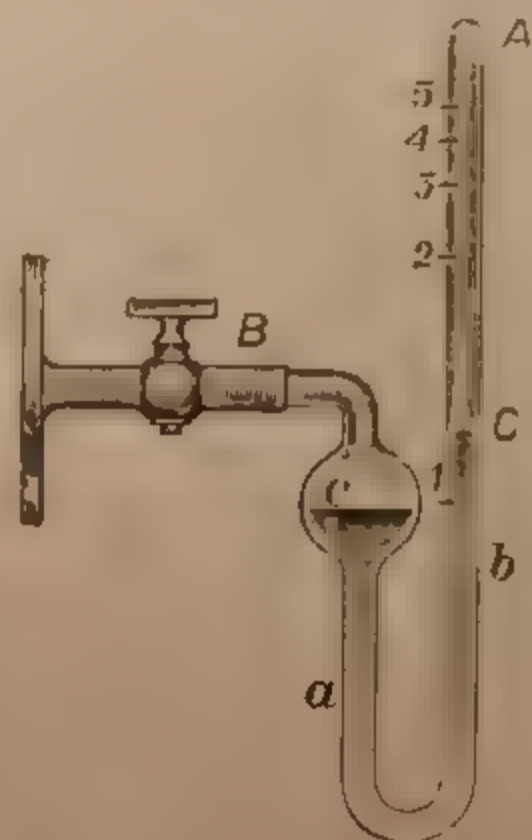



Fig. 316.

235. **Manometro ad aria compressa.** — È della stessa forma del precedente; ma il tubo più lungo è chiuso alla sua estremità *A* (Fig. 316), e contiene un gas, (azoto, o meglio idrogeno; si evita l'aria che, contenendo ossigeno, ossiderebbe alla lunga il mercurio). Sia il mercurio allo stesso livello nelle due branche; il gas contenuto in *AC* è allora alla pressione esterna, cioè di 1 *atm*. Posto il manometro in comunicazione col recipiente di cui si cerca la pressione, se il mercurio sale sino a metà del tratto *1–A*, cioè sino alla divisione 2, per la legge di Boyle essendosi il volume del gas ridotto a metà, la pressione sarà di 2 *atm*; se il mercurio sale sino ad $^{1}/_{3}$ di *1–A*, cioè sino alla divisione 3, la pressione sarà di 3 *atm*, ecc.

Come si vede dalla figura, i tratti compresi fra divisioni successive, vanno impiccolendo; cioè la sensibilità e l'esattezza diminuiscono col crescere della pressione. Perciò l'apparecchio serve poco per misure scientifiche; mentre, per la sua fragilità, non conviene neanche per l'industria.

236. **Manometri metallici.** — Sono adoperati nell'industria, perchè comodi e non fragili; ma non sono sensibili ed esatti come quelli a mercurio.

Il più adoperato è il **manometro Bourdon**; è formato da un tubo di metallo *ABC*, a sezione schiacciata, piegato ad anello, chiuso all'estremità *C*; per l'altra estremità *A* è

Fig. 317.

sostenuto dentro una scatola e comunica, [illegible] D, col fluido di cui si vuole misurare la pressione (Fig. 31[illegible]). Questo, agendo nell'interno del tubo con forza maggiore sulla parete più lontana dal centro dell'anello (perchè di superficie maggiore), tende a raddrizzarlo. Ci convinciamo meglio di questo fatto, pensando a quei giocattoli, formati da un tubo schiacciato di carta, avvolto a spirale, soffiando dentro il tubo esso si raddrizza. La estremità libera C si allontana di un piccolo tratto; il movimento è trasmesso ad un indice I ruotante intorno ad un asse O, che indica su una graduazione il valore della pressione. La graduazione è fatta per confronto col manometro a mercurio.

237. **Vacuometri.** — Per la misura delle pressioni minori dell'atmosfera, si adoperano i **vacuometri**: anch'essi possono essere *a mercurio* e *metallici*. Accennammo al § 231 che il manometro ad aria libera può servire per la misura di pressioni minori di un'atmosfera. Nel § 246 descriveremo il vacuometro applicato alla macchina pneumatica. Un vacuometro metallico è formato come il manometro Bourdon della Fig. 317, ed è graduato da 0° a 76 *cm* di mercurio.

238. Problemi sulla compressibilità dei gas.

a) Problemi risoluti.

1. *Un tubo cilindrico di* m *1 di lunghezza, chiuso in alto, aperto in basso, è pieno d'aria alla pressione di 76* cm *di mercurio; s'immerge verticalmente nell'acqua, finchè questa sale nel tubo di* cm 5. *Di quanto esso s'immerge?*

Risoluzione. — Nella $VH = V'H'$, faremo:

$$V = 100; \quad H = 1033; \quad V' = 95; \quad H' = 1033 + x; \qquad \text{e si avrà:}$$

$$100 \times 1033 = 95 \times (1033 + x); \qquad \text{dalla quale:} \qquad x = \text{cm}\ \frac{5165}{95} = \text{cm}\ 54{,}4.$$

2. *Un recipiente* A *di volume* v_1 *contiene aria alla pressione* h_1; *un altro recipiente* B *di volume* v_2, *contiene anch'esso aria alla pressione* h_2; *mettendo in comunicazione i due recipienti, senza perdita di gas, quant'è la pressione comune risultante?*

Risoluzione. — Sia x la pressione che avrebbe l'aria di A, se da sola occupasse il volume $v_1 + v_2$ dei due recipienti; per la legge di Boyle dev'essere:

$$v_1 h_1 = (v_1 + v_2)x, \qquad \text{da cui:} \qquad x = \frac{v_1 h_1}{v_1 + v_2}.$$

Parimenti, sia y la pressione che avrebbe l'aria di B, se da sola occupasse il volume $v_1 + v_2$; dev'essere:

$$v_2 h_2 = (v_1 + v_2)y, \qquad \text{da cui:} \qquad y = \frac{v_2 h_2}{v_1 + v_2}.$$

Per la legge di Dalton (§ 231), la pressione richiesta sarà:

$$H = x + y = \frac{v_1 h_1 + v_2 h_2}{v_1 + v_2}.$$

Si può [illegible] nel seguente modo: l'aria contenuta in A, alla pressione di 1 *atm*, occuperebbe il volume (per la legge di Boyle):

$V_1 = v_1 h_1$; parimenti l'aria di B, ad 1 *atm* occuperebbe il volume:

$V_2 = v_2 h_2$. Ora, abbiamo un volume $V_1 + V_2$ d'aria ad 1 *atm*, che deve occupare il volume $v_1 + v_2$; la sua pressione H sempre per la legge di Boyle, sarà tale che:

$$V_1 + V_2 = (v_1 + v_2) H; \quad \text{da cui:} \quad H = \frac{V_1 + V_2}{v_1 + v_2};$$

sostituendo a V_1 e V_2 i valori trovati, si otterrà:

$$H = \frac{v_1 h_1 + v_2 h_2}{v_1 + v_2}; \quad \text{come s'era già trovato prima.}$$

3. *Quanto pesa a 0° l'ossigeno contenuto in una bombola di acciaio, della capacità di litri 50, compresso a 125* atm?

Risoluzione. — Il volume di quell'ossigeno, ridotto alla pressione normale, è:

$$V = l\,(50 \times 125) = l\,6250.$$

Il peso di 1 litro di ossigeno nelle condizioni normali è g 1,430 (§ 219); quindi il peso P di V litri è:

$$P = l\,(6250 \times 1{,}430) = \mathbf{g\ 8937{,}5}.$$

b) Problemi da risolvere. (I gas si suppongono alla temperatura di 0° C).

1. Dell'aria è racchiusa in un recipiente alla pressione di 5 *atm* ed occupa il volume di litri 3. Calcolare il volume da essa occupato alla pressione di 8 *atm*.

2. Quanti grammi di anidride carbonica occorrono per riempire un recipiente della capacità di *l.* 15, alla pressione di 12 *atm*?

3. A che pressione si deve comprimere dell'aria, perch'essa si racchiuda in un recipiente della capacità di dm^3 80, se alla pressione di 25 *atm* essa è contenuta in un recipiente della capacità di dm^3 35?

4. Un recipiente A di volume v_1 contiene aria alla pressione h_1; un altro recipiente B di volume v_2 contiene anch'esso aria alla pressione h_2. Quale pressione si ottiene in A se tutta l'aria di B si comprime dentro di esso insieme a quella che vi si trova già, senza perdite e senza variazioni di temperatura?

5. In un manometro ad aria compressa si vuole che il mercurio da 15 a 16 *atm* si innalzi di *mm* 10. Che lunghezza deve avere la parte utile del tubo (cioè quella contenente il gas a pressione normale)?

6. Un recipiente di volume v_1, contenente aria alla pressione h_1, è messo in comunicazione con un altro recipiente contenente anch'esso aria, alla pressione h_2. Quale dev'essere il volume del 2° recipiente, perchè dopo la mescolanza la pressione risultante sia 1?

7. In un recipiente della capacità di *l* 12, munito di rubinetto, si comprimono *l* 30 d'aria alla pressione iniziale di 1,2 *atm*, e *l* 7 di anidride carbonica alla pressione iniziale di 3,5 *atm*. Si apre indi il rubinetto e si lascia uscire una quantità di miscela, che occupa il volume di *l* 25 alla pressione di 1,5 *atm*; dopo di che si chiude il rubinetto. Calcolare:

a) La pressione della miscela prima di aprire il rubinetto.
b) La pressione del gas che rimane dopo l'apertura del rubinetto.
c) Il peso di ciascuno dei gas in quest'ultima miscela.

Equilibrio di un corpo in un gas.

239. **Principio d'Archimede nei gas.** — Poichè i gas sono pesanti ed elastici, è applicabile anche ad essi il principio di Archimede.

Un corpo immerso in un gas, riceve una spinta verticale dal basso all'alto, eguale al peso del gas spostato.

La dimostrazione sperimentale si fa, qualitativamente, col baroscopio. È questo una piccola bilancia (Fig. 318), che invece dei piattelli porta due sfere *a* e *b* di volume assai diverso; ma che *nell'aria* si fanno equilibrio. Perchè ciò avvenga, o si fanno le due sfere di sostanza diversa (ad es., *a* di sughero e *b* di metallo); o si fa *b* massiccia e *a* di lamiera, ma ben chiusa.

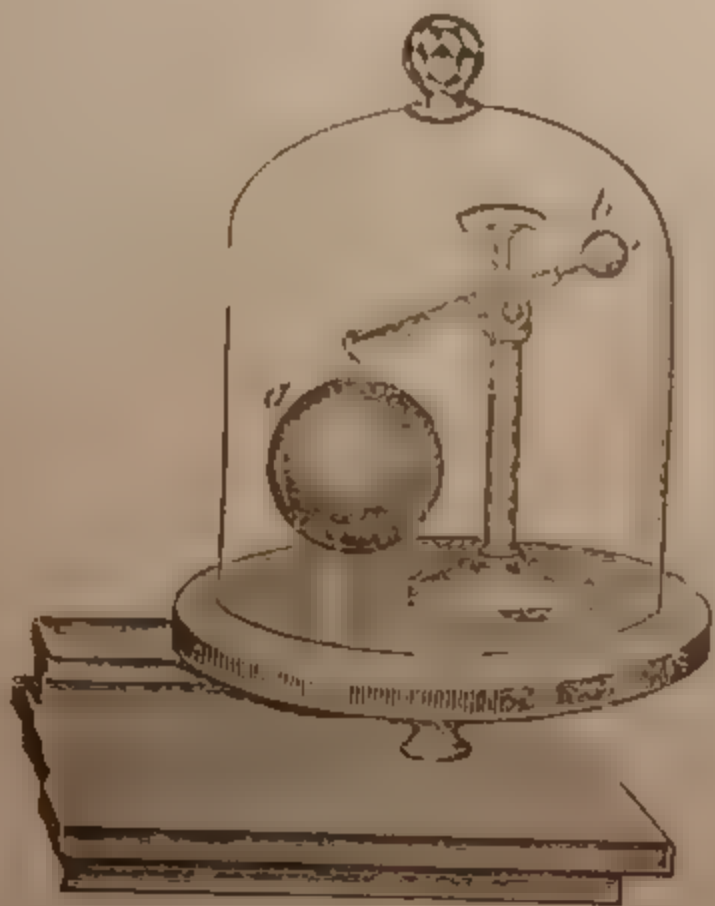



Fig. 318.

Ponendo l'apparecchio sotto la campana della macchina pneumatica, e facendo il vuoto, l'equilibrio è rotto: la bilancia trabocca dalla parte della sfera maggiore. Ciò perchè la sfera maggiore *nel vuoto* pesa un po' più della minore; nell'aria vi è equilibrio, perchè la sfera maggiore spostando più aria, riceve una spinta maggiore, che compensa il maggior peso.

Questo principio ci spiega perchè Aristotile non riuscì a provare che l'aria pesi (§ 219). Infatti gonfiando la vescica è vero che questa aumenta di peso; ma riceve dall'aria esterna una spinta eguale al peso dell'aria spostata, cioè eguale al peso dell'aria con cui si è gonfiata, ed apparentemente il peso della vescica non cambia.

240. **Correzioni delle pesate.** — Come conseguenza del principio d'Archimede abbiamo, che pesando un corpo nell'aria, ne otteniamo *il peso esatto* solo se il corpo pesato ha egual volume dei pesi graduati che gli fanno equilibrio. Se il volume non è eguale, si otterrà il peso diminuito od aumentato della differenza tra la spinta subìta dal corpo e la spinta dei pesi, a secondo che il corpo da pesare ha volume maggiore o minore di quello dei pesi.

Nelle misure di precisione occorre quindi fare **la correzione delle pesate**; per la quale occorre conoscere il volume del corpo, o sapere di che sostanza è fatto:

Es. *Pesando un blocchetto di marmo, con pesi di ottone, si ha l'equilibrio con g 2150. Qual'è il peso esatto del corpo?*

Dati: densità: del marmo = 2,7; dell'ottone = 8,3; peso di 1 litro (= 1 dm^3) di aria = g 1,293. Quindi:

$$\text{Volume del marmo:}\quad V = \frac{\text{Peso}}{\text{densità}} = dm^3\ \frac{2{,}150}{2{,}7} = dm^3\ 0{,}796$$

$$\text{» dei pesi}\quad V' = dm^3\ \frac{2{,}150}{8{,}3} = dm^3\ 0{,}259.$$

Differenza tra le due spinte = g 1,293 × (0,796 − 0,259) = g 0,694.
Il peso esatto di quel marmo è: g (2150 + 0,694) = g 2150,694.

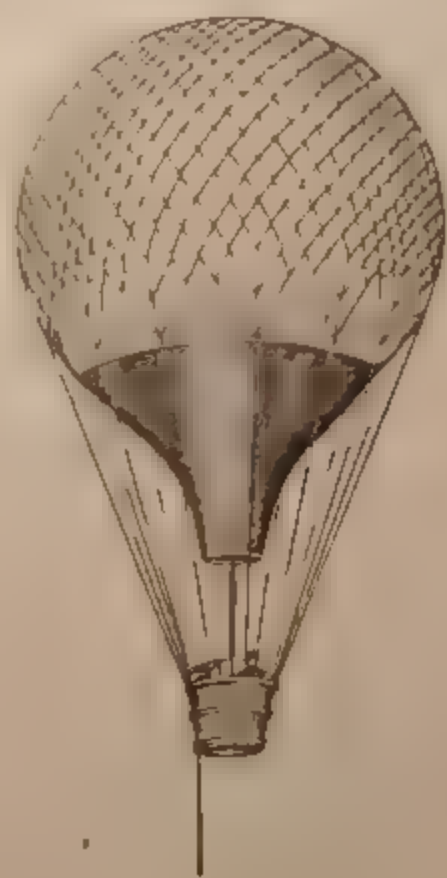
211. Aerostato. — Un'altra conseguenza, come nei liquidi, è che se il peso del corpo è minore della spinta ricevuta dall'aria, il corpo si solleva.

Furono per i primi i fratelli Montgolfier, a Lione, che nel 1783 riuscirono a far sollevare un corpo solido nell'aria. Essi costruirono un involucro, dapprima di carta, più tardi di tela gommata, di forma sferica (Fig. 319) con una larga apertura in basso, sotto la quale accesero della paglia. L'aria calda formatasi con la combustione, entrava nell'involucro e lo gonfiava. Ad un certo momento, lasciato libero, il pallone s'innalzava; perchè essendo l'aria calda, dilatata dal calore, più leggera di quella fredda circostante, il peso totale dell'involucro e dell'aria calda contenuta, era *minore* dell'aria fredda spostata. Questi primi palloni furono chiamati **mongolfiere**; se ne fecero così grandi da poter trasportare delle persone.

Fig. 319.

Pochi anni dopo Charles pensò di sostituire all'aria calda l'idrogeno, gas molto più leggero senza bisogno di essere scaldato. Nacque così l'**aerostato**. È questo un globo di seta o di cotone, resi impermeabili con gomma, riempito di idrogeno o di gas illuminante. Ad esso, per mezzo di una reticella e di corde, è appesa *la navicella N* (Fig. 320), solitamente di vimini, nella quale stanno *gli aeronauti*. Alla partenza il peso totale P del pallone (involucro, gas, navicella, aeronauti, ecc.) è minore del peso S dell'aria spostata; quindi l'aerostato s'innalza. La differenza $S - P$ si chiama la **forza ascensionale** del pallone. Essa non è costante; perchè il peso S dell'aria spostata diminuisce man mano che il pallone sale ed incontra aria sempre più rarefatta, cioè sempre più leggera. Il pallone quindi sale fino a trovare una zona di equilibrio in cui $P = S$.

Fig. 320.

Per mantenersi in aria, o per salire più in alto, l'aeronauta deve buttar via della *zavorra*; cioè sabbia contenuta in appositi sacchetti, in modo che il pallone si alleggerisca alquanto. Per discendere invece, tirando una corda, si apre una valvola posta alla sommità del pallone, in modo che esca alquanto gas. Il pallone si affloscia, e diminuendo così la spinta, esso scende. In caso di pericolo l'aeronauta può abbandonare l'aerostato, affidandosi al *paracadute* (§ 138).

Gli aerostati possono salire a grande altezza. Le massime altezze raggiunte da palloni montati, cioè trasportanti persone, è stata di *m* 11000

da Coxwell e Glaisher nel 1862; e nell'agosto 193[illegible] belga Piccard raggiungeva i 17 670 *m*, rinchiudendosi in una navicella sferica di alluminio (Fig. 321), nella quale con una pompa si manteneva l'aria a pressione pressochè normale e sufficientemente ossigenata da permettere la respirazione. Nel settembre 1933 l'aerostato russo U.R.R.S., montato da Prokopiev, ha raggiunto i *m* 19 000 d'altezza; e nel novembre 1935 gli americani Stevens e Anderson si sono innalzati a *m* 22 640! **Ma palloni sonda**, cioè piccoli palloni di gomma, che si lanciano frequentemente a scopo di studio, e trasportano solo apparecchi registratori della temperatura, della pressione atmosferica e dell'umidità alle varie altezze (Fig. 322), hanno raggiunto l'altezza di 44 *km!* (Vigna di Valle, 1934); essi oggi portano anche apparecchi radiotrasmettenti, per le indicazioni...

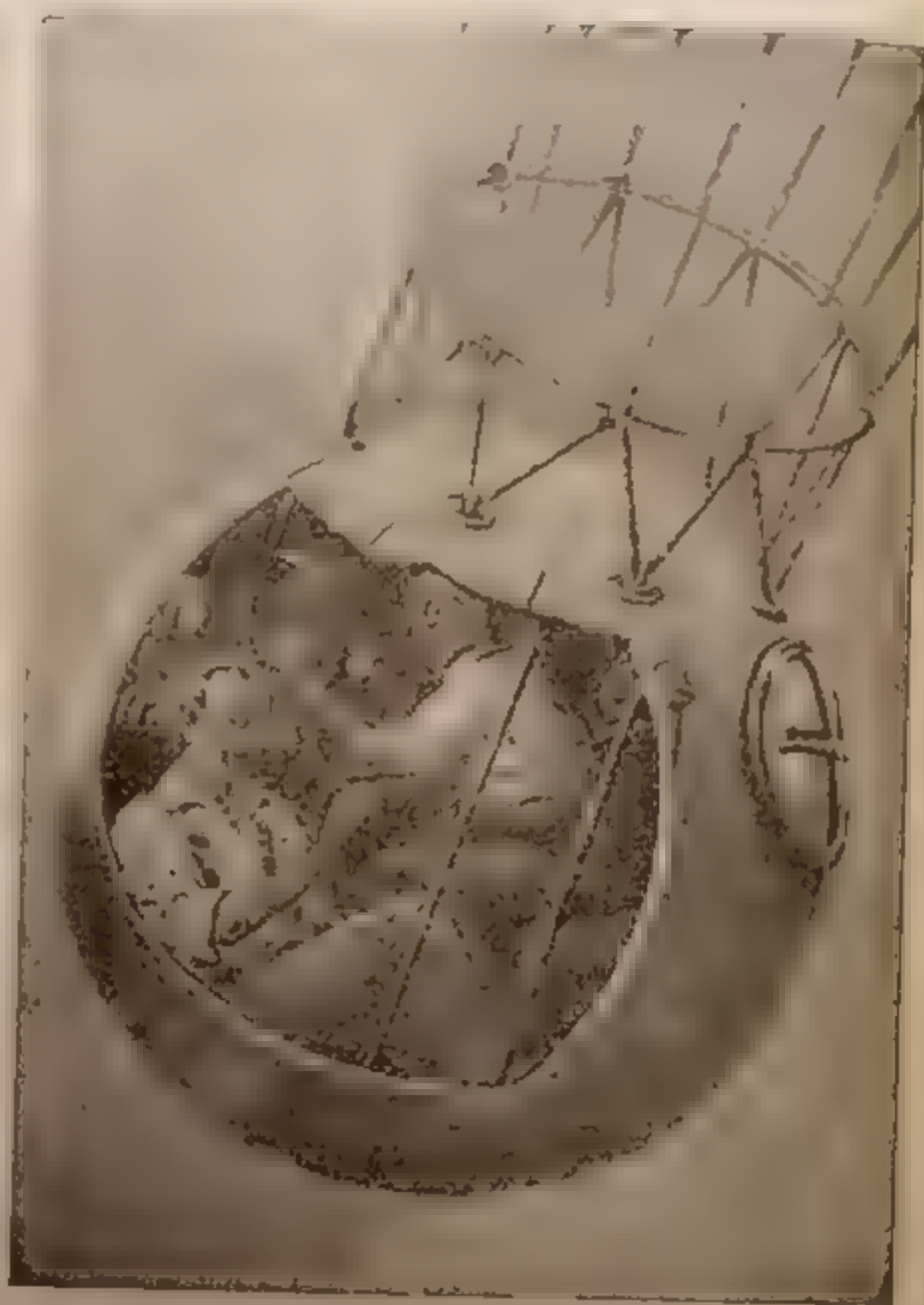



Fig. 321.

242. Dirigibile. — L'aerostato va dove lo porta il vento. Per dirigerlo, occorre munirlo di un mezzo propulsore,

Fig. 322.

e cioè di *un'elica* (§ 261), mossa da un motore potente e leggero, che gli imprima una velocità superiore a quella dell'aria (cioè del vento) in cui si muove

I numerosi tentativi fatti nel secolo scorso fallirono, per mancanza di un motore sufficientemente leggero. Si è risolto il problema, allorchè si costruirono i motori a scoppio, a benzina (Vol. 2°, § 108), che possono ridursi al peso di qualche chilogrammo appena per cavallo (§ 150) di potenza.

Fig. 323.

Un dirigibile ha forma allungata, perchè incontri meno resistenza nell'aria: e per ciò la sua forma deve avvicinarsi più che sia possibile a quella di minima resistenza, già studiata (§ 137). Esso deve mantenere inalterata la sua forma durante il moto, poichè ripiegature e insenature formantisi alla sua superficie, nuocerebbero alla stabilità della sua rotta. La perma-

Fig. 324.

nenza della forma si ottiene: o per mezzo di leggere intelaiature interne, formanti come lo scheletro di tutto l'apparecchio (**sistema rigido**); o tenendolo sempre ben gonfio, per mezzo di un *palloncino compensatore* interno, che si riempie più o meno d'aria, secondo il bisogno, per mezzo di un ventilatore, (**sistema semirigido e floscio**). Occorre anche munire il dirigibile di *timoni di direzione e di profondità*; questi ultimi per farlo salire o scendere, senza spreco di zavorra o d'idrogeno. Vi sono anche dei piani di stabilizzazione, o *impennature*, per attutire i movimenti di rullio o di beccheggio; e molti altri accessori che qui non possiamo descrivere. La Fig. 323 mostra

il nostro dirigibile italiano, che per [illegible] uno dei migliori fin'ora costruiti. I più grandi dirigibili sono quei rigidi di Zeppelin, tedeschi (Fig. 321), che si sono fatti [illegible] di [illegible] e m 24, il diametro maggiore di m [illegible] e la cubatura di m^3 20000, [illegible] motori da 1200 [illegible] ciascuno, e che possono raggiungere [illegible] 110 [illegible].

I dirigibili hanno il pregio di poter restare fermi nell'aria, o di salire e scendere verticalmente. Hanno però gravi difetti: sono [illegible], possono rimanere molto tempo nell'aria per le perdite d'idrogeno attraverso l'involucro (§ 274), e non possono raggiungere velocità troppo grandi. Non ultimo difetto è l'infiammabilità dell'idrogeno: la storia dell'Aeronautica registra numerose catastrofi dovute all'incendio del pallone, o per una scarica elettrica atmosferica, o per altre cause. Oggi si tende a sostituire all'idrogeno l'*elio*: gas un po' meno leggero dell'idrogeno, ma che ha il grande vantaggio di essere incombustibile. Però il suo costo è ancora troppo elevato.

Malgrado gli inconvenienti, i dirigibili tuttavia rendono preziosi servigi nelle esplorazioni geografiche. Un nostro dirigibile ha per due volte raggiunto il polo Nord; l'ultima volta nella spedizione del Nobile. Quest'ultima fu patrocinata e finanziata dal Governo Fascista, che non tralascia alcuna occasione perchè la virtù degli italiani si affermi e si imponga nei più forti cimenti e nelle più nobili gare della tecnica e dello sport.

I *Graf-Zeppelin* poi, oltre ad aver raggiunto il polo Nord, hanno valicato ripetutamente l'Oceano in viaggi commerciali tra l'Europa e l'America.

243. Problemi sul principio d'Archimede nei gas.

a) Problemi risoluti.

1. *Determinare il peso esatto di un corpo, sapendo che nell'aria è equilibrato da un peso* p.

Risoluzione. — Nelle pesiere di precisione, i numeri scritti sui pesi indicano il loro peso vero (nel vuoto). Quindi il peso p nell'aria farà sul piattello della bilancia, una pressione uguale a $p - s$, indicando con s il peso dell'aria da esso spostata.

Parimenti, se x è il peso esatto del corpo, la sua pressione sul piattello sarà: $x - s'$, indicando con s' il peso dell'aria da esso spostata. Essendovi l'equilibrio, dev'essere:

1) $p - s = x - s'$. Ora, se d_1 è il peso spec. della sostanza di cui sono fatti i pesi della pesiera, il volume del peso p (grammi) è:

$v_1 = cm^3 \frac{p}{d_1}$; chiamando d il peso di 1 cm^3 d'aria, nelle condizioni in cui si fa la pesata, il peso s dell'aria spostata è:

$s = v_1 d = \frac{p}{d_1} d.$ Parimenti è:

$v_2 = cm^3 \frac{x}{d_2}$ il volume del corpo, di densità d_2, e:

$s' = v_2 d = \frac{x}{d_2} d$ il peso dell'aria spostata dal corpo.

Sostituendo allora nella 1) si ottiene:

$p - \frac{pd}{d_1} = x - \frac{xd}{d_2}$; equazione di 1° grado in x che dà:

$$x = \frac{d_2(d_1 - d)}{d_1(d_2 - d)} p .$$

2. Qual è la forza ascensionale e a che altezza arriva un pallone ad idrogeno, della cubatura di 2000 m³, se il peso totale delle parti solide è di kg 1500?

Risoluzione. Peso di 2000 m^3 di idrogeno $= kg\,(0{,}089 \times 2000) = kg\ 178$
» totale del pallone $= kg\,(1500 + 178) = kg\ 1678$
» dell'aria spostata a terra $= kg\,(1{,}293 \times 2000) = kg\ 2586$
Forza ascensionale alla partenza $= kg\,(2586 - 1678) = kg\ 908.$

L'altezza raggiunta sarà quella in cui m^3 2000 di aria pesano kg 1678; cioè in cui la densità e in conseguenza la pressione saranno $\frac{1678}{2586} = 0{,}649$ di quella a terra; quindi la pressione a tale altezza sarà:

$$p = \text{mm}\,(760 \times 0{,}649) = 493\ \text{mm}.$$

a cui, nella Tabella del § 227, corrisponde l'altitudine di circa m 3500.

b) Problemi da risolvere.

1. Si pesa un pezzo di alluminio nell'aria; per raggiungere l'equilibrio si devono mettere sull'altro piatto della bilancia g 560, ottenuti con pesi di ottone; qual'è il peso esatto dell'alluminio?

2. Un aerostato di forma sferica è pieno d'idrogeno. Calcolare quale dev'essere il suo diametro, perchè s'innalzi a 16000 m di altezza, supponendo che il peso della navicella, aeronauti e accessori, sia di kg 800, e che la stoffa di cui è fatto l'involucro, pesi g 160 per m^2.

3. Un palloncino di gomma, gonfiato d'idrogeno, ha il diametro di cm 25; l'involucro pesa 20 g per m^2; solleva un filo che pesa 1,5 g per m; qual'è la lunghezza massima del filo che può sostenere?

Pompe per i gas e per i liquidi.

244. **Pompa di Gay-Lussac.** — *La pompa di Gay Lussac* [1] serve per aspirare o per comprimere i gas. È formata da un cilindro C di metallo (Fig. 325), entro il quale scorre uno stantuffo S *cieco* (cioè senza aperture), a tenuta. Nel fondo del cilindro vi sono due fori, che si possono chiudere con due *valvole* [2] Z e Z'; la prima si apre verso l'interno del cilindro, la seconda verso l'esterno.

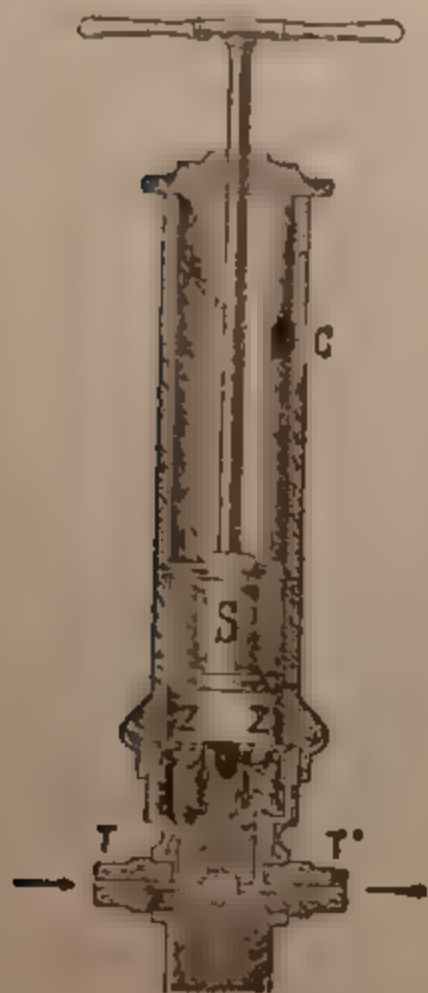



Fig. 325.

Se lo stantuffo S si solleva, sotto di esso si forma una rarefazione, si apre la valvola Z e viene aspirata aria, o altro gas, da T; se S si abbassa, il gas aspirato si comprime, la valvola Z si chiude, si apre invece Z' ed il gas viene scacciato per T'. E così di seguito. Se T comunica con un recipiente chiuso, in questo si fa il vuoto e l'aria in esso contenuta viene mandata per T' all'esterno; la pompa funziona come **macchina pneumatica**. Se il recipiente comunica invece con T', allora viene aspirata aria o altro gas da T e viene compresso per T' in tale recipiente: la pompa funziona da **compressore**.

Questa pompa è poco adoperata per fare il vuoto; servendo per questo meglio le macchine pneumatiche. Per comprimere si adopera in molti casi, e ne vedremo qualche applicazione in seguito. Il limite della compressione dipende specialmente dalla tenuta dello stantuffo e delle valvole, e dalla resistenza del cilindro. Si fanno compressori che arrivano fino a qualche centinaio di atmosfere, per la liquefazione dei gas, a 400 *atm* per l'idrogenazione degli idrocarburi (fabbricazione della benzina artificiale), e perfino a 1000 *atm* per la sintesi dell'ammoniaca. Le pressioni sviluppate dagli esplosivi nelle armi da fuoco, superano le 5000 *atm*, e a scopo sperimentale, con artifizi speciali, si sono raggiunte le 30 000 *atm*!

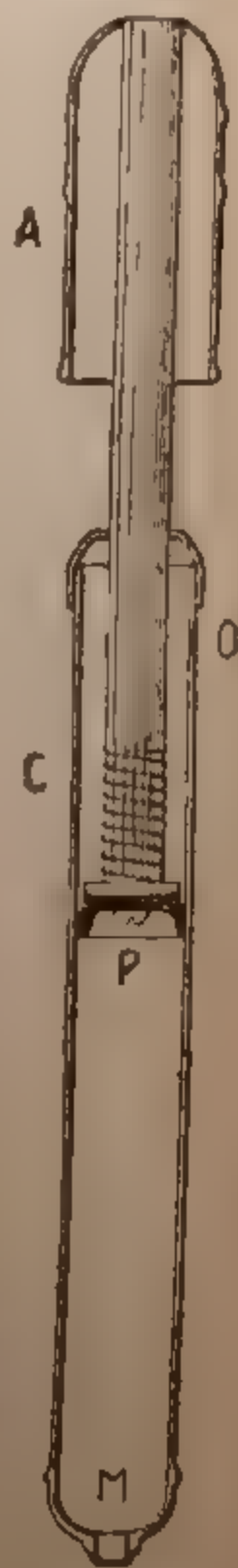



Fig. 326.

245. **Pompa per bicicletta.** — Per gonfiare i *pneumatici* delle biciclette, per i quali basta una pressione modesta di poche atmosfere, si fa uso di una pompa assai semplificata, senza valvole. Essa è rappresentata schematicamente nella Fig. 326.

Il cilindro è un semplice tubo di metallo o di ebanite C, che comunica col pneumatico per mezzo di un tubo di gomma, avvitato in M.

---

(1) Gay-Lussac Louis; n. a St. Léonard nel 1778, m. a Parigi nel 1850.
(2) Chiamasi *valvola* un tappo mobile, con cui si possa aprire o chiudere un orifizio.

Lo stantuffo P è formato da un pezzo di cuoio a forma di bicchiere. Quando lo stantuffo sale, per l'aspirazione prodotta l'aria esterna entra dal foro O e s'infiltra tra il cilindro e il cuoio: questo si aggrinza alquanto e permette l'entrata dell'aria nella pompa. Se ciò non bastasse, l'aria entra direttamente da O sotto lo stantuffo, allorchè questo si solleva al di sopra di O; così è abolita la valvola di aspirazione. Quando lo stantuffo scende, l'aria aspirata si comprime sotto di esso, e ne preme il cuoio contro il cilindro, assicurando così la tenuta; l'aria compressa apre una valvola di ritenuta che è attaccata ad ogni pneumatico, e viene spinta in questo. La pompa cioè non ha valvola di compressione, nel senso che questa è unita al pneumatico.

246. **Macchina pneumatica.** — Quando si vuole solamente fare il vuoto in un recipiente chiuso, si ricorre di preferenza alla *macchina pneumatica* di Otto di Guericke. Essa è rappresentata, schematicamente, nella Fig. 327. È formata di un cilindro C, solitamente di vetro, dentro cui scorre uno stantuffo a tenuta; questo ha un'apertura, chiusa da una valvola S, che si apre verso l'esterno. Nel fondo del cilindro vi è un'altra apertura, chiusa da una valvola S' che si apre verso l'interno del cilindro. Questa seconda apertura comunica, per mezzo di un tubo P, con il centro di un disco T di vetro o di metallo, chiamato il **piatto** della macchina pneumatica, sul quale si appoggia la campana E in cui si vuole fare il vuoto. Se anzichè una campana si vuole vuotare un pallone, questo si avvita con un raccordo al centro O del piatto.

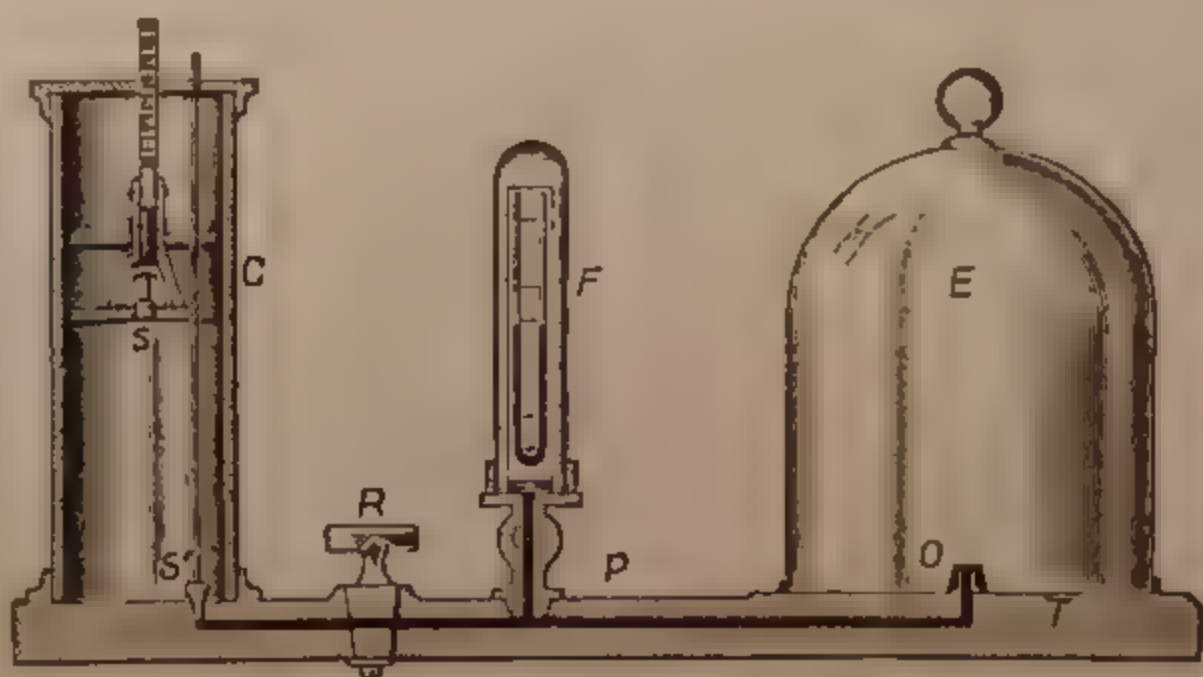



Fig. 327.

Se si innalza lo stantuffo, nel cilindro si fa il vuoto; la valvola S' si apre, spinta dalla pressione dell'aria contenuta in E, e parte di quest'aria entra in C. Abbassando lo stantuffo la valvola S' si chiude, l'aria aspirata si comprime, e sollevando la valvola S sfugge all'esterno. Si ripete l'operazione più volte.

La rarefazione ottenuta si misura col **provino** F, formato da un cannello di vetro ripiegato ad U, di cui una branca è chiusa e l'altra aperta. Inizialmente la branca chiusa è tutta piena di mercurio, il quale arriva al basso dell'altra branca. Il cannello è contenuto in una campanella di vetro, messa in comunicazione col tubo P, e quindi con la campana E. Quando in questa si è raggiunta una certa rarefazione, il mercurio si abbassa nella branca chiusa, e si disporrebbe allo stesso livello nei due rami, se si potesse fare il vuoto perfetto. Essendo ciò impossibile, il mercurio ha sempre un certo dislivello nei rami; *tale dislivello misura la rarefazione raggiunta*. Così si dirà che si è fatto il vuoto di 15 *mm* se tale è il dislivello del mercurio nei due

rami del provino; se si vuole esprimere tale pressione [illegible] sarà di $^{15}/_{760}$ di *atm*, ossia di 0,02 di *atm*.

Con questa pompa non si supera una rarefazione di 10 o 15 *mm*. Si oppongono ad ottenere un vuoto più spinto, i così detti *spazi nocivi*; si chiamano così gli interstizi che rimangono fra la base del cilindro e la faccia interiore dello stantuffo, che non essendo perfettamente piane, non combaciano in tutti i punti. In questi interstizi, quando lo stantuffo scende, rimane

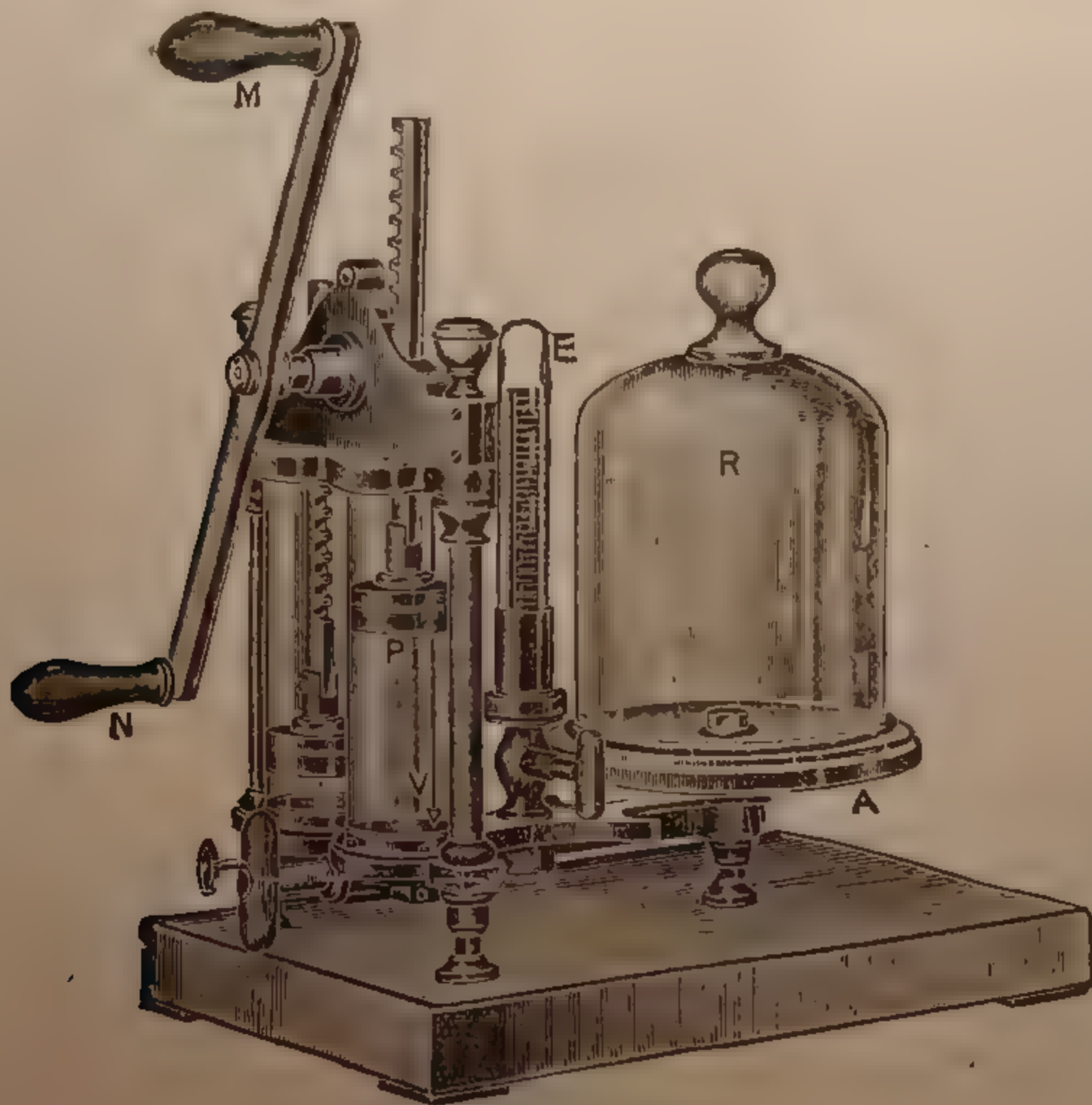



Fig. 328.

aria ad una pressione almeno eguale a quella esterna; quando si risolleva lo stantuffo quest'aria si espande nel cilindro ed impedisce il formarsi del vuoto perfetto. Oltre a ciò vi sono l'umidità ed il grasso, con cui si spalma lo stantuffo perchè faccia tenuta, i quali producono vapori dentro il cilindro.

Si riduce l'inconveniente degli spazi nocivi adoperando una pompa a due cilindri, con un rubinetto posto fra questi, detto di *Babinet*, il quale permette a un dato momento di porre in comunicazione solo uno dei cilindri col recipiente da vuotare; mentre l'altro cilindro comunica col fondo del primo. I due stantuffi si muovono in modo che l'uno sale quando l'altro scende; con ciò con uno stantuffo si fa il vuoto nel recipiente, mentre con l'altro si aspira l'aria degli spazi nocivi del primo cilindro.

Con una pompa cosifatta, si può arrivare alla rarefazione di circa 5 *mm* di mercurio. Questa pompa ha anche questo vantaggio: in una pompa a

un cilindro, dopo che si è raggiunta la massima rarefazione, per sollevare lo stantuffo bisogna vincere la pressione atmosferica esterna che grava su di esso; la quale, per uno stantuffo di 10 *cm* di diametro è di:

$$kg\,(1{,}033 \times 5^2 \times 3{,}14) = kg\ 80 \text{ circa.}$$

Ciò richiede uno sforzo rilevante per la manovra della pompa. In una macchina a due cilindri, i due stantuffi sono collegati tra loro con una disposizione meccanica conveniente, in modo che la pressione atmosferica agente sullo stantuffo discendente serva a compensare lo sforzo che esige l'altro per sollevarsi; così, per muovere la macchina occorre solamente vincere gli attriti.

Infine, la valvola inferiore S' viene sostenuta da una bacchetta di acciaio, che passa a sfregamento dolce attraverso lo stantuffo. Con ciò, appena lo stantuffo si alza, trascina l'asticella e solleva automaticamente, di uno o due millimetri, la valvola; mentre, quando nella campana vi è una buona rarefazione, la poca aria rimasta non avrebbe più la pressione necessaria per spingere su la valvola.

La Fig. 328 mostra in prospettiva una di queste macchine a due cilindri. Gli stantuffi sono sostenuti da aste dentate, nelle quali ingrana un rocchetto, che riceve un moto rotativo alternativamente nei due sensi, per mezzo di una manovella *M N*.

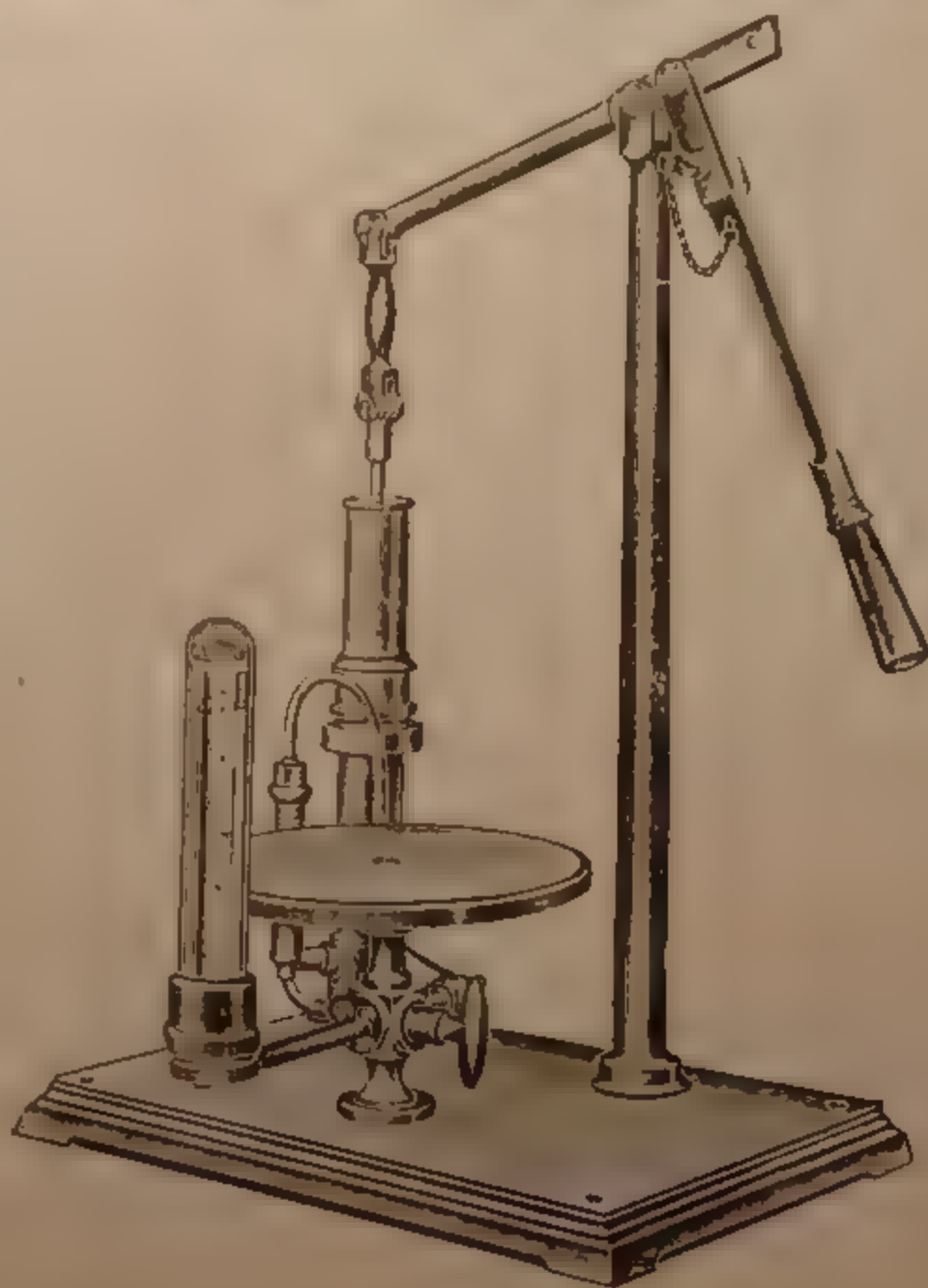



Fig. 329.

Si evitano quasi completamente gli spazi nocivi, con le **pompe ad olio**, (Fig. 329); nelle quali lo stantuffo è sostituito da uno strato di olio minerale speciale, che non produce vapori sensibili; esso sollevandosi si adatta contro il fondo del cilindro, che ora è nella parte superiore, non lasciando interstizi. Con questa pompa si raggiunge una rarefazione che può spingersi a una frazione di millimetro, cioè a 0,001 di *atm*.

247. Pompe a mercurio. — Quando si voglia una rarefazione ancora maggiore, si ricorre alle **pompe a mercurio.** Di queste una assai comune è quella di Geissler, detta anche **pompa a vuoto barometrico.**

Essa è formata di un pallone di vetro fisso C (Fig. 330), che può comunicare o con l'esterno, per mezzo di un rubinetto A, o col recipiente M da vuotare, per mezzo di un rubinetto B. Inferiormente comunica, per mezzo di un robusto tubo di gomma, con un altro pallone V aperto, pieno di mercurio, che può alzarsi e abbassarsi. Si chiuda B, si apra A e si sollevi V al

di sopra di C; quest'ultimo pallone si riempie di [illegible] con-teneva sfugge per A all'esterno. Ciò ottenuto, si [illegible] V almeno 76 *cm* sotto di C; allora il [illegible] da C, [illegible] forma il vuoto barometrico, come nell'esperienza di Torricelli [illegible] si apre B, parte dell'aria di M viene aspirata in tale vuoto. Si richiude B, si alza V come prima, e si riapre A; l'aria aspirata in C viene scacciata all'esterno; e così via si ripete l'operazione molte volte.

Questa pompa è lenta; ma può fare una rarefazione di $^1/_{20}$ di *mm*; e le più recenti, senza rubinetti, arrivano anche al millesimo di *mm*, cioè a un milionesimo di *atm*.

Si costruiscono anche **pompe a caduta di mercurio** o di Sprengel, e **pompe a rotazione** o di Gaede, che non descriviamo; esse permettono di raggiungere le più alte rarefazioni, e quella di Gaede può essere manovrata da un motore e quindi è adoperata nell'industria, (Fig. 331). Vi è anche una **pompa a vapori di mercurio**, con la quale si raggiunge la rarefazione di 10^{-12} *mm* di mercurio!

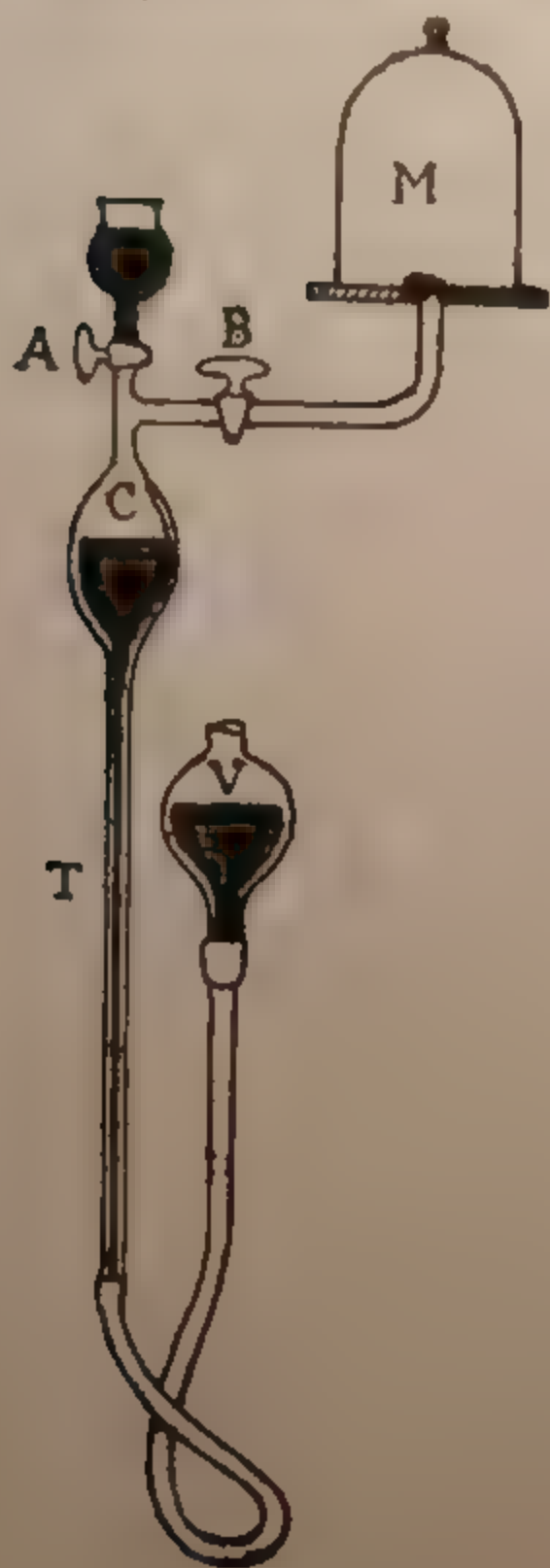
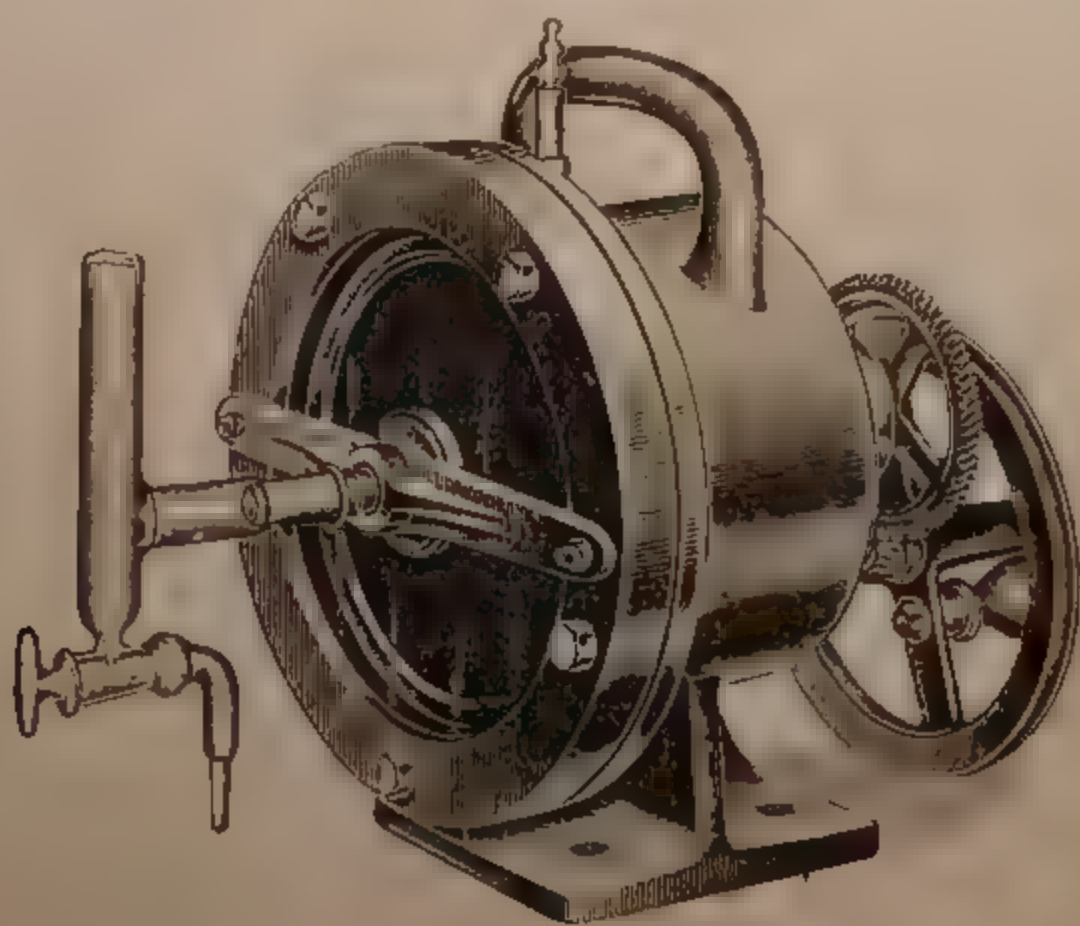



Fig. 330.

Fig. 331.

248. **Applicazioni dei compressori e delle macchine pneumatiche.** — Le applicazioni sono assai numerose; qui citiamo le più comuni. I compressori sono adoperati:

1. Per comprimere l'idrogeno, l'ossigeno, ed altri gas, entro bombole di acciaio, per facilitarne il trasporto.

2. Per la liquefazione dei gas: aria, anidride carbonica, ammoniaca, ecc., e quindi indirettamente, per la produzione del freddo; e per la fabbricazione di sostanze chimiche, (§ 244).

3. L'aria compressa è adoperata negli stabilimenti per manovrare alcune macchine utensili, come martelli pneumatici, magli, ecc.; è pure impiegata per mettere in moto le perforatrici, nella costruzione dei tunnel.

4. I siluri sono lanciati e si muovono nell'acqua, in virtù dell'aria compressa che contengono; in modo analogo si lanciano gli aeroplani sulle navi portaerei, allorchè non vi è spazio sufficiente per acquistare la velocità necessaria a sollevarsi, (§ 255).

5. I freni pneumatici dei tram e dei treni, sono manovrati con l'aria compressa.

6. L'aria compressa è adoperata per i lavori sott'acqua, sia nelle **campane idrauliche**, sia nei **palombari**. Il palombaro indossa lo **scafandro**, che

Fig. 332.

Fig. 333.

è un casco a tenuta, chiuso al davanti da lastre di cristallo, che permettono di vedere (Fig. 332). Esso è in comunicazione con una scatola di metallo posta sul dorso, nella quale si invia da un bastimento sul mare aria compressa per mezzo di un tubo di gomma. Aperture opportunamente disposte, permettono l'uscita dell'aria respirata.

Per grandi profondità occorrono scafandri resistenti alla grande pressione dell'acqua; la Fig. 333 mostra uno degli scafandri adoperati dai nostri bravi palombari, i migliori del mondo, per ricuperare il tesoro dell'*Egypt*; questa nave inglese affondata al largo di Brest, con un carico di circa cento milioni di lire, tra monete, oro ed argento in barre, e molti milioni di carta moneta indiana, giace a 120 *m* di profondità.

7. In alcune città, stabilimenti, banche, ecc., l'aria compressa è utilizzata per la trasmissione di dispacci o altre carte (**posta pneumatica**). Le carte sono poste in astucci, e questi sono introdotti in appositi tubi, ove

sono spinti velocemente dall'aria compr[illegible] ore iniettа nei tubi da una parte dell'astuccio.

Le macchine pneumatiche sono adoperate ad esempio:

1. Per evaporare e concentrare, senza bisogno di riscaldamento, liquidi, sciroppi, conserve, ecc., (**concentrazione nel vuoto**), (Vol. 2° [illegible]), allorchè il calore potrebbe alterare queste sostanze.

2. Per fare il vuoto nelle lampade elettriche ad incandescenza e nei tubi luminosi per scariche elettriche nei gas rarefatti.

3. Per la spolveratura con aspiratori speciali, mossi elettricamente, che assorbono la polvere e la accumulano in apposite sacche, senza spanderla nell'ambiente, (Fig. 334).

Fig. 334.

219. Le **pompe idrauliche** o **trombe**, sono apparecchi impiegati per sollevare l'acqua. Si chiama **prevalenza** l'altezza a cui si solleva l'acqua; si chiama **portata** la quantità d'acqua sollevata per unità di tempo (litri per secondo o metri cubi per ora).

Le pompe per l'acqua si dividono in tre categorie:

250. **Pompa aspirante.** — Serve per sollevare acqua da un'altezza inferiore all'altezza della pompa.

Essa è formata da un cilindro C (Fig. 335), dentro cui scorre uno stantuffo a tenuta; questo è attraversato da aperture, che sono munite di valvole S, che si aprono verso l'esterno; nel fondo del cilindro vi è un'altra apertura, chiusa da una valvola V che si apre verso l'interno; quest'apertura comunica con un tubo T, che s'immerge nell'acqua Q da sollevare.

Sollevando lo stantuffo, nel cilindro si fa il vuoto, e la pressione atmosferica, agendo sull'acqua Q, la spinge dentro il cilindro, aprendo la valvola V; mentre le valvole S rimangono chiuse, premute dalla pressione esterna. Abbassando lo stantuffo, l'acqua aspirata si comprime, V si chiude e l'acqua non può tornare indietro; si aprono invece le valvole S e l'acqua passa da sotto a sopra lo stantuffo. Tornando a sollevare lo stantuffo, l'acqua che sta sopra di esso esce fuori; mentre sotto si aspira nuova acqua.

L'acqua con questa pompa può essere sollevata sino all'altezza massima (teorica) di *m* 10,33; poichè la pressione atmosferica, che è la causa che spinge su l'acqua, equivale a tale altezza d'acqua (§ 221). Ma praticamente la prevalenza difficilmente supera i 9 metri, non potendosi fare, dentro il cilindro, il vuoto perfetto.

251. **Pompa premente.** — Questa pompa serve a sollevare acqua dal l'alveo della pompa ad altezza superiore. In essa lo stantuffo è cieco (Fig. 336) e il cilindro è in parte immerso nell'acqua da sollevare, con la quale comunica per mezzo di un foro, chiuso da una valvola S che si apre verso l'interno del cilindro. Lateralmente è unito al cilindro un altro tubo T, chiuso da una *valvola di ritenuta* V che si apre verso l'esterno.

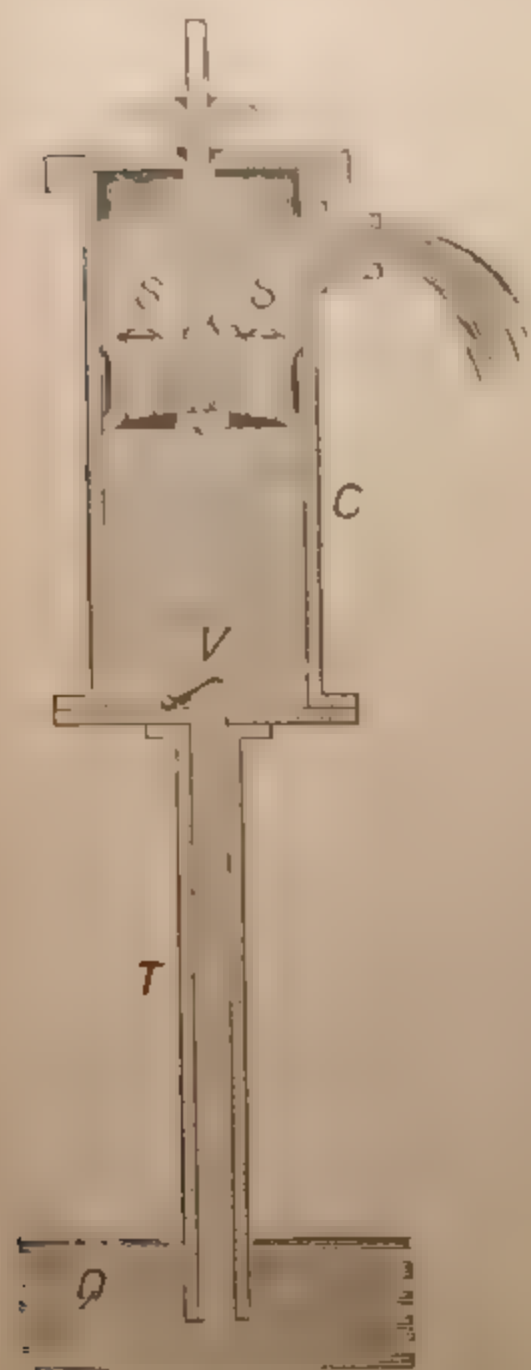



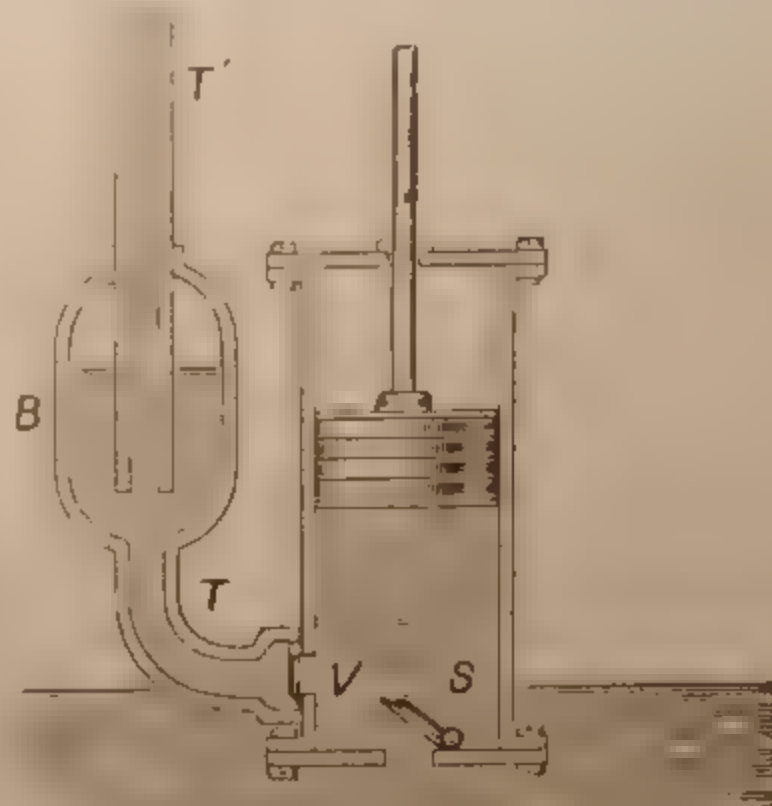
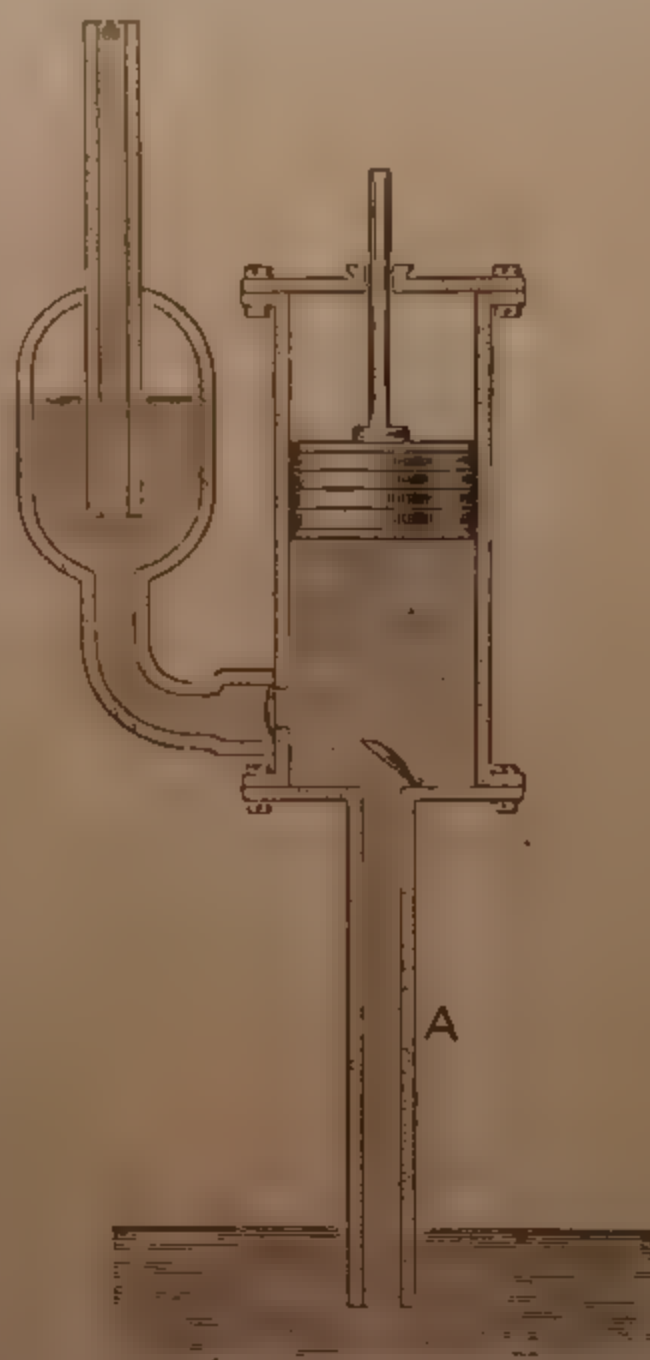
Fig. 335.

Fig. 336.

Dopo questa valvola il tubo s'innalza sino all'altezza a cui si vuole portare l'acqua. Sollevando lo stantuffo nel cilindro si fa il vuoto, e la pressione atmosferica esterna spinge l'acqua dentro il cilindro, aprendo la valvola S; mentre V rimane chiusa.

Fig. 337.

Quando lo stantuffo discende, l'acqua aspirata si comprime; fa pressione su S e la chiude, onde l'acqua non può più tornare indietro; ma preme anche su V e l'apre, sollevandosi per il tubo T' sino ad effluire all'esterno. La causa che spinge su l'acqua è la pressione esercitata dallo stantuffo, che può essere a piacere; l'acqua pertanto può essere sollevata a qualunque altezza.

Il getto ottenuto nel modo descritto, è intermittente; l'acqua esce all'esterno solo quando lo stantuffo si abbassa. Si rende il getto continuo, con l'aggiunta della *camera d'aria.* Si chiama così un serbatoio B (Fig. 336), pieno d'aria, inserito in un punto qualunque del tubo d'efflusso; questo penetra nella camera d'aria fin quasi al fondo. Quando lo stantuffo della pompa spinge l'acqua nel tubo T, essa in parte esce all'esterno, e in parte si raccoglie nella camera d'aria, comprimendovi l'aria racchiusa. Quando lo stantuffo sollevandosi non manda più acqua, quella raccoltasi nella camera d'aria viene spinta a sua volta all'esterno, dalla pressione dell'aria compressa.

Pompe di questa specie, [illegible] qual, si adoperano quali pompe da incendio, per [illegible] acqua a grande altezza.

252. **Pompa aspirante-premente.** — Questa pompa è la combinazione delle due precedenti; serve a sollevare acqua da un'altezza inferiore ad una superiore alla pompa. È formata come la pompa premente, a cui si

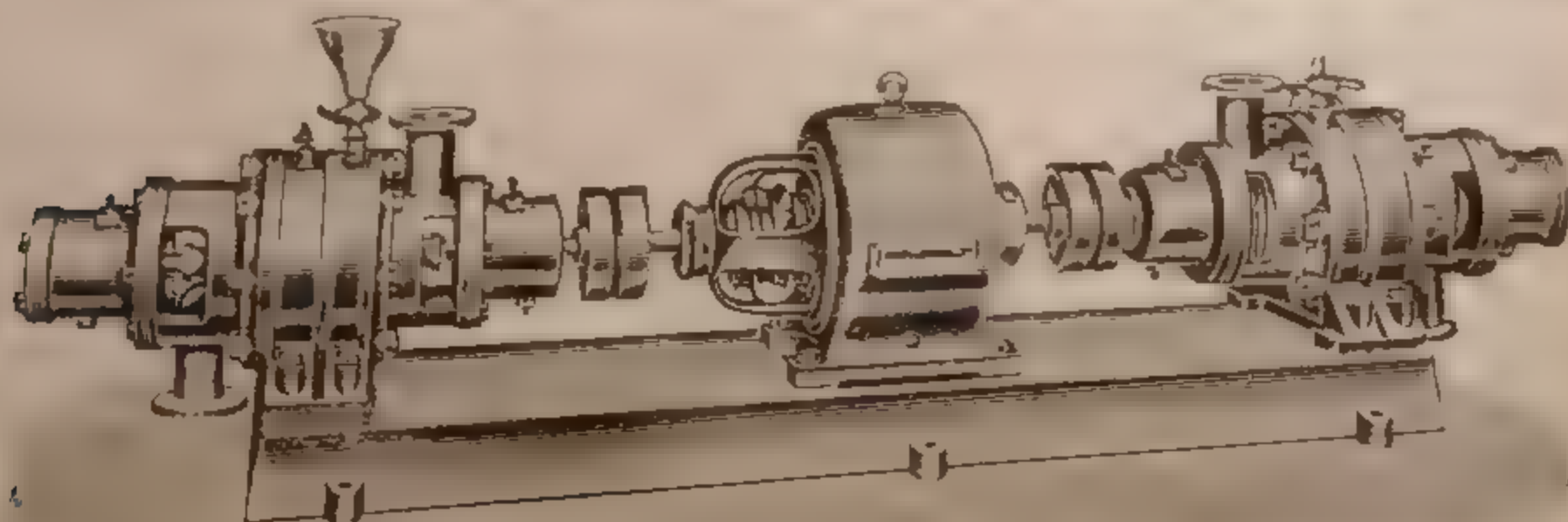



Fig. 338.

aggiunga il tubo di aspirazione A (Fig. 337); quindi può aspirare l'acqua da un'altezza massima teorica di m 10,33 sotto la pompa, e spingerla a qualunque altezza sopra la pompa. È questa la pompa più adoperata nella pratica.

Sono anche adoperate altre pompe a tamburo, e pompe centrifughe § (117-4), di grande portata, che non descriviamo. La Fig. 338 mostra due pompe centrifughe (ai lati), azionate direttamente da un motore elettrico (in mezzo).

253. **Sifone.** — Il **sifone** serve per travasare un liquido da un recipiente ad un altro. È costituito da un tubo ad U a branche disuguali. La branca più corta si immerge nel liquido da travasare (Fig. 339). Perchè il sifone funzioni, occorre che il tubo sia pieno; ciò si ottiene ordinariamente aspirando con la bocca all'estremità della branca più lunga. Quando il tubo sia pieno, il liquido continua ad effluire.

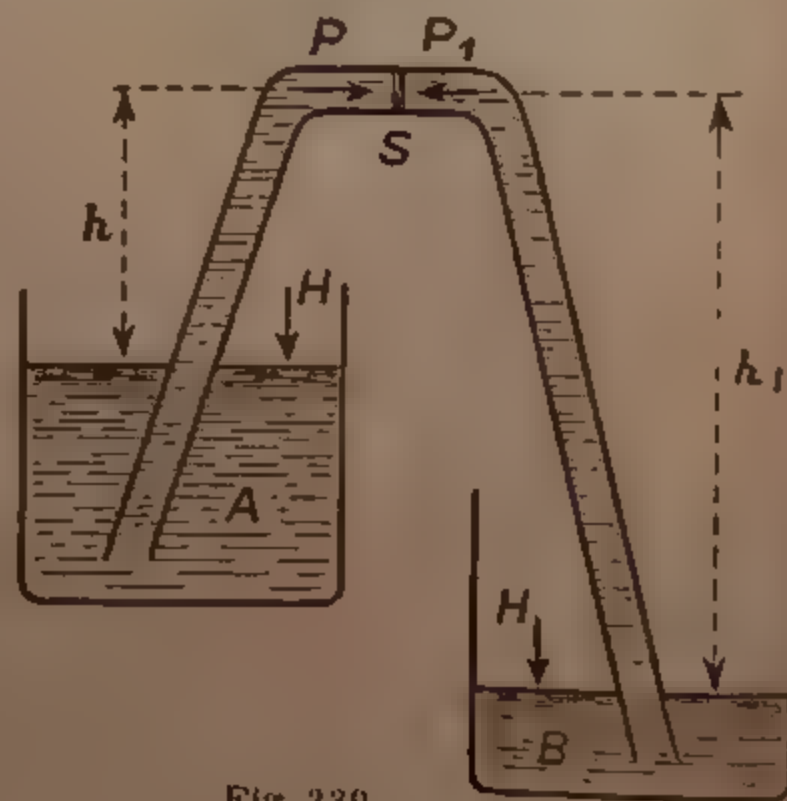



Fig. 339.

Infatti, sia s una sezione del tubo; su di essa si esercitano due pressioni P e P_1. La prima è eguale alla pressione atmosferica H, diminuita della pressione h della colonna liquida della branca immersa in A:

$$P = H - h$$

P_1 è eguale ancora alla pressione atmosferica H, diminuita di h_1:

$$P_1 = H - h_1.$$

Essendo $h < h_1$ è viceversa $P > P_1$. Il liquido quindi non è in equilibrio; ma è sollecitato a muoversi da A verso B, finchè $h = h_1$; cioè finchè non si dispone nei due vasi allo stesso livello.

È ovvio che deve essere $h < H$; altrimenti, per quanto si aspiri, il liquido di A non può arrivare al gomito superiore del sifone. Così, per l'acqua, non deve essere h maggiore di *m* 10,33.

254. Problemi sulle pompe.

a) Problema risoluto.

1. *Un compressore, il cui cilindro ha la capacità* v, *comprime aria in un recipiente di volume* V, *in cui la pressione iniziale è* H. *Calcolare la pressione nel recipiente, dopo* n *colpi di stantuffo.*

Risoluzione. — Trascurando gli spazi nocivi, ed ammettendo che la pressione esterna sia 1, ad ogni colpo di stantuffo il compressore manda nel recipiente un volume d'aria v alla pressione 1; dopo n colpi è stata mandato un volume d'aria vn alla pressione 1. Nel recipiente vi era il volume d'aria V alla pressione H, cioè il volume VH alla pressione 1. Quindi nel recipiente, dopo n colpi di stantuffo, si trova il volume d'aria $vn + VH$ ridotto alla pressione 1, che viceversa è compressa alla pressione incognita x. A questa pressione x l'aria occupa il volume V del recipiente; quindi per la legge di Boyle dev'essere:

$$vn + VH = Vx; \qquad \text{da cui:} \qquad x = \frac{vn + VH}{V}.$$

b) Problemi da risolvere.

1. Un compressore, il cui cilindro ha la capacità di 2 litri, comprime aria in un recipiente della capacità di 5 litri, in cui la pressione iniziale è di 1 *atm*. Calcolare la pressione raggiunta dopo 10 colpi di stantuffo.

2. La stessa questione del problema risoluto N. 1, supponendo che nel cilindro vi sia lo spazio nocivo v_0. (Si suppone la pressione esterna 1; esaminare colpo per colpo la pressione nel recipiente).

3. Una macchina pneumatica ha il cilindro della capacità di 2 litri e del diametro di 10 *cm*; essa fa il vuoto in un recipiente di 10 litri, in cui la pressione iniziale è di 1 *atm*. A quale altezza dello stantuffo si apre la valvola di scarico, al primo movimento di discesa dello stantuffo? (Si trascuri il peso della valvola).

4. La capacità del cilindro di una macchina pneumatica è v; essa fa il vuoto in un recipiente della capacità V, in cui la pressione iniziale è 1. Calcolare la pressione nel recipiente dopo n colpi di stantuffo. (Esaminare colpo per colpo la pressione nel recipiente).

5. Lo stantuffo di una pompa aspirante ha la corsa utile di 30 *cm* e la sezione di 0,8 dm^2; l'altezza della pompa dall'acqua del pozzo è di *m* 6. Calcolare:

a) La forza occorrente per sollevare lo stantuffo.

b) La potenza del motore occorrente perchè lo stantuffo faccia 30 aspirazioni al minuto (il rendimento totale della macchina è del 60%).

c) La quantità d'acqua erogata in un'ora.

6. Il diametro interno del cilindro di una pompa aspirante è d. La corsa dello stantuffo è l. La pompa comunica col pozzo per mezzo di un tubo verticale del diametro interno d_1, la differenza di livello tra la base del cilindro e l'acqua del pozzo è h. Calcolare a che altezza si solleva l'acqua nel tubo dopo il 1° colpo di stantuffo, se inizialmente nel tubo vi era aria alla pressione di 1 *atm*.

7. Calcolare la forza premente esercitata dall'acqua sulla faccia dello stantuffo di una pompa premente, durante la discesa dello stantuffo. Questo ha il diametro di 10 *cm*; l'altezza dell'acqua nel tubo di scarico è di 20 *m*.

Aviazione.

255. **Aeroplano.** — Il seducente problema della navigazione aerea, negli ultimi tempi è stato meglio risolto per mezzo dell'aeroplano. L'aerostato, come abbiamo visto, s'innalza per il principio di Archimede, perchè *più leggero* dell'aria; cioè per un principio di statica. L'aeroplano invece si solleva, quantunque *più pesante* dell'aria, per causa dinamica; cioè è col movimento che si genera la forza che lo sostiene, vincendo l'azione della gravità.

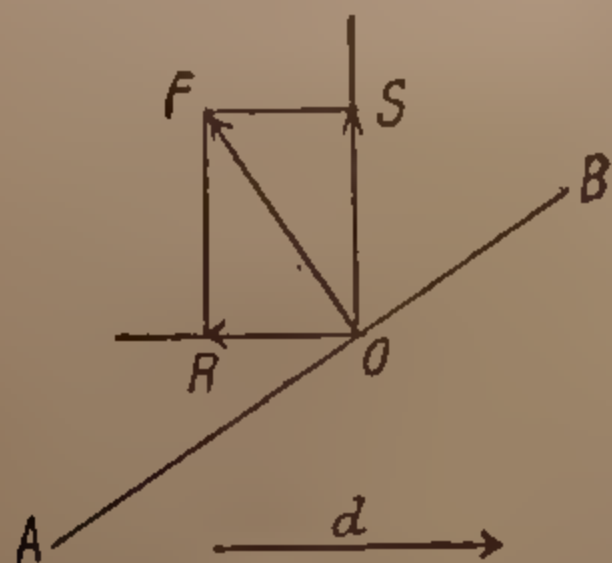



Fig. 340.

Il principio è il seguente, ed è lo stesso di quello che fa alzare un cervo volante: Sia AB la sezione di una superficie piana inclinata, i cui punti si muovono nell'aria nella direzione d, (Fig. 340). Per tale moto AB incontra in ogni suo punto nell'aria delle resistenze, la cui risultante si può considerare come una forza unica, in direzione perpendicolare ad AB, applicata in un punto O (che non è al centro di AB, ma più avanti) e di intensità proporzionale alla superficie di AB e al quadrato della sua velocità (§ 137). Tale forza sia rappresentata da OF; si scomponga (§ 62) nelle due componenti OR ed OS. La OR, orizzontale, è di verso contrario al moto, ed è quella che bisogna vincere perchè il piano AB si muova; si chiama la *componente ritardatrice*; la OS, verticale, è la forza che solleva il piano e si chiama la *componente sostentatrice*. Interessa che OS sia massima rispetto ad OR; ciò si ottiene dando ad AB una minima inclinazione rispetto a d.

Nell'aeroplano i piani AB sono le ali, disposte o su un piano solo (monoplani), o su due (biplani), o più piani; non sono proprio piane, ma alquanto incurvate, perchè tale forma fa diminuire la componente ritardatrice. Occorre un motore (a scoppio, leggerissimo, Vol. 2°, § 108) e un'elica, per far muovere l'apparecchio, e occorrono dei *timoni di direzione*, per guidare l'aeroplano a destra e a sinistra, e dei *timoni di profondità*, per farlo alzare od abbassare. Essi sono disposti all'estremità di una lunga intelaiatura, chiamata *la fusoliera*, (Fig. 341).

Da quanto si è detto si comprende che l'aeroplano non può alzarsi verticalmente, non può rimanere fermo in aria, non può scendere verticalmente.

La forza che lo sostiene dipende unicamente dal suo movimento, e non può raggiungere un valore sufficiente a sostenere il peso dell'apparecchio se non quando esso abbia raggiunto una velocità sufficiente. Per questo alla partenza l'aeroplano deve prima correre alquanto sul terreno con delle ruote, (o sull'acqua con dei galleggianti, se si tratta di idroplano), fino a raggiungere la velocità necessaria per sollevarsi. Parimenti, alla discesa, deve diminuire la sua velocità di quel poco che basti per discendere piano piano e

Fig. 341.

fargli toccare terra senza urto dannoso; ma toccherà terra con una notevole velocità, e quindi dovrà ancora muoversi a terra per un certo tratto, prima di fermarsi.

256. **Importanza dell'aviazione.** — Oggi con l'aeroplano, si sono raggiunte velocità superiori ai 700 *km* all'ora, e si è potuto salire ad altezze che sembravano riservate solo all'aerostato (1). I servigi resi dall'aeroplano nell'ultima nostra conquista dell'Abissinia, sono stati decisivi per la vittoria: ed anche in tempo di pace, gli aeroplani sono preziosi per la loro velocità per servizî postali, per trasporti celeri, e per scoperte geografiche.

Fra non molto, pertanto, mediante l'aviazione saranno conquistati alla civiltà vasti territori oggi difficilissimi a raggiungere; l'Europa e l'Asia saranno molto ravvicinate all'America del Nord, sorvolando al di sopra della calotta polare; il traffico aereo darà nuovi impulsi e aprirà nuovi campi a parecchie industrie.

Aumentando l'altitudine a cui vola un aeroplano, diminuisce la densità dell'atmosfera e quindi la resistenza da essa opposta al moto dell'apparecchio; cioè a pari potenza del motore, l'aeroplano può raggiungere mag-

---

(1) Il primato di altezza è di metri 17 116, raggiunti dall'italiano Pezzi, nel 1939.

giore velocità. Però diminuisce anche la potenza del motore. Se questa si potrà mantenere costante (e su ciò si studia con impegno), un aeroplano che

Fig. 342.

vicino a terra raggiunga la velocità di *km* 480 l'ora, a 26 000 *m* di altezza raggiungerebbe la velocità di 750 *km* l'ora.

Fig. 343.

Enorme è dunque l'importanza che l'aviazione è destinata ad acquistare per un ulteriore sviluppo della nostra vita economica e sociale, sia come mezzo di trasporto, sia quale aiuto e fattore di progresso.

La nuova [illegible] ha dimostrato di essere superiore a tutte le nazioni del mondo, nelle gare dell'aviazione.

Fig. 344.

Fig. 345.

Detentrice dei *primati* di altezza, di velocità e di distanza, ha una delle più forti flotte aeree del mondo; per la prima volta, nella storia dell'aviazione, nel 1931 S. E. Italo Balbo ha guidato uno stormo compatto di 12 apparecchi da Roma al Brasile, attraverso l'Atlantico, compiendo una traversata di 10300 *km* in 61 ore di volo effettivo. La Fig. 341 mostra uno dei ventiquattro gloriosi idroplani, che S. E. Balbo ha condotto da Roma

a Chicago e Nuova York, e ritorno in patria, nell'estate del 1933, percorrendo 20 000 *km* in 15 tappe.

Le dimensioni dei maggiori aeroplani, hanno raggiunto cifre fantastiche. L'Italia possedeva un idroplano, l'« Umberto Maddalena », lungo 60 *m*, e avente l'apertura d'ali di *m* 48, con *m*² 492 di superficie portante, 12 motori da 550 *Cv* ciascuno (Fig. 343). Poteva portare 170 persone, distribuite comodamente in 3 piani distinti (Fig. 344): raggiungeva il peso di 71 tonnellate, e la velocità di 200 *km* all'ora, con un raggio d'azione di 1500 *km* senza scalo; conteneva cabine da letto, salotti da conversazione, sale da pranzo, ecc.

In Russia è stato costruito un aeroplano ancora più grande, con l'apertura d'ali di *m* 63, pesante 42 *tonn*, con 8 motori di 7000 *Cv* totali, le ruote del carrello avevano il diametro di *m* 2! Ma questi enormi apparecchi sono stati abbandonati, perchè poco pratici.

In Italia inoltre si costruiscono i giganteschi biplani *Caproni*, con 6 motori da 1000 *Cv* ciascuno (Fig. 345).

Fig. 346.

257. Altri apparecchi per volare. — Si sono anche studiati altri apparecchi, chiamati ortopteri, che potessero sollevarsi per mezzo di ali battenti nell'aria, come quelle degli uccelli; ed altri, chiamati **elicotteri**, che potessero innalzarsi per mezzo di eliche sospensive, cioè con asse di rotazione verticale. Ma queste categorie di apparecchi ancora non hanno dato buoni risultati pratici, per delle ragioni che qui non possiamo approfondire. La Fig. 346 mostra l'*Elicottero d'Ascanio*, il primo degli apparecchi di questo genere, col quale qualche anno fa siasi ottenuto qualche risultato soddisfacente; anch'esso è il frutto del genio di un italiano.

Efflusso dei fluidi.

258. **Efflusso di un liquido da un orifizio.** — Supponiamo che da un piccolo foro OO praticato in un vaso a pareti sottilissime (Fig. 347), effluisca un liquido perfettamente scorrevole, contenuto nel vaso. Sia h l'altezza del livello del liquido dal foro O; sappiamo che su O agisce una pressione eguale al peso della colonna liquida sovrastante (§ 203). Questa pressione o **carico**, è una forza che spinge il liquido all'esterno, e gli imprime una velocità v. Torricelli trovò la seguente legge, che porta il suo nome:

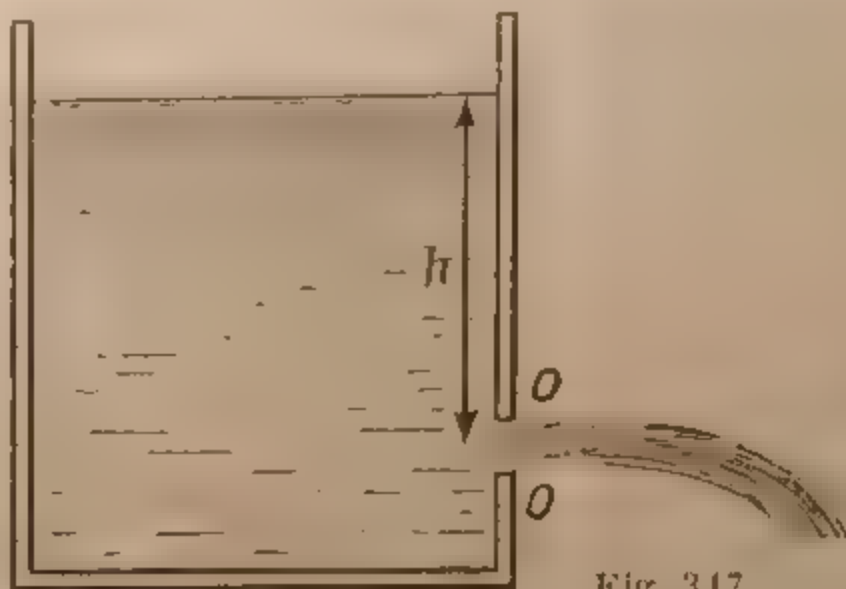



Fig. 347.

La velocità d'efflusso del liquido è la stessa che acquisterebbe un grave, cadendo liberamente dal livello del liquido al piano orizzontale passante per l'orifizio.

Tale velocità per la 3ª delle 1) del § 108 è:

$$1)\qquad v = \sqrt{2gh}\,,$$

nella quale g al solito è l'accelerazione della gravità.

259. **Portata del getto.** — Chiamasi **portata** il volume del liquido che effluisce nell'unità di tempo. Per la 1) la portata teorica P sarebbe quella del volume di una colonna liquida avente la sezione s eguale a quella dell'orifizio O e la lunghezza eguale a v. Cioè:

$$2)\qquad P = sv = s\sqrt{2gh}\,.$$

Ma in pratica la portata è alquanto minore. Avviene infatti che l'efflusso del liquido non è dovuto solamente al movimento delle particelle in direzione perpendicolare alla sezione s del foro; ma intervengono le altre particelle laterali, che movendosi anch'esse verso il foro, producono la *contrazione della vena liquida*; la quale infatti in vicinanza del foro non è cilindrica, ma strozzata, con sezione (UV) minore di quella (MN) del foro, (Fig. 348). Oltre a ciò influiscono sulla velocità del getto l'attrito del liquido contro l'orlo dell'orifizio e la resistenza dell'aria in cui si muove il liquido.

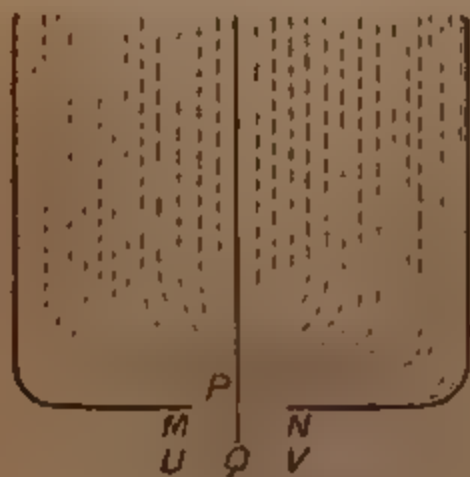



Fig. 348.

In conclusione la portata pratica P' è minore della teorica P; cioè:

$$P' = kP,$$

dove k è un coefficiente, minore dell'unità, che dipende dalla qualità del liquido, dal valore della sezione e dalla forma dell'orifizio, ecc. Per l'acqua, in condizioni ordinarie, si può assumere con approssimazione:

$$3)\qquad k = 0{,}6 \qquad \text{e:} \qquad P' = 0{,}6\,P.$$

260. Efflusso da un tubo. — Supponiamo ora che il liquido del recipiente sia condotto all'esterno attraverso un lungo tubo. L'attrito contro le pareti del tubo rallenta il moto del liquido e quindi la sua velocità. Si ha perciò una diminuzione graduale della pressione che spinge il liquido nel tubo, man mano che si allontana dal recipiente. Ciò può anche verificarsi sperimentalmente, innestando in varî punti del tubo dei cannelli di vetro c_1 c_2 c_3 . . . (Fig. 349). Se l'estremità K del tubo di efflusso è chiusa, e quindi il liquido è fermo, esso per il principio dei vasi comunicanti (§ 208) si dispone in tutti i cannelli allo stesso livello che nel vaso V; la pressione quindi in tutti i punti del tubo è costante ed eguale a quella nel punto O di origine del tubo. Se invece K è aperto ed il liquido effluisce, si vedrà abbassarsi il livello del liquido nei varî cannelli, nel modo indicato nella Fig. 349.

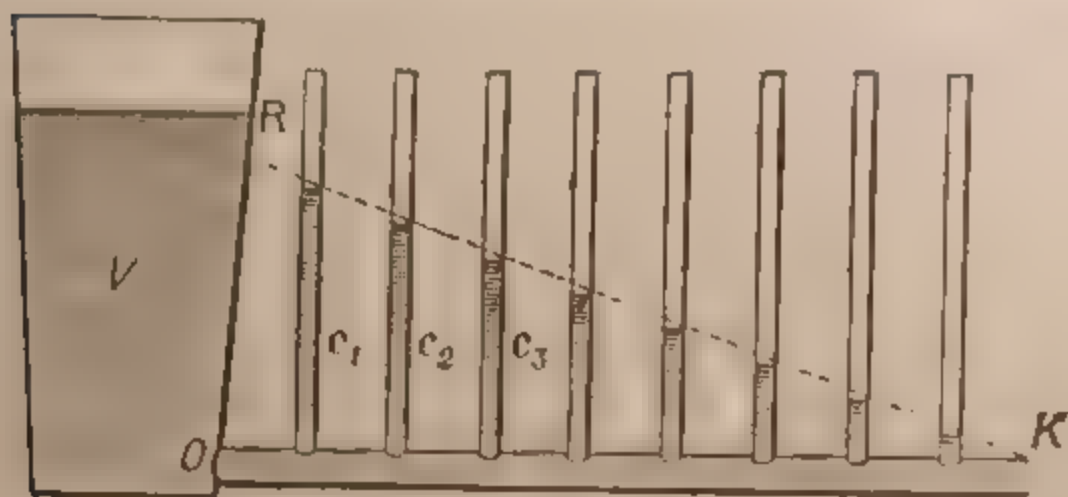



Fig. 349.

Se il tubo d'efflusso non è a sezione costante, ma è formato, ad es., di due tratti, il primo di sezione s_1 ed il secondo di sezione s_2, la velocità del liquido nei due tratti non è uguale. Sia Q la portata del tubo; la stessa quantità Q di liquido dovrà passare, nello stesso tempo, per i due tratti del tubo. Quindi, chiamando v_1 e v_2 le velocità nei due tratti, dev'essere:

$$Q = s_1 v_1 \qquad \text{e} \qquad Q = s_2 v_2; \qquad \text{cioè:}$$

$$4) \qquad s_1 v_1 = s_2 v_2, \quad \text{che si può scrivere:} \quad v_1 : v_2 = s_2 : s_1 .$$

Cioè, si può enunciare la seguente *legge del Castelli* [1]:

Le velocità di un liquido nei diversi tratti di un tubo di efflusso, sono inversamente proporzionali alle sezioni di essi.

261. Propulsione dei bastimenti - Elica. — Abbiamo visto nel § 205, che un getto d'acqua da un foro sulla parete laterale di un recipiente, provoca una spinta sulla parete opposta, nel verso contrario al getto. Si preconizza l'applicazione di questo principio alla propulsione dei bastimenti lanciando un forte getto d'acqua da un tubo che sbocchi dietro la poppa. Con ciò si potrà ottenere un maggiore rendimento dell'elica oggi comunemente adoperata, che è appena del 75 %. Purchè si trovi il modo di produrre il getto d'acqua senza far uso di pompe, che avrebbero un rendimento assai minore dell'elica. Con ciò del resto si imiterebbe ancora la natura; poichè alcuni molluschi (seppie, polpi, ecc.) possono muoversi nell'acqua, lanciando per un piccolo foro presso il collo un getto d'acqua, che riempiva una cavità interna.

---

(1) Castelli Benedetto, discepolo di Galileo; n. a Brescia nel 1577, m. a Roma nel 1644.

L'elica ora adoperata per la propulsione dei bastimenti fu applicata la prima volta nel 1831 da Pier Luigi Chauvage, francese; essa ha sostituito quasi completamente le ruote a pale una volta adoperate. Queste si usano ancora nella navigazione lacustre o fluviale, perchè funzionano anche nell'acqua a poca profondità, nel qual caso l'elica non si può applicare.

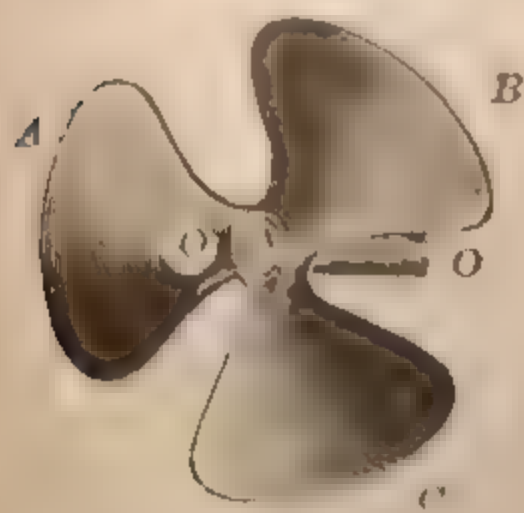



Fig. 350

L'elica è formata da tre o più pale $A - B - C$ (Fig. 350), la cui superficie fa parte di un elicoide [1]. Essa può ruotare rapidamente attorno al suo asse OO. Con la rotazione le pale, inclinate rispetto all'asse, producono nell'acqua in cui sono immerse un moto elicoidale e generano perciò una colonna d'acqua che l'elica lancia con violenza dietro al bastimento. Si comprende meglio questo risultato, pensando alla colonna d'aria lanciata da uno di quei ventilatori elicoidali (Fig. 351), che adoperiamo d'estate per farci fresco.

La colonna d'acqua lanciata dall'elica, provoca per reazione contro di questa una spinta opposta, che produce la propulsione del bastimento. La colonna d'acqua acquista però anche un moto rotatorio; l'energia richiesta per generare questa rotazione, non è impiegata per la propulsione, ed è quindi perduta; ciò spiega perchè il rendimento dell'elica non superi il 75 % e perchè si avrebbe vantaggio producendo un getto d'acqua privo di moto rotatorio.

Fig. 351.

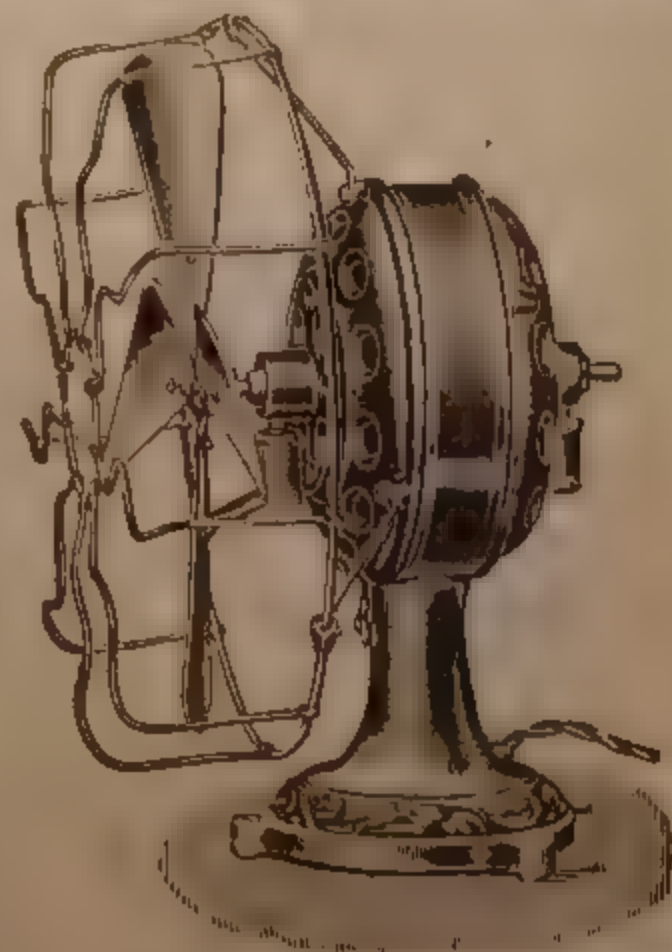
In modo simile si spiega il funzionamento dell'elica aerea per la propulsione dei dirigibili e degli aeroplani; in tal caso l'elica ha solitamente due pale, (Fig. 352).

262. **Turbine idrauliche.** — L'acqua in movimento possiede una forza viva (§ 139) ed è quindi suscettibile di produrre lavoro. Ciò si ottiene ancora in qualche caso con una **ruota idraulica**, che si vede talvolta in campagna vicino a un ruscello, per muovere la macina di un mulino. Essa è formata

Fig. 352.

(1) Della forma di questa superficie si può avere un'idea, pensando alla superficie del filetto di una vite, o meglio ad una scala a chiocciola.

da una grande ruota, munita alla periferia di palette (Fig. 353); l'acqua condotta da un piccolo canale di legname, urta contro le palette su una parte della ruota e produce la rotazione di questa, scaricandosi inferiormente in un canale di scarico.

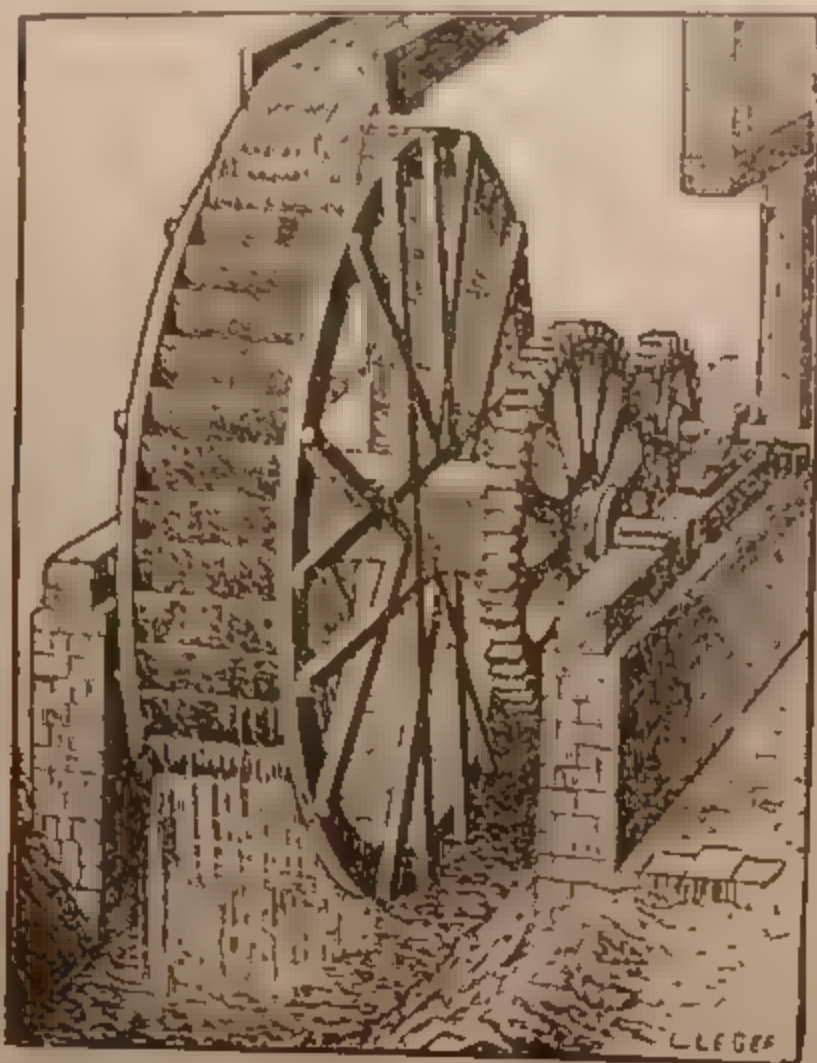



Fig. 353.

Le ruote idrauliche sono di peso rilevante, ingombranti e di scarso rendimento (non oltre il 70 %), funzionano solo per salti d'acqua non eccedenti i 12 *m*, e si muovono lentamente; tanto da richiedere l'uso di rotismi per aumentare la velocità di rotazione. Onde, per quanto ricercate da tutti i pittori di paesaggio, ora si adoperano solo in casi specialissimi; per es., se l'acqua è fangosa. Inoltre, essendo di legno, hanno durata limitata.

Le **turbine idrauliche** sono quelle generalmente adoperate; in esse l'acqua è condotta su una ruota girevole munita di palette, o per mezzo di *ugelli*, o mediante altre palette fisse *direttrici*, che circondano tutta la ruota. Così l'acqua non lavora solo su una frazione della ruota,

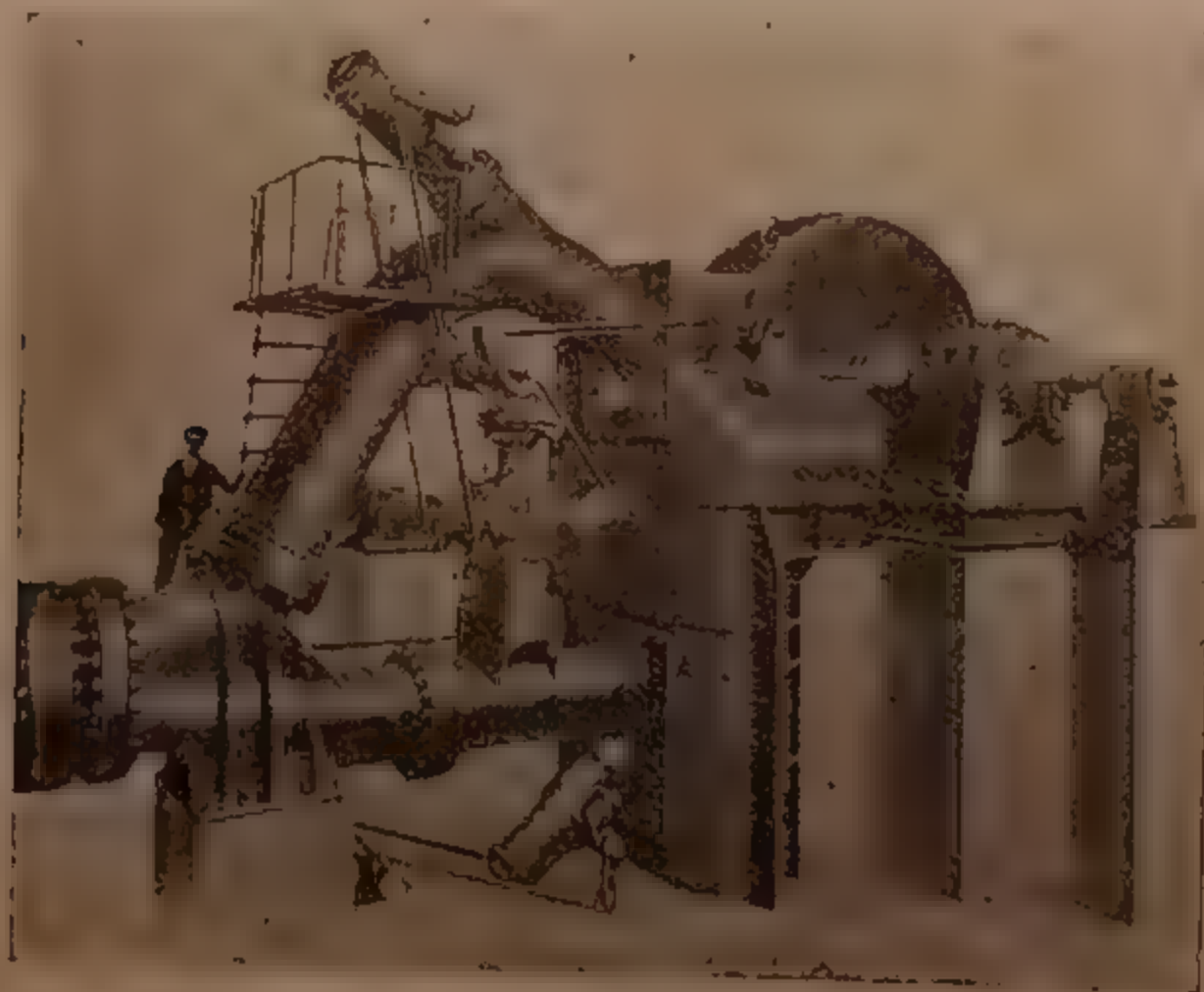



Fig. 354.

ma su tutta la periferia, e la macchina ha dimensioni più ridotte, rendimento che può sorpassare il 90 %, velocità rilevante, e può funzionare per salti d'acqua di parecchie centinaia di metri.

Nelle turbine ad azione l'acqua, cadendo dall'alto con velocità, batte contro le palette della ruota ed esce dalla turbina con velocità quasi nulla. La Fig. 354 mostra una grande turbina Pelton ad azione, di 50000 Cv, costruita dalla Casa Tosi di Legnano.

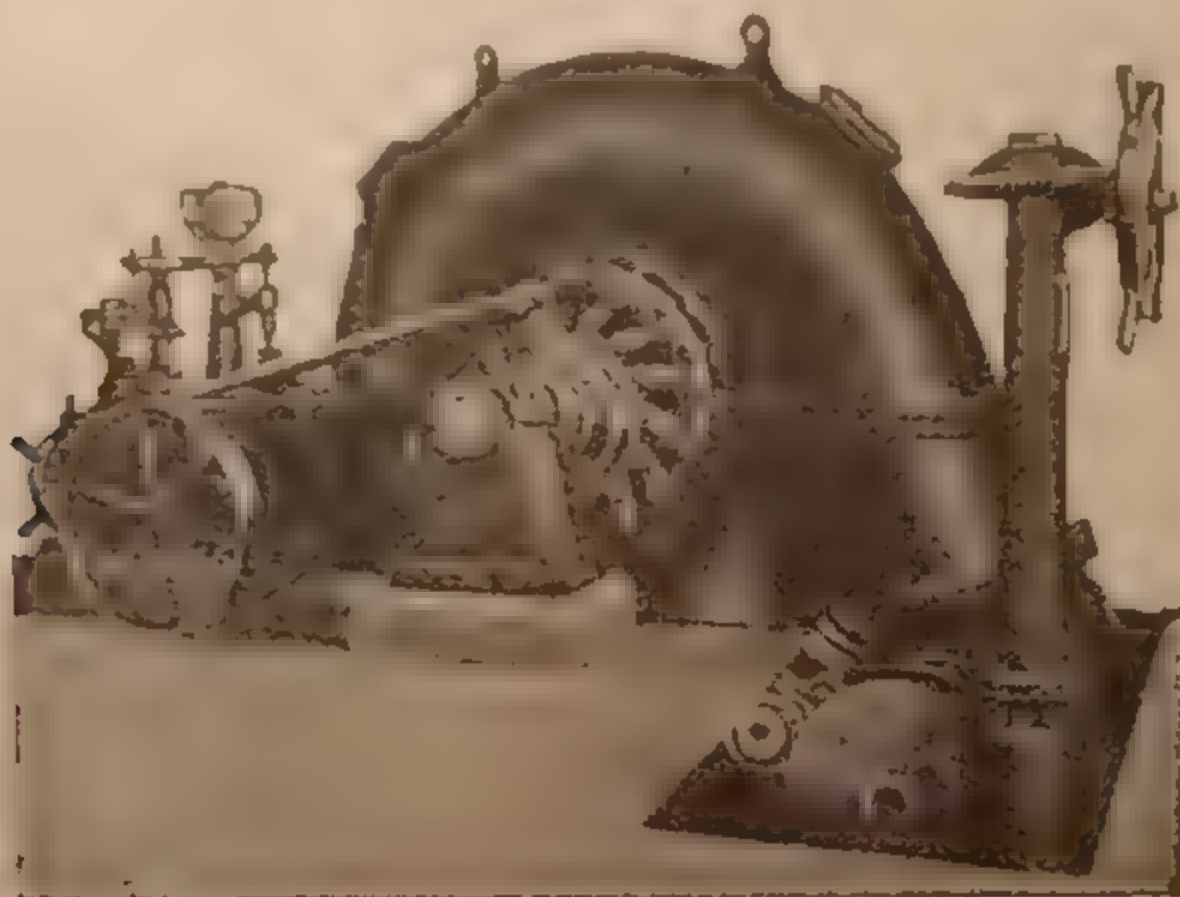



Fig. 355.

Nelle **turbine a reazione** l'acqua esce dalla ruota con grande velocità, dando con ciò per reazione una spinta all'indietro contro le palette e provocando il movimento della ruota. È ancora il principio dell'arganetto idraulico (§ 205). La Fig. 355 mostra una **turbina Francis** a reazione, ad asse orizzontale.

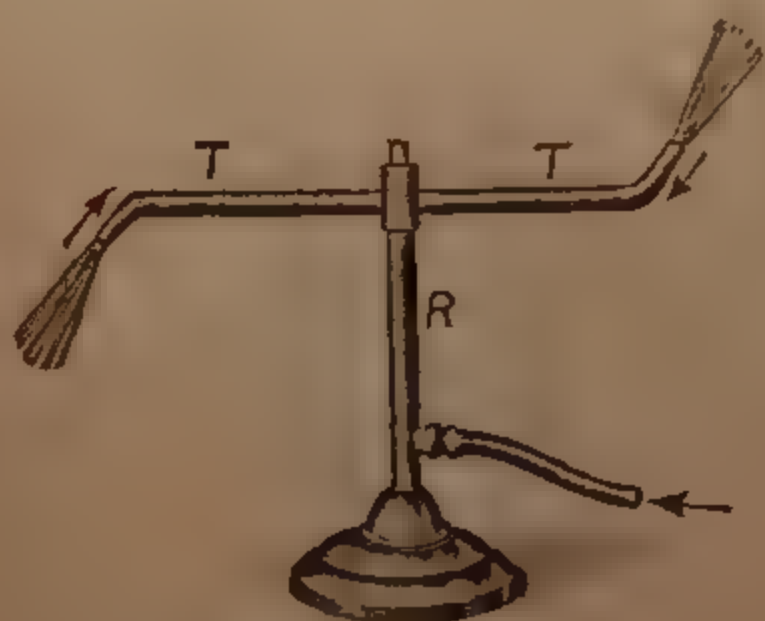



Fig. 356.

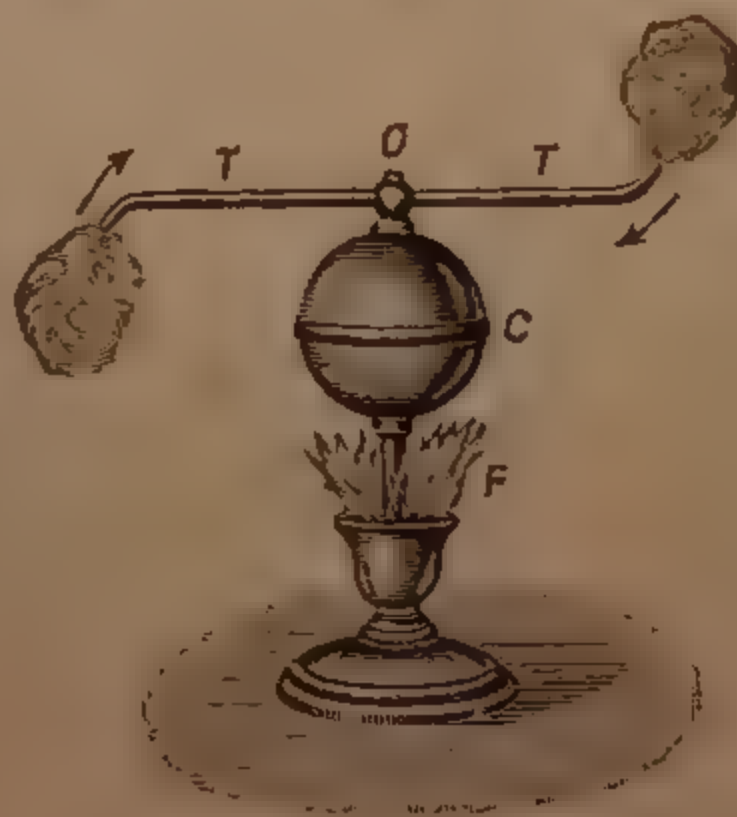



Fig. 357.

263. Efflusso di un gas. — Considerazioni analoghe a quelle per i liquidi si possono fare per l'efflusso di un gas compresso da un orifizio. La legge di Torricelli, espressa dalla 1) del § 258, è ancora valevole, quando per h s'intenda l'altezza di una colonna del gas effluente, che farebbe equilibrio alla pressione del gas contenuto nel recipiente. Anche ora la velocità pratica d'efflusso è minore di quella teorica, ed avviene una perdita progressiva di carico, se l'efflusso avviene attraverso un lungo tubo.

Un ragionamento analogo a quello fatto in idrodinamica per la pressione laterale (§ [illegible]), ci induce a pensare che l'uscita di un gas compresso da un orifizio sulla parete del recipiente che lo contiene, provochi una spinta

Fig. 358.

contraria al getto, sulla sezione del recipiente eguale alla sezione del foro d'uscita, e posta dirimpetto a questa.

Fig. 359.

Si può verificare questo fatto con un **arganetto pneumatico**, simile a quello idraulico, costituito da un tubo TT (Fig. 356) ripiegato a Z, girevole attorno ad un altro tubo R fisso, facente da perno. R comunica con un serbatoio contenente aria compressa. Questa da R può entrare nel tubo TT ed effluire dalle estremità di esso; si vedrà tale tubo mettersi a ruotare rapidamente nel senso delle frecce.

In modo simile funziona l'eolipila di Erone, nella quale il fluido è il vapore compresso che si genera in una caldaietta C (Fig. 357), contenente acqua, che si fa bollire con un fornello a spirito F.

264. Turbina a vapore. — Le turbine a vapore sono analoghe a quelle idrauliche; utilizzano l'azione di un getto di vapore, anzichè quella di un getto d'acqua. Ne daremo un cenno in Tecnologia, allorchè parleremo delle macchine termiche, (Vol. 2°, § 107).

265. Motore a razzo. – Col principio esposto nel § 263, si spiega come possa sollevarsi il razzo. È questo un tubo di cartone o di metallo, pieno di polvere pirica a lenta combustione. Con l'accensione di questa polvere, si genera nell'interno del tubo una forte quantità di gas compresso, che uscendo con violenza verso il basso, produce la spinta che solleva il razzo. Si noti il fatto che per prodursi questa spinta, non è necessario che il razzo si muova nell'aria; esso si muoverebbe anche nel vuoto.

Si è tentato di utilizzare tale principio per la propulsione di un veicolo; il che sarebbe specialmente interessante per una macchina da volare, perchè permetterebbe il moto di questa anche fuori dai confini dell'atmosfera, e quindi i viaggi interplanetari. Ma per quanto siansi fatti recenti esperimenti, nel 1928 a Berlino con l'**auto-razzo** di Opel (Fig. 358), nel 1929 a Monaco con l'**aeroplano-razzo** di Max Valier (Fig. 359), siamo ancora lontani dalla soluzione pratica di questo seducente, ma non facile problema. Infatti, la teoria dice, che la massa residua trasportabile di un motore a razzo, è meno della centesima parte della massa iniziale; vedesi dunque quanto è scarso il rendimento di un simile sistema di propulsione. D'altra parte è il solo sistema su cui potrà basarsi l'*astronautica.*

266. Problemi sull'efflusso dei fluidi.

a) Problemi risoluti.

1. *In un recipiente metallico, contenente acqua alla pressione di 3 atmosfere, è praticato un foro circolare di* mm *15 di diametro, da cui esce un getto d'acqua, che è raccolta in un tino della capacità di l 450. In quanto tempo si riempie il tino?*

Risoluzione. — Supponiamo che la pressione indicata sia quella all'orifizio d'uscita, e che si mantenga costante. La pressione di 3 *atm* equivale all'altezza d'acqua:

$h = m\,(10{,}33 \times 3) = m\ 30{,}99.$ L'ipotesi del recipiente metallico ci fa ritenere lo spessore delle pareti sufficientemente piccolo da applicare la legge di Torricelli, (§ 258-1); la velocità d'efflusso è perciò:

$$v = \sqrt{2gh} = {}^{m}/_{s} \sqrt{2 \times 9{,}8 \times 30{,}99} = {}^{m}/_{s}\ 24{,}6 = {}^{dm}/_{s}\ 246.$$

La sezione del foro è: $s = cm^2\ 3{,}1416 \times (0{,}75)^2 = cm^2\ 1{,}767 = dm^2\ 0{,}01767.$

La portata effettiva del getto è (§ 259-2 e 3):

$$P = 0{,}6\ vs = {}^{dm^3}/_{s}\ (0{,}6 \times 246 \times 0{,}01767) = 2{,}61 \text{ litri al s.}$$

Quindi per versare l 450 occorrono secondi:

$$t = (450 : 2{,}61)^s = 172^s = 2^m\,52^s.$$

2. [illegible] *con pareti verticali* [illegible] *del liquido si fa un* [illegible] *dal piede della verticale abbassata dal foro, il getto tocca il pavimento.*

Soluzione. — [illegible] (§ 113); l'essere il recipiente metallico, [illegible] Quindi la velocità con cui esce l'acqua è (§ 258-1):

$$v = \sqrt{2ga}$$

Indichiamo con t il tempo che impiega l'acqua per arrivare dal foro al pavimento; se non vi fosse la gravità l'acqua percorrerebbe in tal tempo, con moto uniforme, un tratto orizzontale:

5) $\quad x = t \sqrt{2ga}$. Ma per azione della gravità nello stesso tempo l'acqua deve cadere da un'altezza $h - a$, che per la 2ª del § 108-I, è:

$$h - a = \frac{1}{2} g t^2; \quad \text{da cui:} \quad t = \sqrt{\frac{2(h-a)}{g}}. \quad \text{Sostituendo nella 5) si ha:}$$

$$6) \quad x = \sqrt{\frac{2(h-a)}{g}} \sqrt{2ga} = 2\sqrt{a(h-a)}; \quad \text{che è la distanza richiesta.}$$

Osserviamo che se il foro è alla profondità $h - a$, la sua distanza dal pavimento diventa a, e la 6) mantiene lo stesso valore. Quindi i getti uscenti da fori equidistanti dal livello dell'acqua e dal pavimento, toccano questo nello stesso punto.

b) **Problemi da risolvere.** (Trascurare la resistenza dell'aria).

1. In un recipiente metallico chiuso è contenuta acqua per l'altezza di *m* 2, e su di essa vi è aria compressa alla pressione di 3 *atm*. Calcolare la velocità con cui esce l'acqua da un foro circolare di *mm* 12 di diametro, fatto nel fondo del recipiente, e la quantità d'acqua che esce in 10^s.

2. Quale dev'essere la pressione minima con cui deve uscire un getto d'acqua, per spingerla ad una distanza orizzontale *d* dall'orifizio d'uscita? (Calcolare la velocità iniziale del getto con le leggi del moto dei proiettili).

3. Con quale pressione si deve spingere l'acqua con una pompa da incendio, perchè dalla strada arrivi sul tetto di un edifizio alto *m* 25?

4. Da un recipiente chiuso, contenente aria compressa a 12 *atm*, questa può uscire da un foro circolare di *mm* 10 di diametro. Calcolare la velocità del getto e la spinta che subisce il recipiente nel verso opposto al getto, all'inizio dell'efflusso.

Azioni molecolari nei fluidi.

267. Fenomeni capillari. — Abbiamo visto (§ 202) che la superficie libera di un liquido in quiete, ha la forma di un piano orizzontale. Ciò non

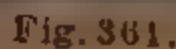



Fig. 360. Fig. 361.

avviene in contatto con le pareti del recipiente; ove, se *il liquido bagna la parete* (per es. l'acqua), si forma un orlo ricurvo alquanto rilevato

(Fig. 360), mentre se il liquido non bagna la parete (p. es. mercurio), si forma un orlo alquanto abbassato (Fig. 361).

Se s'immerge nel liquido un tubo di piccolo diametro, se il liquido bagna il tubo, s'innalza dentro ad esso ad un livello superiore dell'esterno, e la superficie di livello prende la forma di un menisco concavo, (Fig. 362), se il liquido non bagna il tubo, rimane nell'interno di esso a un livello più basso, e la superficie prende la forma di un menisco convesso, (Fig. 363).

Cambiando la natura del liquido e il diametro del tubo, varia l'innalzamento di esso; e precisamente si ha la seguente legge, che va sotto il nome di **Jurin** [1], che la fece conoscere nel 1718, mentre era già stata enunciata dal **Borelli** nel 1670:

In una medesima atmosfera ambiente, ed in tubi formati della stessa sostanza, un medesimo liquido s'innalza (o si abbassa) di altezze inversamente proporzionali al raggio del tubo.

Questa legge è solo sufficientemente approssimata per raggi compresi fra *mm* 0,1 e 2; per tubi di raggio minore di *mm* 0,1 è in difetto, cioè l'innalzamento del liquido è maggiore di quello che vuole la legge; per tubi di raggio maggiore di *mm* 2 è in eccesso. L'innalzamento (o abbassamento) inoltre, per un medesimo liquido, diminuisce coll'aumentare della temperatura di questo.

Fig. 362. Fig. 363.

La verifica sperimentale si fa con gli apparecchi di vetro delle Figg. 364-365, formati con più tubi tra loro comunicanti, di raggio diverso. Nella Fig. 364 è rappresentato l'esperimento con

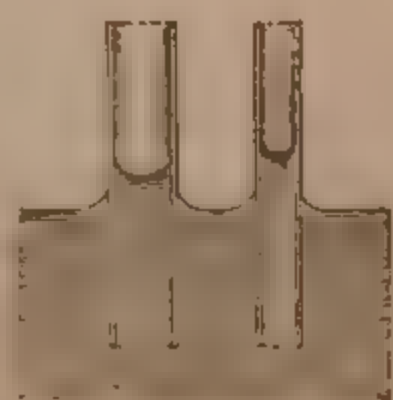
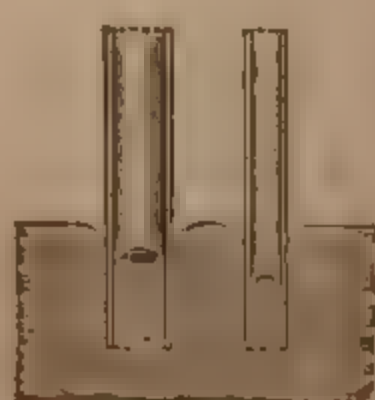
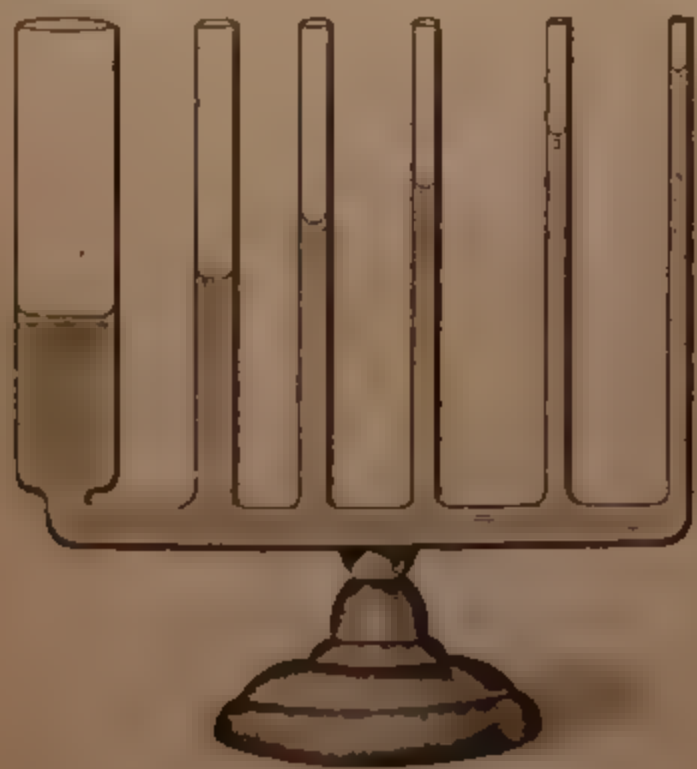
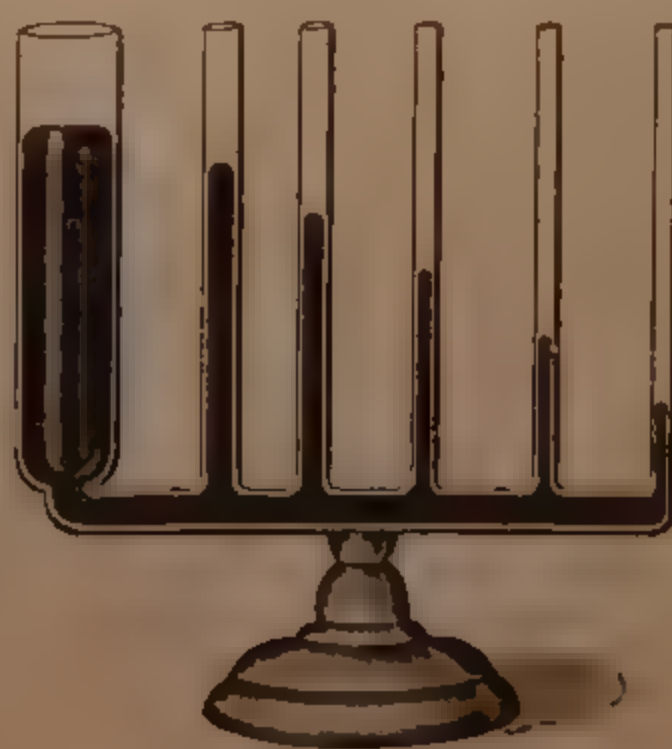



Fig. 364. Fig. 365.

un liquido che bagna il vetro (acqua); nella Fig. 365, con un liquido che non bagna (mercurio). Questi fenomeni pertanto sono da considerarsi come un'eccezione al principio dei vasi comunicanti (§ 208).

(1) Jurin James, medico inglese; n. nel 1684, m. a Londra nel 1750.

268. **Tensione superficiale.** — La spiegazione dei fenomeni capillari dipende dall'esistenza, alla superficie di un liquido, di una membrana invisibile, densa, quasi solida, dotata di tensione. L'esistenza di tale membrana si deduce col seguente ragionamento. Sia A (Fig. 366), una molecola del liquido nell'interno di un vaso; essa, per coesione (§ 19), è attratta da tutte le altre molecole che la circondano. Queste forze sono due a due contrarie, e si equilibrano; la loro azione si esercita solo sino a distanza piccolissima da A, dell'ordine di 0,0001 *mm*, che si chiama il *raggio di attività molecolare*. Per una molecola B vicina alla superficie, si equilibrano le forze attrattive laterali; ma vi sono forze attrattive preponderanti verso il basso, non equilibrate da altre verso l'alto, mancando sopra B molecole che l'attirino verso l'alto. Dunque le molecole della superficie, per uno strato sottilissimo, di spessore eguale al raggio di attività molecolare, sono fortemente attratte verso il basso, e tutto lo strato rimane fortemente compresso. Queste forze di coesione sono rilevanti, malgrado la piccolezza delle molecole, per la loro estrema vicinanza; la compressione che ne risulta è così forte, che non si potrebbe fare artificialmente con alcuna pompa; onde lo strato liquido superficiale risulta così denso, da diventare semisolido.

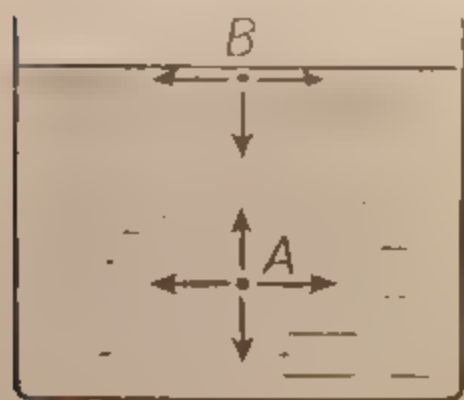



Fig. 366.

Fig. 367.

Così si spiega come poggiando delicatamente un ago da cucire sulla superficie dell'acqua, esso non affonda; ma rimane sullo strato superficiale, che lo sorregge completamente fuori dell'acqua. Per la stessa ragione quel noto insetto, chiamato *idrometra*, può camminare *sopra* la superficie dell'acqua (Fig. 367), sorretto dalla membrana superficiale.

269. **Lamine liquide.** — Lo studio della tensione superficiale si fa meglio con un liquido ridotto al solo strato superficiale, cioè con le **lamine liquide.**

Si sciolga del sapone bianco nell'acqua, aggiungendovi qualche goccia di glicerina; si ottiene un *liquido saponaceo* (1), col quale si possono fare le seguenti esperienze:

1. Si immerga nel liquido saponaceo un anello di filo metallico, sostenuto da un manico opportuno. Estraendo l'anello dal liquido, si trova coperto da una sottilissima lamina liquida, di forma piana; cioè *tale lamina*

---

(1) Ecco la composizione di un liquido adatto che si conserva anche per anni: Si riempie per tre quarti una bottiglia con acqua distillata, e vi si aggiunge un quarantesimo di oleato di soda; dopo che si è sciolto, cioè dopo una giornata, si termina di riempire la bottiglia con glicerina, e si agita bene; indi si lasci riposare per una settimana in luogo oscuro; poi si decanta con un sifone, lasciando la schiuma, e si aggiungono 3 o 4 gocce di ammoniaca, per ogni litro. Non bisogna nè scaldare, nè filtrare; si conserva in bottiglie chiuse, in luogo oscuro e fresco.

è tesa. Soffiando leggermente su una faccia, essa s'incurva a forma di borsa (Fig. 368); ma cessando di soffiare, riprende la forma piana; cioè la *lamina è contrattile.* Dobbiamo pertanto pensare, che la membrana superficiale di un liquido sia come una sottilissima membrana di gomma *elastica, tesa, contrattile.*

Fig. 368. Fig. 369. Fig. 370.

2. In due punti dell'anello metallico precedente, leghiamo un sottile filo flessibile, di lunghezza maggiore della corda che ha per estremi tali punti. Immergendo quest'anello nel liquido saponaceo e poi estraendolo, si ottiene ancora una lamina liquida piana, aderente al suo contorno. Il filo, annegato in tale lamina, assume una forma floscia e sinuosa qualsiasi, (Fig. 369). Se ora si rompe la lamina da una delle parti, ad es. *c*, di questo filo, si vede questo tendersi a forma di arco circolare, (Fig. 370). Ciò dimostra meglio che la lamina aderente al filo lo tende, cioè *è dotata di tensione;* ma la forma circolare dell'arco dimostra che *questa tensione è eguale in ogni punto del filo.* Quindi consideriamo la tensione superficiale delle lamine liquide, come agente linearmente, e la misureremo come una forza di data intensità per ogni unità di lunghezza. La tensione superficiale cioè si misura in *dine per cm*; o praticamente, in *mg* per *mm* di lunghezza. Essa naturalmente varia da liquido a liquido, e per lo stesso liquido con la temperatura; così ad es., si ha a 20°:

Acqua	tens.	sup.	=	*mg*	8,253
mercurio	»	»	=	»	55,030
alcool	»	»	=	»	2,599
petrolio	»	»	=	»	3,231

Fig. 371.

L'acqua ha dunque una tensione superficiale maggiore degli altri liquidi comuni. Per questo, se si lascia cadere una goccia di petrolio sull'acqua, sul contorno di separazione dei due liquidi si esercita una forza di trazione dell'acqua sul petrolio; la goccia quindi si espande, fino a coprire tutta la superficie dell'acqua. Facendo così espandere piccolissime gocce di olio sull'acqua, Devaux riuscì ad ottenere uno strato superficiale di olio così sottile, che il suo spessore era quello del diametro di una molecola, cioè di qualche decimilionesimo di millimetro!

3. Immergiamo nel liquido saponaceo uno scheletro di fili metallici, disposti secondo gli spigoli di un tetraedro. Estraendolo dal liquido, si vedranno aderirvi le lamine, non secondo le facce del tetraedro; ma

secondo piani che dalle costole vanno a incontrarsi al centro del tetraedro, (Fig. 371). Ora il calcolo dimostra che l'insieme di tali lamine è *una superficie ad area minima*; cioè è la superficie di estensione minore che si può avere compatibilmente col contorno su cui si appoggia. Non poteva essere diversamente, data la contrattilità delle lamine. Parimenti superfici ad area minima si ottengono con altri scheletri di forma diversa.

270. **Bolle di sapone.** — Soffiamo con un cannello, nel modo noto, una bolla di sapone; lasciando aperto il cannello, la bolla diminuisce e scompare. Anche ora abbiamo la prova che la lamina liquida della bolla è contrattile e dotata di tensione. La forma sferica della bolla, è ancora prova dell'eguaglianza di tensione in tutti i punti della sua superficie.

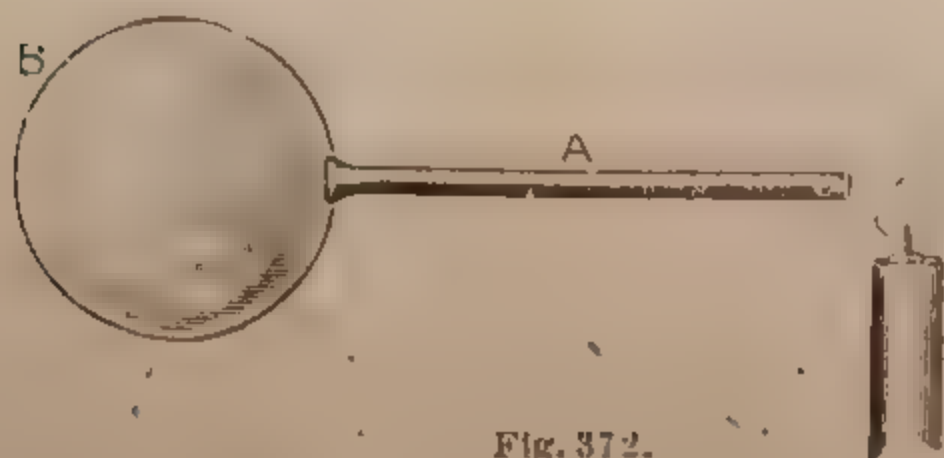



Fig. 372.

Chiudendo il cannello all'estremità, nell'interno della bolla si determina una piccola pressione, che può misurarsi con un manometro adatto; se l'estremità del cannello è affilata e si dirige verso la fiamma di una candela, si vedrà questa piegarsi (Fig. 372), per il soffio generato dall'aria compressa che è scacciata dalla bolla.

Questa pressione varia col diametro della bolla; ed è maggiore nella bolla di diametro minore. Ciò si può dimostrare con l'apparecchio della Fig. 373, in cui $A - B - C$ sono tre pezzetti di tubo di gomma; si chiude con le dita il tubo B, e si soffia con la bocca in M, una piccola bolla di sapone in K; si chiude ora il tubo C, e si soffia in H una bolla più grande. Si chiude finalmente il tubo A lasciando liberi B e C; in modo cioè da mettere tra loro in comunicazione le due bolle: *si vedrà la bolla K impiccolire ed H ingrandire.* Cioè la bolla più piccola manda aria verso la maggiore, ed esercita pertanto una pressione più grande.

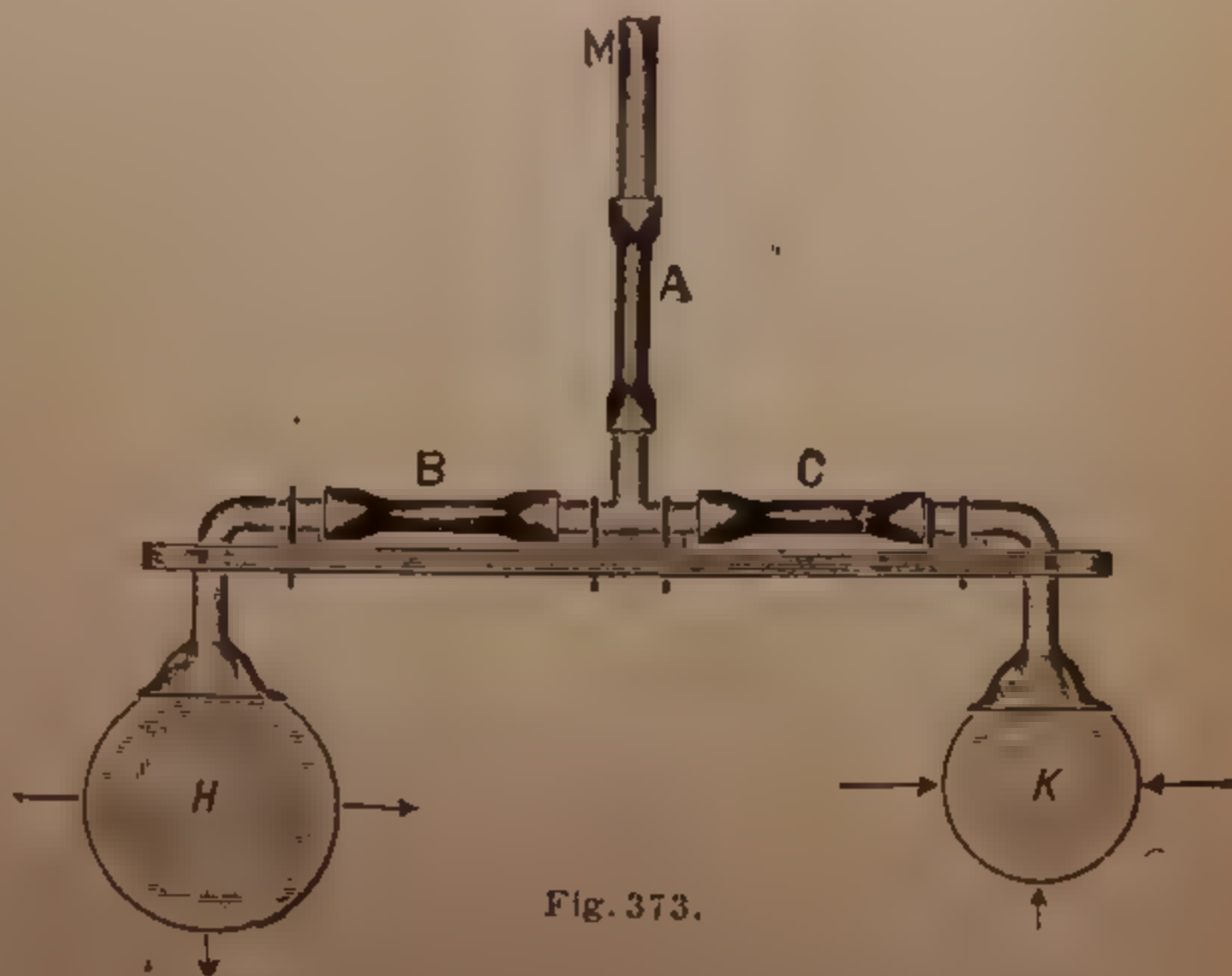



Fig. 373.

271. **Fatti dipendenti dalla capillarità.** — La membrana superficiale esistente alla sommità di un liquido in un tubo capillare, aderendo alle pareti del tubo, sostiene il peso della colonnina liquida sottostante; e per tale peso s'incurva a forma di menisco concavo. Ciò se il liquido bagna le

pareti del t[illegible] dotato di forte coesione, [illegible] e il liquido si sollevi; ma per la p[illegible] na un menisco convesso.

Sono molti i fenomeni che si spiegano con la capillarità. Il petrolio s'innalza nello stoppino delle lampade, per capillarità; ed avviene parimenti l'imbibizione dei liquidi nel legno, nelle spugne, ed in generale nei corpi porosi. Per capillarità (in parte) sale la linfa nei vegetali, nei canali capillari esistenti tra le fibre del legno. Una goccia d'acqua posta in un tubo conico, si sposta verso l'estremità di raggio minore (Fig. 374); perchè la tensione della membrana superficiale A supera quella di B, essendo di raggio minore; così si spiega perchè nel tiralinee da disegno e nelle penne l'inchiostro si porta sempre alla punta.

Fig. 374.

Diffusione, diosmosi, dialisi.

272. **Diffusione nei gas.** — Due gas di diversa densità possono stare momentaneamente separati; così, ad es., dell'anidride carbonica (CO_2) più pesante, può essere contenuta nel pallone inferiore A (Fig. 375) e dell'idrogeno (H) nel pallone superiore B. Ma lasciando a sè i due gas, essi a poco a poco si mescolano; e dopo qualche tempo in entrambi i recipienti si trova una mescolanza uniforme dei due gas.

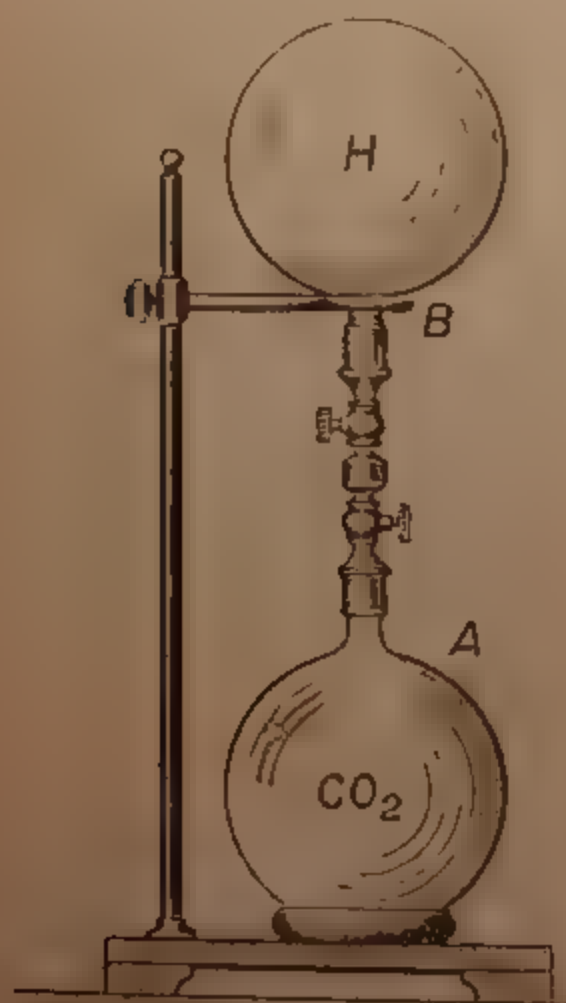



Fig. 375.

Si dice che i due gas si diffondono, e si chiama appunto **diffusione** il mescolarsi di due gas direttamente in contatto.

La spiegazione di questo e dei fenomeni seguenti, sta nel fatto che in un fluido in quiete le molecole non sono ferme; ma sono dotate di moto velocissimo in tutte le direzioni. La velocità delle molecole dipende dalla natura di esse e dalla temperatura del fluido; per i gas si tratta di velocità di parecchie centinaia di metri al secondo e per l'idrogeno può sorpassare perfino i 1500 m al secondo. Naturalmente non dobbiamo pensare che il moto sia rettilineo. Per l'attrazione scambievole delle molecole, una particella proveniente in una data direzione, viene vicino ad un'altra molecola; attratta da questa vi gira attorno, sfuggendo in un'altra direzione, per girare attorno ad un'altra molecola; e così di seguito, incessantemente in ogni punto.

Per questo moto delle molecole i gas si espandono; onde, come dicemmo (§ 19), l'espansione dei gas non è indizio di un'azione ripulsiva delle mole-

cole; queste ancora si attirano scambievolmente per coesione; ma il moto derivante da questa attrazione è minimo e scompare rispetto alla velocità grande di cui sono animate le molecole, per la quale esse si allontanano una dall'altra in tutte le direzioni. Analogamente, la diffusione avviene per causa di tale movimento, per il quale viene anche annullata l'azione della gravità; onde le molecole del gas sottostante, di maggior densità, possono muovendosi portarsi in alto fra le molecole del gas meno denso, e viceversa.

273. **Diosmosi nei gas.** — La mescolanza avviene anche se i due gas sono separati da un setto poroso (terracotta, legno, ecc.), poichè le molecole passano nei pori del setto. Ma in questo caso interviene la attrazione delle molecole del setto verso quelle del gas, per cui il moto di queste è rallentato; essendo tale attrazione (cioè l'adesione) diversa pei diversi gas, questi passano con diversa velocità, cioè in diversa quantità. Tra i gas passa in maggiore quantità quello di minore densità; perchè le sue molecole, avendo massa minore, risentono un'attrazione pure minore; più esattamente vale **la legge di Graham** [1]:

Le velocità con cui si diffondono due gas attraverso un setto poroso sono inversamente proporzionali alle radici quadrate delle loro densità.

Ne deriva che da una parte del setto entra più gas che non ne esca, e quindi vi si forma una pressione, detta **pressione osmotica.** Così, si abbia un vaso poroso A chiuso da un tappo, attraversato da un tubo di vetro C contenente un liquido. Se nel vaso A vi è aria, essa è alla stessa pressione esterna, ed il liquido si dispone allo stesso livello in B e D, (Fig. 376). Se ora s'introduce A dentro una campana E, in cui per F entra del gas illuminante, questo per diosmosi penetra in A e vi stabilisce una pressione; si osserva infatti il liquido nel tubo C scendere in B e salire in D.

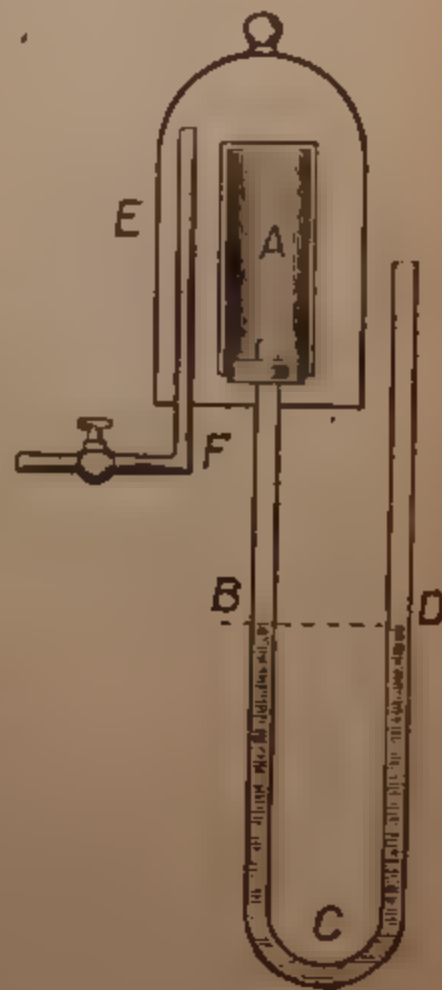



Fig. 376.

274. **Dialisi nei gas.** — La mescolanza dei gas avviene anche attraverso una membrana semipermeabile, e cioè attraverso i pori fisici (§ 17); e allora prende il nome di dialisi. In questo caso le molecole del gas passano fra le molecole del setto, con le quali si mescolano; cioè avviene un fenomeno di soluzione. Quindi passa più facilmente il gas più solubile nella sostanza di cui è fatta la membrana. Così, attraverso una lamina di gomma, passa in discreta quantità l'idrogeno; per questa ragione quei palloncini di gomma che compriamo ai ragazzi, che s'innalzano come minuscoli aerostati, perchè sono pieni d'idrogeno, dopo un paio di giorni si afflosciano e scendono; l'idrogeno ne è sfuggito in gran parte attraverso le pareti per dialisi e non da supposti forellini o da una chiusura incompleta del palloncino.

---

(1) Graham Thomas, chimico inglese; n. a Glasgow nel 1805, m. a Londra nel 1869.

Per la stessa [illegible] non possono rimanere permanentemente [illegible], così perdono attraverso l'involucro dall'1 al 5 per cento di gas al giorno, e dopo pochi giorni devono scendere necessariamente per riformirsi di gas.

Attraverso una lamina di ferro arroventata passa l'ossido di carbonio; onde non bisogna lasciare mai arroventare le lamiere delle stufe metalliche; perchè filtrerebbe fuori di esse l'ossido di carbonio, che è velenosissimo.

Una bolla di sapone rimane sospesa dentro un vaso contenente anidride carbonica; ma questa per dialisi passa attraverso la lamina liquida che costituisce la bolla e la fa gonfiare sempre più, fino a farla scoppiare.

275. **Emulsione.** — Fenomeni analoghi avvengono nei liquidi. Se si mettono uno sull'altro, per ordine di densità, liquidi non mescibili, essi rimangono permanentemente separati, e la superficie di separazione è un piano orizzontale. Ciò avviene, p. es., nella così detta *boccia dei quattro elementi.* È una bottiglia (Fig. 377) nella quale rimangono sovrapposti in ordine di densità, e permanentemente separati: mercurio M, acqua A, olio O, alcool S.

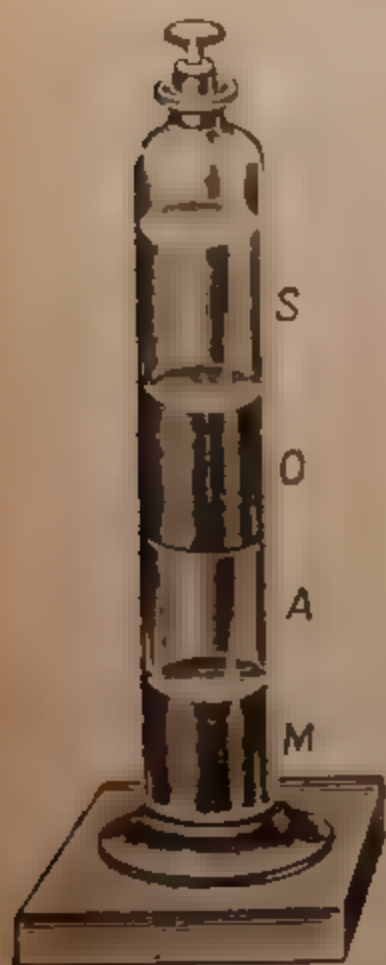
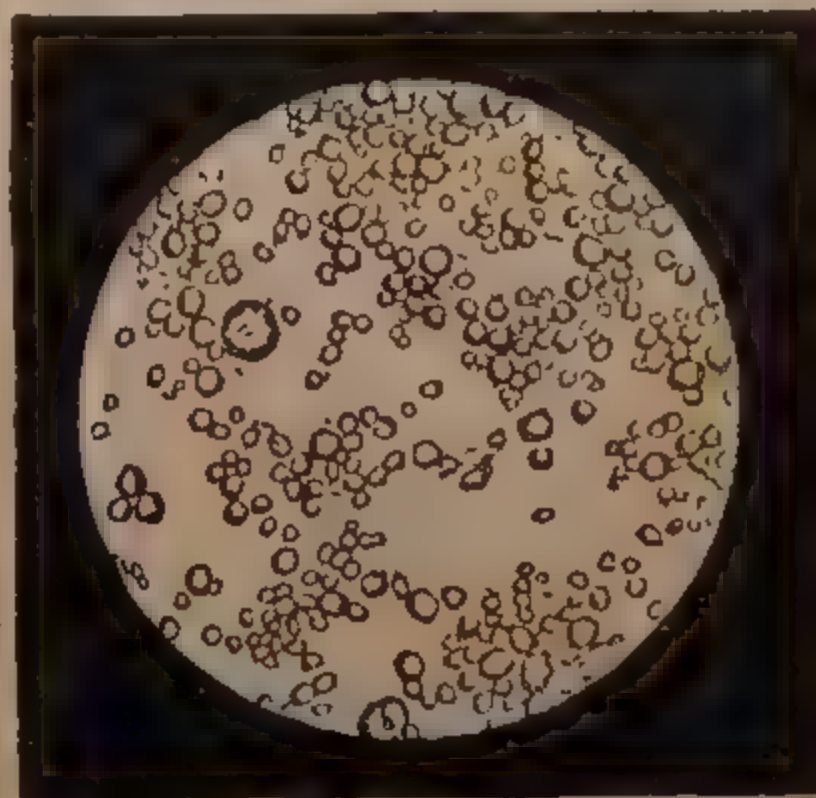



Fig. 377.

Fig. 378.

Due liquidi non mescibili possono temporaneamente e incompletamente mescolarsi, come, p. es., l'acqua e l'olio posti in una bottiglia che si agiti vivamente; tale mescolanza non intima si chiama **emulsione.** L'esempio più comune di emulsione è il latte. Lasciando a sè tale mescolanza, il liquido più leggero si separa lentamente e si raccoglie a galla; così la panna si separa dall'acqua nel latte.

Nell'emulsione il liquido più grasso si divide in minutissime goccioline, visibili al microscopio, che si mescolano con l'altro liquido. Così, una goccia di latte appare con forte ingrandimento come mostra la Fig. 378. Mentre la mescolanza di due liquidi mescibili è una mescolanza di molecole, invisibili al microscopio; ed una volta avvenuta, i liquidi non possono separarsi se non per distillazione, (Vol. 2°, § 76).

276. **Diffusione nei liquidi.** — Anche due liquidi mescibili possono rimanere temporaneamente separati per ordine di densità; così può sull'acqua rimanere temporaneamente l'alcool (§ 17). Ma lasciando a sè tali liquidi, essi dopo qualche tempo si mescolano spontaneamente e completamente. Questo fenomeno lo chiamiamo anche ora **diffusione**, e dimostra che anche nei liquidi le molecole si muovono ampiamente in tutti i sensi.

277. **Diosmosi nei liquidi.** — Anche pei liquidi la mescolanza avviene attraverso un setto poroso, e si chiama **diosmosi**. Il fenomeno avviene non solo per i liquidi puri; ma anche per le sostanze solide che essi disciolgono, e che in stato di soluzione si comportano come se fossero liquide. Anche ora una sostanza passa più abbondantemente di un'altra. Si stabiliscono cioè attraverso la membrana porosa due correnti disuguali: la maggiore si chiama **corrente endosmotica**, e la minore **corrente esosmotica**. Si forma perciò anche ora, da una parte del setto poroso, una **pressione osmotica**, che può raggiungere in qualche caso anche il valore di qualche atmosfera. Ma non vi è la legge semplice che vedemmo per i gas, (§ 273); cioè non è detto che passi più abbondantemente la sostanza meno densa. Ogni sostanza ha un certo *coefficiente endosmotico*, che per una data sostanza dipende anche dalla concentrazione della soluzione e dalla temperatura.

Fig. 379.

Le esperienze su questo fenomeno possono eseguirsi con l'apparecchio della Fig. 379, che si chiama *endosmometro di Dutrochet:*

In un vaso N contenente una delle soluzioni da studiare, per es., una soluzione di solfato di rame (C_uSO_4), si immerge una campana di vetro V chiusa inferiormente da una pergamena P, e munita superiormente di un lungo cannello di vetro AA. In V è contenuta l'altra soluzione da studiare, per es., una soluzione di cloruro di sodio (N_aCl), sino al livello NN. A poco a poco il solfato di rame passa attraverso la pergamena, ed il livello di V si alza gradatamente, sino ad arrivare in R a parecchi decimetri di altezza sul livello primitivo.

278. **Leggi di Van't Hoff.** — Dalle esperienze eseguite il Van't Hoff (1) trasse le seguenti leggi:

1. Soluzioni di sostanze diverse, contenenti egual numero di molecole per unità di volume (cioè soluzioni equimolecolari), hanno la stessa pressione osmotica. Tali soluzioni si dicono anche *isotoniche.*

Questa legge è analoga a quella di Avogadro sullo stato gassoso, studiata in Chimica.

2. La pressione osmotica è proporzionale alla concentrazione della soluzione.

Questa legge è analoga a quella di Boyle (§ 229), la quale esprimeva, che la pressione del gas cresce in proporzione della quantità di esso, racchiusa nello stesso volume.

3. La pressione osmotica aumenta di $^1/_{273}$ del suo valore, per ogni grado di riscaldamento.

Questa legge è analoga a quella che studieremo in *Termologia* (Vol. 2°, § 40), la quale dice che la pressione di un gas riscaldato sotto lo stesso volume, cresce di $^1/_{273}$ per grado.

4. La pressione osmotica è uguale alla pressione che avrebbe la sostanza, se fosse allo stato gassoso, ed occupasse un volume uguale a quello della soluzione.

---

(1) Van't Hoff Jacobus, fu professore all'Univ. di Berlino; n. a Rotterdam nel 1852, m. nel 1911.

È adunque evidente l'analogia fra lo stato di una sostanza in soluzione e lo stato [illegible] il Van't Hoff [illegible] che i composti in soluzione si comportassero come se fossero allo stato gassoso.

È bene avvertire che tutte queste leggi sono solo approssimate; e l'approssimazione è tanto maggiore, quanto più le soluzioni sono diluite. Le divergenze da queste leggi e dalle analoghe di Raoult che studieremo in *Termologia*, hanno una spiegazione nella dissociazione elettrolitica, che studieremo in *Elettrologia*.

279. **Dialisi nei liquidi.** — La dialisi è il passaggio dei liquidi attraverso gli spazi intermolecolari di una membrana semipermeabile. Il fenomeno è caratterizzato dalla seguente esperienza: in un tubo di vetro, piegato ad U (Fig. 380) si mettono: nel gomito inferiore C cloroformio, su questo in A acqua; e sull'acqua in E etere. Nè l'etere nè il cloroformio, si sciolgono nell'acqua; parrebbe quindi che i tre liquidi dovessero conservarsi separati indefinitamente. Invece, dopo un certo tempo, si riscontra che tanto in E quanto in C si trovano etere e cloroformio mescolati insieme. È evidente in questo caso che molecole di queste sostanze hanno attraversato l'acqua, passando fra le molecole di questa.

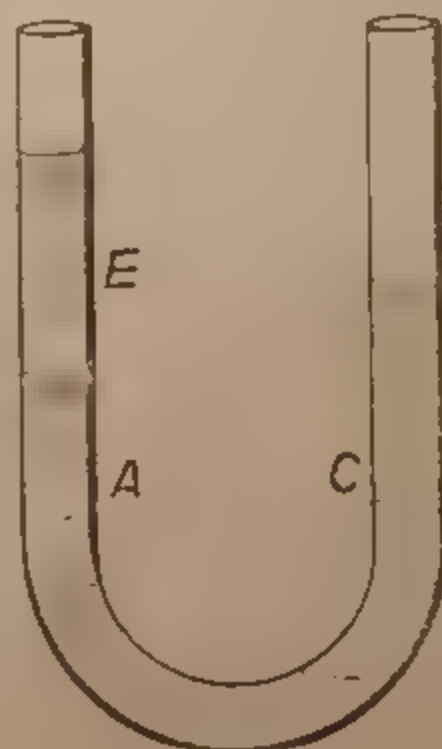



Fig. 380.

La dialisi è dunque un passaggio delle molecole di una sostanza fra le molecole di un'altra; è un fenomeno cioè di mescolanza di molecole, cioè di soluzione. Si comprende perciò anche ora come possano passare più facilmente alcune sostanze piuttosto che altre. Le sostanze che passano più facilmente sono quelle cristallizzabili, chiamate **cristalloidi**; mentre non passano le sostanze non cristallizzabili, chiamate **colloidi**. Questo fatto si comprende facilmente pensando che le sostanze cristalloidi in un liquido si sciolgono suddividendosi fino alle molecole, le cui dimensioni sono dell'ordine di grandezza di un decimilionesimo di millimetro (10^{-8} *cm*), e che perciò passano agevolmente attraverso gli spazi intermolecolari del setto poroso. Mentre le colloidi si suddividono in gruppi di molecole, chiamati **granuli** o **micelle**, di dimensioni circa 100 volte maggiore delle molecole (da 10^{-5} a 10^{-7} *cm*), e quindi trattenute dal setto poroso. Attraverso un setto formato da un vaso poroso imbevuto di ferrocianuro di rame, passa l'acqua, ma non le sostanze che tiene disciolte.

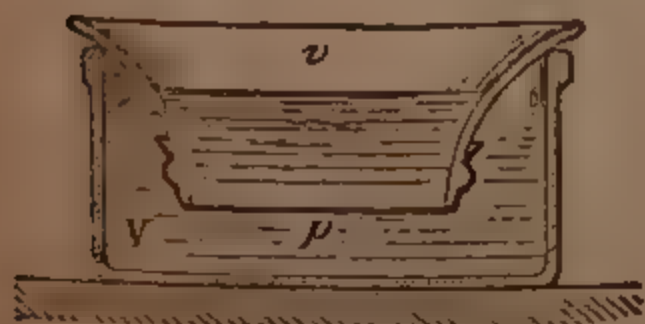



Fig. 381.

Si può quindi trarre profitto della dialisi, per separare sostanze sciolte in un liquido. Così si prenda un dializzatore (Fig. 381), formato da un recipiente v, il cui fondo è costituito da un foglio di pergamena p, e si riempia con una mescolanza di zucchero (*cristalloide*) e gomma arabica (*colloide*), sciolte in acqua. Tale recipiente s'immerge in un altro più grande V, contenente acqua pura. Attraverso la pergamena p passa lo zucchero di v che si scioglie nell'acqua di V; mentre in v rimane tutta la gomma.

Il Graham aveva fatto distinzione tra sostanze cristalloidi e colloidi. Ma questa distinzione è impropria, infatti, tutte le sostanze anche le più cristalline, come i metalli, possono formare soluzioni colloidali. Per cui è più opportuno dire che lo stato colloidale è un quarto stato della materia, tra lo stato solido e quello liquido.

Lo studio di questi fenomeni è di grande importanza; perchè su di essi è basata la vita animale e vegetale. Infatti lo scambio delle sostanze necessarie alla vita degli esseri organizzati, avviene attraverso le pareti di membrane; e la cellula stessa non è che un involucro semipermeabile, attraverso cui passa l'acqua, che tiene gonfia la cellula per la forte pressione osmotica che vi genera.

L'importanza grandissima dello studio dei colloidi, dipende dall'intima connessione esistente tra di essi e le forme della materia vivente; così che si può dire che *lo stato colloidale è una condizione indispensabile alla vita.*

280. **Viscosità dei liquidi.** — Abbiamo accennato (§ 8) che nessun liquido è perfettamente scorrevole, a causa di una resistenza che le molecole incontrano a scorrere le une sulle altre. Tale resistenza, o *attrito interno*, costituisce la *viscosità* del liquido. Essa è dovuta alle forze di coesione, per le quali le molecole, attraendosi, trovano resistenza a scorrere le une sulle altre. Per l'adesione del liquido col solido, di cui è formato un tubo in cui il liquido scorre, aderente alle pareti vi è uno strato di molecole liquide quasi ferme, contro cui strisciano le altre in moto.

La viscosità è un elemento importante per la qualità dei *lubrificanti.*

281. **Ipotesi cinetica dei fluidi.** — I fenomeni precedenti, come abbiamo notato (§ 272), dimostrano che le molecole dei fluidi sono in continuo movimento. Ma allora che dobbiamo intendere per fluido in quiete?

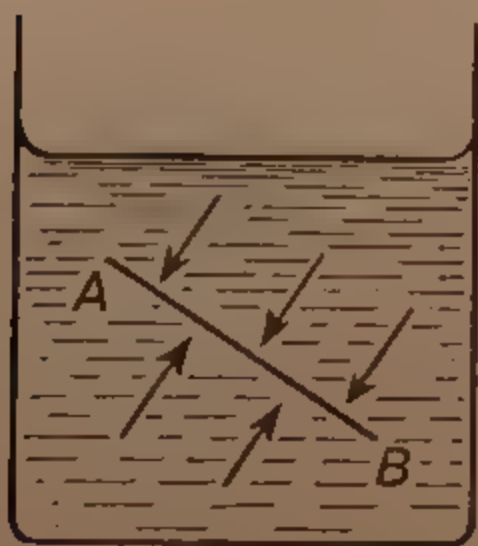



Fig. 382.

Consideriamo in un fluido una sezione qualsiasi AB, (Fig. 382). Attraverso ad essa passano molecole nei due sensi; diremo il *fluido in quiete* se il numero delle molecole che attraversano AB in un verso è uguale a quello delle molecole che l'attraversano, nello stesso tempo, in verso contrario.

In *Termologia* completeremo questi cenni con qualche altra nozione sul moto delle molecole e sugli urti di esse. Nel Vol. 3°, allorchè avremo completato il nostro studio con altri fatti della *Termologia*, dell'*Ottica* e dell'*Elettricità*, saremo in grado di fare una sintesi più completa, che ci condurrà alla concezione odierna della costituzione della materia.

INDICE

PARTE PRIMA

MECCANICA

Preliminari.

Proprietà generali.

Cenno sui sistemi di misure.

MECCANICA DEI SOLIDI

Cinematica.

Moto uniforme.

Moto vario.

Composizione dei movimenti.

STATICA

Composizione delle forze concorrenti.

Composizione delle forze parallele.

Equilibrio nelle rotazioni.

[illegible] gravità

Le macchine in quiete

DINAMICA

I tre principî.

Moto per azione della gravità.

Forza centrifuga.

Pendolo.

Lavoro ed energia.

Elasticità dei solidi.

NOZIONI DI COSMOGRAFIA

Il sistema solare.

La gravitazione.

MECCANICA DEI FLUIDI

Idrostatica.

AEROSTATICA

La pressione atmosferica.

Applicazioni del barometro.

Relazione tra pressione e volume.

Equilibrio di un corpo in un gas.

DINAMICA DEI FLUIDI

Pompe per i gas e per i liquidi.

Aviazione.

Efflusso dei fluidi.

Azioni molecolari nei fluidi.

Diffusione, diosmosi, dialisi.